Galli, M., Molfino, V., Montegui, E., Núñez, I. (2017). Evolución de la Matemática Educativa ilustrada mediante la enseñanza de funciones logarítmicas. *Reloj de agua*, *16*, 15-27.

Evolución de la Matemática Educativa ilustrada mediante la enseñanza de funciones logarítmicas

Micaella Galli[1], Verónica Molfino[2], Emilia Montegui[3], Inés Núñez[4]

RESUMEN

En este trabajo presentamos cuatro planificaciones que pretenden ilustrar, cada una, uno de los momentos presentados por Cantoral y Farfán (2003) en relación a la evolución de la Matemática Educativa. Esperamos con ello contribuir a estrechar un vínculo que pocas veces es atendido: el de la investigación en Matemática Educativa con las prácticas de enseñanza.

PALABRAS CLAVE: Perspectivas de investigación en Matemática Educativa, prácticas de enseñanza.

ABSTRACT

In this work we present four lesson plans that aim to illustrate, each one, one of the moments presented by Cantoral and Farfán (2003) in relation to the evolution of Mathematics Education. We hope to contribute to strengthen a bond that is rarely attended: the one between research in Mathematics Education and teaching practices.

KEYWORDS: Research perspectives in Mathematics Education, teaching practices.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge a partir de una actividad del curso de Análisis del Discurso Matemático Escolar de cuarto año del profesorado de Matemática para la Enseñanza Media, en el Instituto de Profesores Artigas. Ilustra, mediante planificaciones de clase, los cuatro momentos a los que hacen referencia Cantoral y Farfán (2003) en relación a la evolución de la Matemática Educativa (ME). Ellos son: una didáctica sin alumnos, una didáctica con alumnos pero sin escuela (la perspectiva del grupo *Psychology of Mathematics Education*), una didáctica en la escuela pero sin escenarios (didáctica francesa) y una didáctica en escenarios socioculturales (socioepistemología).

Presentamos así cuatro planificaciones sobre un mismo tema, cada una correspondiente a uno de dichos momentos. Si bien somos conscientes de que esos momentos hacen referencia a la ME como campo de investigación, de cada perspectiva de investigación pueden deducirse implicancias específicas para la enseñanza, y de ahí que consideremos pertinente ilustrarlas mediante planificaciones de clases hipotéticas. El ejercicio que realizamos consiste en seleccionar un contenido a abordar y, bajo estas consideraciones, diseñar cuatro planificaciones tales que en cada una se puedan apreciar aportes de la investigación de la perspectiva correspondiente.

[1] Profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas.
[2] Doctora en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México). Se ha desempeñado como docente del Instituto de Profesores Artigas y del Profesorado Semipresencial, y como docente de posgrado en el Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores (Uruguay).
[3] Estudiante de cuarto año de la especialidad matemática del Instituto de Profesores Artigas.
[4] Profesora de Matemática egresada del Instituto de Profesores Artigas.

Seleccionamos la unidad Álgebra y Funciones del curso de primer año de Educación Media Superior, y de ella abordaremos el tema: Función logarítmica. El programa sugiere un abordaje del tema mediante la visualización de las gráficas de las funciones con el objetivo de que estas permitan el descubrimiento de las características de las funciones. Sugiere proponer: “Ejemplos y problemas de origen variado como crecimiento de poblaciones, crecimientos de capitales, desintegración radiactiva, variación del pH de una solución” (CES, 2010, p. 4).

Presentamos a continuación las planificaciones en las que se explicitan a modo de esquema las características generales, el desarrollo tentativo de la clase y una fundamentación de cómo fueron utilizados los aportes de investigación de cada perspectiva de la ME. Si bien el tema es, para todas, *función logarítmica*, no solamente cambian las actividades propuestas sino también los objetivos, el tiempo dedicado a la implementación e incluso el subtema a dar en esa clase en concreto, fruto de las implicancias correspondientes de cada *momento*.

MOMENTO “UNA DIDÁCTICA SIN ALUMNOS” (DIDÁCTICA CLÁSICA)

Tema: Función logarítmica.
Subtemas: Crecimiento, dominio, recorrido y ceros de la función logarítmica.
Tiempo: 90 minutos.
Objetivos de la unidad: Conocer la función logarítmica y observar las propiedades de la misma.
Objetivos específicos: Graficar la función logarítmica $f: R^+ \to R \,/\, f(x) = \ln x$, observar valores funcionales, crecimiento, dominio y ceros de esta función.
Conceptos previos: Definición de logaritmo, concepto de función, raíz de una función, crecimiento y decrecimiento, manipulación básica de GeoGebra.
Esquema de clase: Se planteará la siguiente actividad a realizarse con GeoGebra, trabajando en duplas.

Actividad 1:
1) Crea un *deslizador a* con un mínimo de -5, un máximo de 15 y un incremento de 0,01.
2) Inserta en la *barra de entrada* el punto A cuyas coordenadas son (*a, ln a*).
3) Completa la siguiente tabla ayudándote con la herramienta *deslizador*.

a	0,25	12	0	1	-3	6	-1	0,5
ln a								

Actividad 2:
Activa el *rastro* del punto A y la *animación automática* del *deslizador*. Observando el gráfico contesta:
1) ¿Para qué valores de *a*, *ln a* es positivo? ¿Y negativo? ¿Y cero?
2) ¿Qué ocurre cuando *a* es menor que cero? ¿Y cuándo *a* es cero?
3) Escribe la expresión analítica de la función que representa este gráfico.

Con estas actividades se pretende visualizar las características de la función logarítmica: raíces, dominio y recorrido. Se espera que el estudiante logre identificar el comportamiento de la función de forma autónoma, que observe el signo de las imágenes de valores mayores que uno, entre cero y uno y valores menores o iguales que cero, concluyendo así el dominio máximo en R y recorrido de la función para luego poder representarla de forma algebraica. Durante este período de trabajo, el docente monitoreará y guiará la actividad, pasando por los bancos evacuando dudas.

Posteriormente se realizará la puesta en común de los resultados obtenidos en ambas actividades, la intervención del docente estará enfocada en la última pregunta y se desarrollará oralmente de la siguiente manera: ¿cómo representamos esta función de forma algebraica? ¿Qué elementos se necesitan conocer para hacerlo? Se espera que los estudiantes concluyan que es necesario conocer el dominio, codominio y expresión algebraica para representarla. Se escribirá en el pizarrón dicha representación: $f : R^+ \to R \,/\, f(x) = \ln x$.

Actividad 3:

1) Completa los espacios en blanco:

$2 < 3 \Rightarrow ln\, 2$ _____ $ln\, 3$

$4 > 0{,}6 \Rightarrow ln\, 4$ _____ $ln\, 0{,}6$

$0{,}3 < 1 \Rightarrow ln\, 0{,}3$ _____ $ln\, 1$

2) Generaliza lo observado anteriormente.

Actividad 4

Realiza el mismo proceso que en las actividades 2 y 3 para la función:

$$h : R^+ \to R \,/\, h(x) = \log_{1/2} x$$

Con estas actividades se pretende observar el crecimiento de la función, dependiendo si la base del logaritmo es mayor o menor que 1. Se realizará en forma individual y se hará la puesta en común atendiendo a la formalización del concepto de crecimiento de la función logarítmica.

Entendemos que esta planificación se enmarca en el momento *una didáctica sin alumnos* pues “en este proceso, el estudiante no quedaba a cargo del proceso, si acaso solo de su ejecución” (Cantoral y Farfán, 2003, p. 31). Las tres tareas apuntan a que el estudiante realice, ejecute y proceda de forma sumamente guiada, también las intervenciones docentes se enmarcan en esta línea con el objetivo de dejar determinado el significado.

Se trabaja fundamentalmente con la función logarítmica de base *e* sin apuntar a generar un banco rico de imágenes conceptuales y sin tener en cuenta un contexto o situación que problematice el estudio de la misma. El software matemático es utilizado solo con el objetivo de la visualización y del cálculo, transmitiéndose un conocimiento acabado e inmutable, perdiéndose así el potencial de la herramienta en pos de la investigación y de la construcción del saber.

MOMENTO "UNA DIDÁCTICA SIN ESCUELA" (PME)

Tema: Función logarítmica.

Subtemas: Crecimiento, dominio, recorrido y ceros de la función logarítmica.

Tiempo: 180 minutos.

Objetivos de la unidad: Conocer distintas representaciones de la función logarítmica, dominar el tránsito entre ellas y caracterizarla.

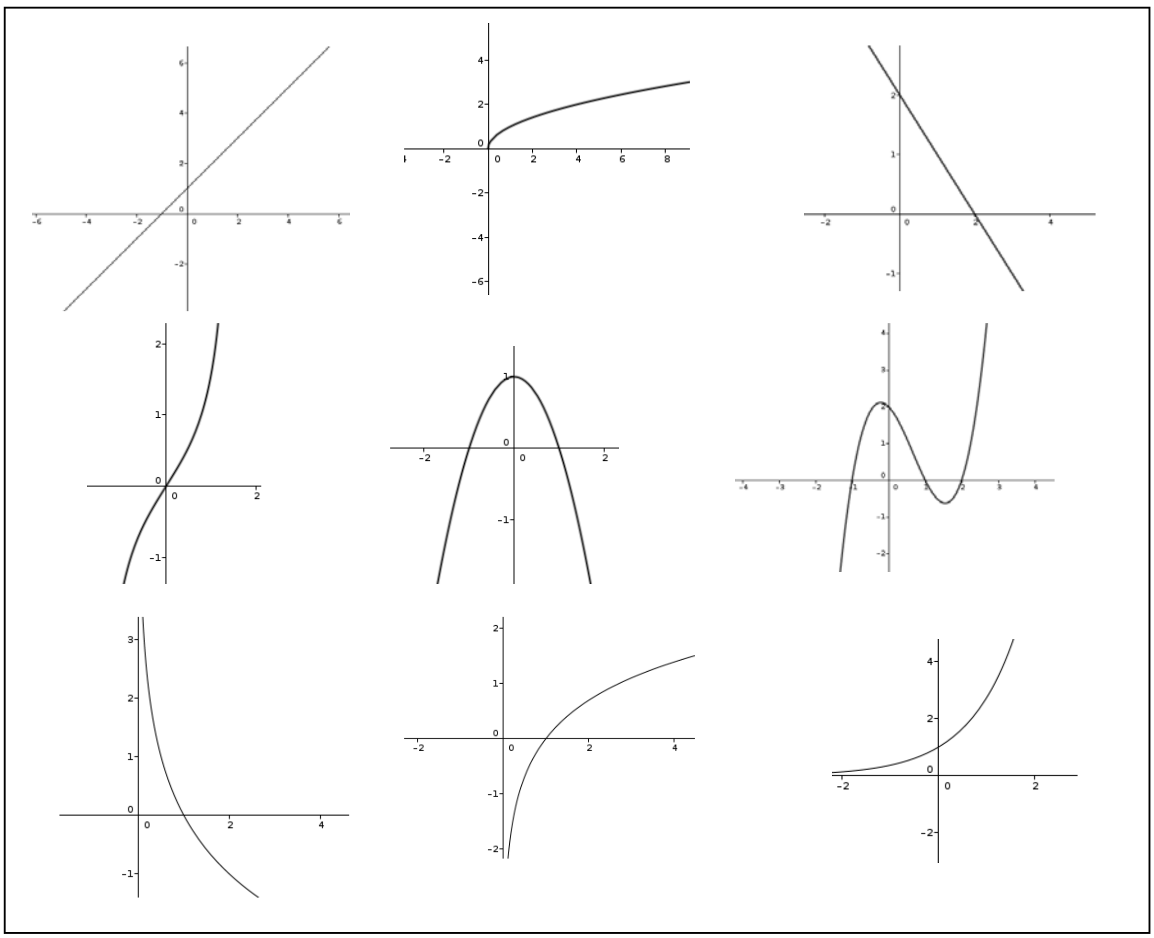
Objetivos específicos: Formar y enriquecer la imagen conceptual de función logarítmica.

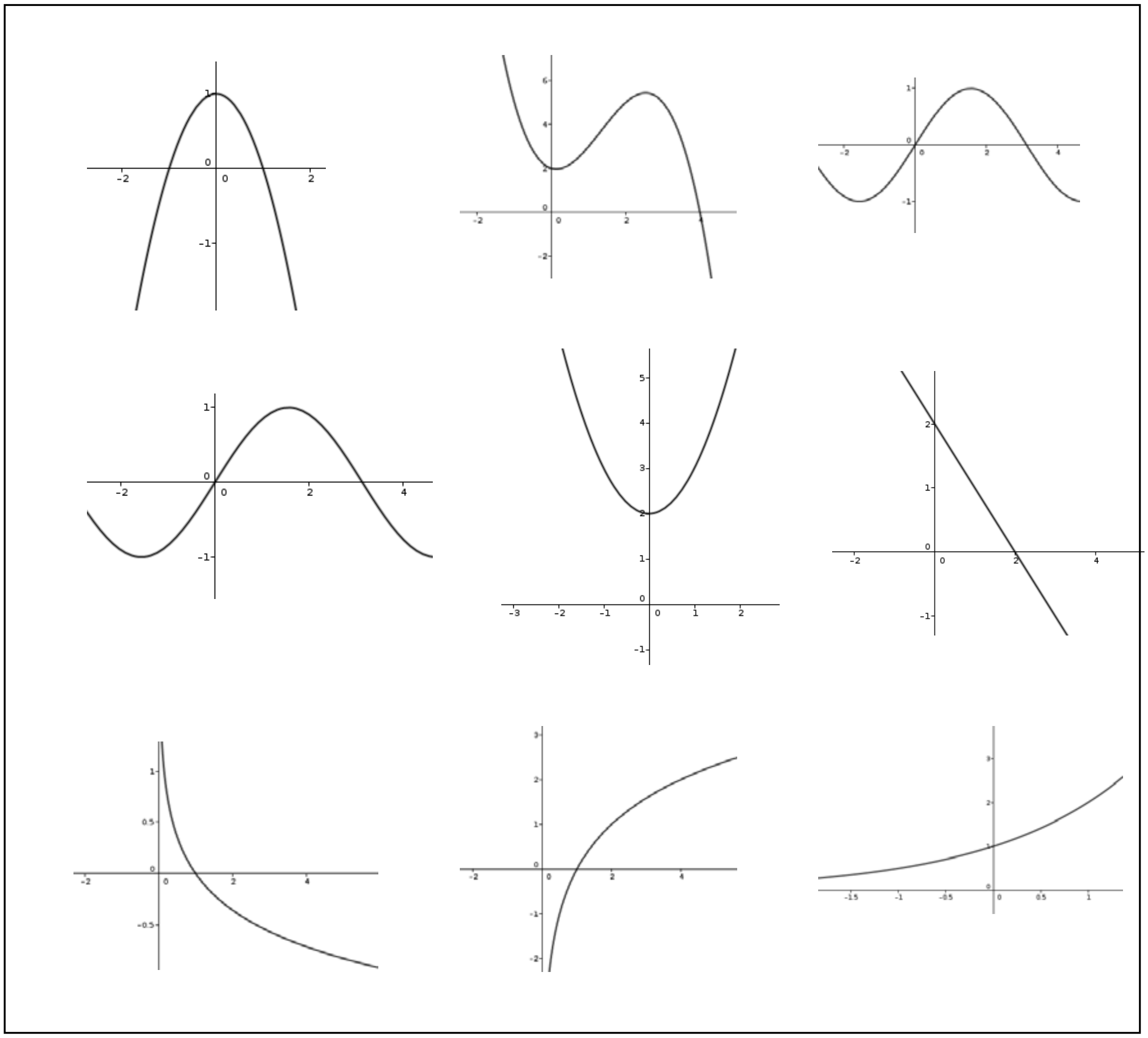
Conceptos previos: Definición de logaritmo, concepto de función, raíz de una función, crecimiento y decrecimiento.

Esquema de clase:

Se trabajarán todas las actividades en parejas, con el fin de fomentar el debate y el trabajo colaborativo. Luego de cada actividad se hará una puesta en común en la que cada equipo socializará sus respuestas.

Actividad 1: Clasifica las siguientes representaciones gráficas de funciones según un criterio que creas conveniente. Explicita cuál es ese criterio.





Actividad 2: Observa las siguientes tablas y clasifícalas tomando como criterio aquel que creas conveniente. Explicítalo.

x	-1	0	0,5	4
$i(x)$	0	1	1,5	5

x	0,5	1	1,5	3
$h(x)$	-0,69	0	0,4	1,9

x	-1	0	0,2	2
$g(x)$	3	2	2,04	5

x	0,3	1	1,2	2
$k(x)$	-0,52	0	0,079	0,3

x	-1	0	0,2	1,5
j(*x*)	0	2	1,728	-0,625

x	-1	0	0,5	2
p(*x*)	3	2	1,5	0

x	0,5	1	6	20	0,01
c(*x*)	-1	0	2,58	4,32	-6,64

x	-3	0	1	7
f(*x*)	-1	2	3	9

x	1	2	0,01	16
a(*x*)	0	-0,35	2,37	-1,42

x	5	0,2	1	0,001	16
b(*x*)	-2,32	2,32	0	9,94	-4

x	-1	0	0,2	2
q(*x*)	5	2	1,976	5

x	-1	0	0,3	1
r(*x*)	-2	-1	-1,09	-2

x	-2	0	0,3	1
m(*x*)	0	-4	-3,703	0

x	2	-3	0	-1,2	1	-1
d(*x*)	4	9	0	1,44	1	-1

x	0,3	0,7	1	200
n(*x*)	-0,4	-0,12	0	1,76

Actividad 3

Definimos *función logarítmica* a una función con dominio los reales positivos y codominio los reales, cuya representación algebraica es $\log_b{}^x$, siendo $b \in R^+, b \neq 1$.

Esquemáticamente:

$f: R^+ \rightarrow R \,/\, f(x) = \log_b{}^x$, siendo $b \in R^+, b \neq 1$.

Teniendo en cuenta esta definición realiza nuevamente las actividades 1 y 2.

Se espera que en las primeras dos actividades los estudiantes clasifiquen estas funciones, utilizando como criterio: crecimiento, raíces, dominio, codominio, simetría, entre otros. En las puestas en común de ambas actividades se trabajará con la socialización de todos estos criterios, los estudiantes deberán explicitar cuál criterio escogieron y justificar su elección. En la última actividad se pretende que los estudiantes sí atiendan a la definición de logaritmo para la clasificación. El rol del docente será el de monitor del trabajo y su objetivo será el de institucionalizar las distintas representaciones de función logarítmica.

Las actividades precedentes se enmarcan dentro de lo que Cantoral y Farfán (2003) han denominado *didáctica sin escuela,* perspectiva bajo la cual identifican al grupo de trabajo del PME, ubicando como principales referentes a los trabajos de Tall (1991) y de Tall y Vinner (1981). Ello puede apreciarse pues intentan poner en evidencia las imágenes conceptuales de función y representación gráfica que los estudiantes tienen incorporadas y fomentar la construcción de la imagen conceptual de función logarítmica junto con las características de la misma. El estudiante, con la intención de clasificar las representaciones gráficas, deberá recurrir a sus conocimientos previos y decidir un criterio de clasificación posible. Zaslavsky (2008) plantea que asociar conceptos según distintas categorías es fundamental para el aprendizaje. Esto requiere identificar similitudes y diferencias entre objetos, lo cual permite destacar distintas dimensiones de los mismos siendo esto fundamental en el razonamiento matemático.

Debido a que según esta línea de trabajo el estudiante no decide teniendo en cuenta la definición del concepto sino la imagen conceptual que ha creado del mismo, es muy probable que la clasificación realizada en primera instancia no considere si es función logarítmica o no, aunque posean como conocimiento previo la definición de logaritmo. Se espera que en la última actividad los estudiantes sí logren clasificar según este criterio dado que se da la definición como un dato y así se fomenta la creación de la imagen conceptual de función logarítmica, esto lo lograrán observando los ceros de las funciones, el crecimiento y el dominio de las mismas a partir de sus distintas representaciones. Vinner (1991) plantea que adquirir un concepto significa formar una imagen conceptual rica y coherente con la definición del mismo, es a esto a lo que las actividades apuntan pues, trabajando con distintas representaciones de una función se amplía la imagen conceptual.

Destacamos además que bajo el planteamiento de Cantoral y Farfán (2003), se enmarcan en *una didáctica sin escuela* debido a que solo toman en cuenta los procesos cognitivos de los estudiantes dejando por fuera tanto el ambiente y contexto en el cual están dándose los procesos de enseñanza y aprendizaje como la construcción social del conocimiento como tal.

MOMENTO "UNA DIDÁCTICA EN LA ESCUELA PERO SIN ESCENARIOS"

Tema: Función logarítmica.
Subtema: Caracterización de la función logarítmica.
Tiempo: 90 minutos.
Objetivo de la unidad: Construir el concepto de función logarítmica.
Objetivos específicos: Utilizar el logaritmo como herramienta óptima en la resolución de problemas y graficar la función logarítmica.
Conceptos previos: Definición de logaritmo, concepto de función.
Esquema de clase: Se trabajará en grupos de a cuatro estudiantes y se hará una puesta en común luego de finalizada la actividad.

¿Cómo averiguar la edad de un fósil?

El método de datación radiocarbónica es uno de los métodos físico-químicos con que cuenta la arqueología para determinar la edad de los restos fósiles. Se basa en analizar la cantidad de contenido de Carbono 14 (sustancia radiactiva) en restos orgánicos y estimar el tiempo pasado desde su muerte, que es cuando comienza a desintegrarse el C-14 que había absorbido durante su vida. De esta forma, se puede calcular cuánto tiempo hace desde que se produjo la muerte del organismo que estamos datando, pues se conoce experimentalmente la velocidad con la que se produce la descomposición radiactiva del C-14.

Problema

Un fósil al momento de morir contiene una masa de C-14 igual a un gramo. Supongamos que luego de cada período de desintegración (aproximadamente 6000 años) la masa radiactiva se reduce a la mitad. Al cabo de otro período se vuelve a reducir a la mitad y así sucesivamente.

a) ¿Cuántos períodos de desintegración pasaron si el fósil tiene una masa de ¼ g?
¿Y si tiene 1/64 g? ¿Y si tiene 1/5 g?

b) Define una función *f* que relacione la masa de C-14 en el fósil con los períodos que transcurrieron desde su muerte, teniendo en cuenta que la masa del C-14 no es medible luego de los 600 000 años de desintegración.

c) Grafica dicha función en GeoGebra y a partir de ello reflexiona sobre lo respondido en las partes anteriores.

Con esta actividad se pretende que el estudiante construya la función logarítmica como la inversa de la función exponencial ya que surge como estrategia óptima para resolver el problema planteado. En concreto se aborda la función $f: R^{+} \to R \,/\, f(x) = \log_{1/2} x$.

Con la última pregunta de la parte a) surge la necesidad de recurrir a la representación algebraica de esta relación. Los estudiantes podrán en una primera instancia intentar aproximaciones, por ejemplo pensando que tienen que ser más de dos períodos porque la cantidad es menor a ¼ g, pero menos de tres períodos porque se tienen más de 1/8 g de materia. Pero para calcular con precisión, deberán plantear una ecuación exponencial, y dado que ya conocen el concepto de logaritmo podrían emplearlo para calcular el valor exacto. En las partes siguientes se exige la formalización de esta relación, atendiendo al dominio, codominio, recorrido y expresión algebraica de la función logarítmica. El docente tomará el rol de promotor de la construcción del conocimiento y guiará a los estudiantes durante toda la tarea.

Consideramos que esta planificación se enmarca en lo que Cantoral y Farfán (2003) denominan *una didáctica en la escuela pero sin escenarios* pues se presenta un problema situado en un contexto determinado, en el que el estudiante deberá indagar en sus conocimientos previos y generar estrategias para encontrar una solución. Esta didáctica se enfoca en la relación alumno-saber, siendo esta el eje para la construcción del conocimiento, dejando de lado la dimensión sociocultural del concepto.

Pensamos que esta actividad promueve la necesidad de la utilización de la función logarítmica como inversa de la exponencial y exige en los estudiantes la búsqueda de distintas estrategias de resolución. En este sentido:

> Brousseau sostiene que a partir de los saberes que aparecen en los programas escolares, es necesario diseñar situaciones didácticas que hagan funcionar estos saberes. Para ello es necesario crear una génesis artificial de los conocimientos para que el saber aparezca, para el alumno, como un medio de seleccionar, anticipar, ejecutar, y controlar las estrategias que aplica para resolver el problema planteado. (Ochoviet y Olave, 2005, p. 7)

Mediante la última pregunta pretendemos que visualicen la representación gráfica de la función trabajada con el objetivo de revisar la definición que se formuló en la parte b), atendiendo al dominio, codominio y crecimiento de la función. Además se pretende incentivar la correspondencia entre las distintas representaciones de un mismo concepto matemático, en este caso el de función logarítmica.

MOMENTO "UNA DIDÁCTICA EN ESCENARIOS SOCIOCULTURALES"

Tema: Función logarítmica.
Subtema: Covariación de la función logarítmica.
Tiempo: 135 minutos.
Objetivo de la unidad: Construir el concepto de función logarítmica.
Objetivo específico: Observar, a partir de una partición regular del recorrido y su correspondiente en el dominio, la covariación entre una progresión geométrica (dominio) y una aritmética (recorrido) en la función logarítmica.
Conceptos previos: Definición de logaritmo, concepto de función, semirrecta, rectas paralelas.
Esquema de clase: Se trabajará en grupos de a tres estudiantes a través de GeoGebra, realizando una puesta en común luego de cada parte.

Las actividades seleccionadas tienen como trasfondo la idea de la covariación, por considerarlo fundamental en el concepto de función, en el caso de la función logarítmica se trabaja con la covariación entre una progresión geométrica y una aritmética. Se entiende como covariación "la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. Nos interesa aquí que se perciba el tipo de crecimiento que sufre cada uno de los elementos que intervienen y aceptar la íntima relación que se establece entre ambos" (Farfán y Ferrari, 2008, p. 13). La selección de actividades fue basada en la investigación de Farfán y Ferrari (2008).

Actividad 1

Se nos ha proporcionado el siguiente procedimiento para construir algunos puntos de la representación gráfica de una función cuyo dominio son los reales positivos. Realiza esta construcción en GeoGebra.

1. Ubica en el sistema de ejes coordenados los puntos A (1,0), B (0,-1) y O (0,0). A es el primer punto de la gráfica.
2. Traza la semirrecta de origen B que contiene a A.
3. Halla el punto C, tal que C es la intersección de BA con la paralela a O*x* por el punto (0,1). C es el segundo punto de la gráfica de la función que podemos hallar mediante esta construcción.
4. Traza la semirrecta de origen O que contiene a C.
5. Halla el punto D, tal que D es la intersección de OC con la paralela a O*x* por el punto (0,2). D es el tercer punto de la gráfica de la función.
6. Continúa con esta construcción hasta obtener seis puntos del gráfico de la función.

Actividad 2:

Realiza una tabla en la que se represente la correspondencia entre abscisas y ordenadas de cada uno de los seis puntos que obtuviste en la parte anterior.

a) ¿Existe algún patrón de variación en la columna de las ordenadas? Si es así, ¿cuál?
b) ¿Existe algún patrón de variación en la columna de las abscisas? Si es así, ¿cuál?
c) ¿Puedes encontrar alguna relación entre estas variaciones? ¿cuál?
d) Anota la abscisa de los puntos que tienen como ordenada 2, 3 y 5. ¿Qué relación hay entre estas tres abscisas? ¿Y entre sus ordenadas?

Actividad 3:

Dadas las siguientes tablas que corresponden a dos funciones distintas, contesta las mismas preguntas que en la actividad 2 para cada una de ellas.

x	0	1	4	9	16	25
y	0	1	2	3	4	5

x	1	3	9	27	81	243
y	0	1	2	3	4	5

¿Cuál de estas dos tablas plantea el mismo tipo de relación entre la variación de abscisas y la variación de ordenadas que la tabla de la actividad 2?

Actividad 4:

Escribe algebraicamente la relación de correspondencia que existe entre abscisas y ordenadas de las tres funciones anteriores.

En la primera actividad se pretende que los estudiantes trabajen geométricamente construyendo puntos que pertenecen a la curva de la función $f : R^{+} \to R \,/\, f(x) = \log_2{}^{x}$. Esta construcción permite evidenciar ciertas regularidades que facilitarán el posterior trabajo en relación al comportamiento de la función y la covariación entre abscisas y ordenadas. La puesta en común se hará con el objetivo de que los estudiantes predigan o intuyan cómo es el comportamiento de esta función, se pensará en cómo construir puntos con ordenada negativa.

La segunda actividad apunta directamente a visualizar la covariación que se presenta en esta función. Los estudiantes deberán evidenciar cómo varían ordenadas y abscisas y posteriormente encontrar la relación entre ellas.

En un tercer momento se pretende que realicen el mismo razonamiento que en la parte anterior, atendiendo a la covariación que se presenta en las funciones $g : R^{+} \to R \,/\, g(x) = \sqrt{x}$ y $h : R^{+} \to R \,/\, h(x) = \log_3{}^{x}$. Esta actividad tiene como finalidad lograr distinguir y caracterizar una función de acuerdo a la covariación entre ordenadas y abscisas, llegando a identificar un vínculo entre las funciones *f* y *h* las cuales presentan la relación covariacional entre una progresión geométrica y una aritmética. Al finalizar la clase pretendemos que los estudiantes puedan reconocer que esta covariación hace referencia a la función logarítmica antes enunciada, mientras la función *g* tiene un comportamiento diferente.

Entendemos que esta planificación suscribe a *una didáctica en escenarios socioculturales* (Cantoral y Farfán, 2003) por haberse diseñado a partir de una investigación que se enmarca a su vez en la perspectiva de la socioepistemología (Farfán y Ferrari, 2008). Dicha perspectiva se caracteriza por estudiar la construcción social del conocimiento, identificando prácticas sociales y de referencia que generan y norman dicha construcción. “Hablamos entonces de prácticas sociales como generadoras de herramientas y representaciones sociales, que nos permitan generar conocimiento y construirnos modificándolas y modificándonos” (Farfán y Ferrari, 2008, p. 325).

Algunos de los trabajos que se enmarcan en esta perspectiva de investigación utilizan ese conocimiento para el diseño, implementación y análisis de propuestas didácticas. Tal es el caso de Farfán y Ferrari (2008), quienes indagan en la socioepistemología de lo logarítmico para identificar como prácticas sociales “la de facilitar cálculos y la de modelar, ambas cobijadas por la predicción”

(p. 347). A partir de ello, diseñan una tarea (empleada en este trabajo con leves adaptaciones) que pone al estudiante en la situación de modelar: frente a una situación geométrica, deben encontrar regularidades en la relación entre abscisas y ordenadas para construir un modelo que permita predecir la posición de otros puntos en la secuencia.

Para lograr el objetivo se pide al estudiante que se centre en el análisis de la covariación de progresiones, fundamental para lograr construir el modelo logarítmico. En ese sentido la planificación presentada se erige sobre el desarrollo sociohistórico del concepto de función como modelizador de movimientos, es decir, que la construcción de lo logarítmico surge de:

> los primeros esbozos del estudio del movimiento, donde se enlazan las reflexiones variacionales aristotélicas con las exploraciones numéricas de Arquímedes, enriqueciéndose más adelante con las representaciones de Oresme y Bradwardine así como la discusión que proponen respecto al estudio del movimiento de cuerpos en el espacio mediante el uso de progresiones. (Farfán y Ferrari, 2008, p. 326)

Es así que la concepción de covariación presentada por Farfán y Ferrari es pertinente para los objetivos perseguidos: "vincula el movimiento entre valores sucesivos de una variable coordinándolo con un movimiento entre los correspondientes valores sucesivos de la otra variable" (2003, p. 313).

Las actividades apuntan además a generar un entendimiento del vínculo entre las distintas representaciones de un mismo objeto matemático, en este caso la función logarítmica. "Partimos de la idea de que es necesaria la construcción de una red de modelos, donde lo geométrico, lo numérico y lo algebraico, generen la plataforma que les permita, a los estudiantes y profesores, hablar de lo logarítmico" (Farfán y Ferrari, 2008, p. 328).

Es de interés destacar que según Ferrari (2005) la idea de "saber función" no es equivalente a comprender todas y cada una de las funciones conocidas, pues cada función posee su propia naturaleza y sus propios problemas inherentes a la apropiación.

> Consideremos que estudiar a profundidad la problemática propia de la noción de función resta importancia o pertinencia a hacerlo con funciones particulares. Al cuestionar esto desde nuestra investigación y adherirnos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla, nos vemos obligados a reflexionar y a analizar las propuestas que existen en el medio sobre la covariación como una manera alternativa de abordar el tema función. (Ferrari, 2005, p. 45)

Vemos a estas consideraciones reflejadas en nuestra planificación del cuarto momento debido a que se atiende a la función logarítmica en particular. Se focaliza en el estudio de la covariación presente en esta función con el fin de trabajar y construir las particularidades de la misma.

CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo hemos presentado cuatro planificaciones de una misma temática, mediante las que pretendemos ilustrar los cuatro momentos de la evolución de la ME identificados por Cantoral y

Farfán (2003). Lejos de sugerir que alguna de ellas es mejor que otra desde algún punto de vista (como podría ser, por ejemplo, el didáctico), en este trabajo lo que buscamos es mostrar cómo pueden usarse para el diseño de actividades las implicancias que cada una de las perspectivas de investigación en ME aporta a la enseñanza de la Matemática.

Por razones de espacio las explicaciones pueden resultar acotadas, sugerimos acompañar la lectura de este trabajo con aquel que representó la inspiración inicial: *Matemática Educativa. Una visión de su evolución* (Cantoral y Farfán, 2003).

Consideramos que este tipo de trabajo, que representó un desafío pero muy formativo para las autoras, puede ser relevante también para la comunidad de profesores de Matemática, ya que pretende fortalecer el necesario vínculo entre investigación y práctica docente, muchas veces relegado.

REFERENCIAS

Cantoral, R y Farfán, R. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

CES (ANEP) (2010). Programa de Matemática Primer año Bachillerato. Reformulación 2006- Ajuste 2010. Recuperado de: http://www.ces.edu.uy/files/Planes%20y%20programas/ref%202006%20CB/programa%204to%20a%C3%B1o/matematica.pdf

Farfán, R y Ferrari, M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 309-354.

Ferrari, M. (2005). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17* (pp. 45 – 50). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ochoviet, C. y Olave, M. (2005). *La didáctica de la matemática como disciplina científica.* Material elaborado para las Guías del curso Análisis del Discurso Matemático Escolar, documento interno del Departamento de Matemática, Consejo de Formación en Educación, Uruguay.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(7), 151-169.

Vinner, S. (1991). The rol of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Zaslavsky, O. (2008). Attention to similarities and difference: a fundamental principle for task design and implementation in mathematics educations. Invited presentation at the Topic Study Group (TSG34) on Research and Development on Task Design and Analysis, the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME-11), Monterrey, Mexico.