Franco, G., González, V., González, S., Lepratte, F., Viera, C. (2017). Los números irracionales y los segmentos inconmensurables. Una secuencia de actividades para introducir los números irracionales a partir de la historia de la matemática. *Reloj de agua*, *15*, 17-26.

Los números irracionales y los segmentos inconmensurables. Una secuencia de actividades para introducir los números irracionales a partir de la historia de la matemática

Gustavo Franco[1], Vanessa González[2], Silvina González[3],
Florencia Lepratte[4], Carolina Viera[5]

RESUMEN

En este artículo se presenta una secuencia de actividades —que utiliza la historia de la matemática como recurso didáctico— para introducir el concepto de *número irracional*. Esta secuencia está inspirada en la historia de los pitagóricos y busca situar a los estudiantes en un estado de consternación similar al que se encontraron estos ante la constatación de las limitaciones que presentan los números racionales. Nuestro objetivo es recrear en alguna medida la historia para que los estudiantes puedan, desde sus vivencias, valorar y dimensionar la importancia de los números irracionales.

PALABRAS CLAVE: historia de la matemática, recurso didáctico, secuencia de actividades, número irracional, pitagóricos.

ABSTRACT

This article presents a sequence of activities —which uses the history of mathematics as a didactic resource— to introduce the concept of *irrational number*. This sequence is inspired by the history of the Pythagoreans and seeks to place the students in a state of consternation, similar to the one they were found in while facing the realization of the limitations. Our goal is to recreate the history to some extent so that students can, from their experiences, value and size the importance of irrational numbers.

KEYWORDS: history of mathematics, didactic resource, sequence of activities, irrational number, Pythagoreans.

¿POR QUÉ INTEGRAR LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA A LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA?

Entre los diversos motivos que se pueden señalar acerca de por qué utilizar la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática, nos centraremos en los siguientes: (a) para que el estudiante pueda concebir a la matemática como una construcción humana que surge en un determinado contexto

[1] Profesor de Matemática egresado del Instituto de Profesores "Artigas" y Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales (Universidad Nacional del Comahue, Neuquén, Argentina). Se desempeña como docente de Fundamentos de la Matemática, Análisis 1 e Historia de la Matemática en el Instituto de Profesores "Artigas".

[2] Estudiante de Matemática del Instituto de Profesores "Artigas".

[3] Profesora de Matemática, egresada del Instituto de Profesores "Artigas".

[4] Profesora de Matemática, egresada del Instituto de Profesores "Artigas".

[5] Estudiante de Matemática del Instituto de Profesores "Artigas".

histórico, social y cultural, (b) para poner en evidencia la forma peculiar en que se construye el conocimiento matemático, y (c) para brindar elementos al docente que le permitan comprender y dimensionar las eventuales dificultades que puede entrañar la adquisición de cierto contenido matemático para sus alumnos (para otros motivos se puede consultar Tzanakis et al., 2000, p. 203; Gil y de Guzmán, 1993, p. 110).

(a) La historia de la matemática debería integrarse a la enseñanza de la matemática porque la historia puede contribuir a *unir los objetos* matemáticos, *poniéndolos en su contexto natural y situándolos respecto de un conjunto*:

> Nuestra civilización y, por consiguiente, nuestra enseñanza, privilegiaron la separación en detrimento de la unión, el análisis en detrimento de la síntesis. Unión y síntesis quedaron subdesarrollados… Como nuestro modo de conocimiento desune a los objetos, tenemos que concebir qué los une. Como aísla a los objetos de su contexto natural y del conjunto del que forman parte, constituye una necesidad cognitiva poner en su contexto un conocimiento particular y situarlo respecto de un conjunto. (Morin, 1999, p. 26)

Creemos que un uso adecuado de la historia de la matemática permitiría estructurar y situar respecto a un todo a los objetos matemáticos —que muchas veces aparecen, como ingrávidos, flotando en la clase—, para así brindar una visión holística de la matemática.

(b) El conocimiento matemático no se ha desarrollado de un modo ordenado y conciso, sin ambigüedades; una enseñanza de la matemática que presenta el conocimiento en su forma acabada, brinda al estudiante una imagen inexacta y artificial acerca de dicho desarrollo. Por lo tanto, si el conocimiento matemático es presentado de esta forma en la enseñanza, es razonable que el estudiante lo sienta como algo ajeno, que está dado y que es externo a él.

> ... la matemática suele reorganizarse global y retrospectivamente. Por un lado, parecería que esta reorganización es necesaria para evitar posibles relatos largos y tortuosos. Por otro lado, las preguntas y los problemas que constituyen motivaciones básicas para el desarrollo de una idea, así como las dudas que se plantean a lo largo del camino, permanecen ocultos bajo un cuerpo deductivo linealmente organizado de conocimiento, en el que los nuevos resultados parecen simplemente agregados en forma acumulativa.
>
> En este sentido, la correcta integración de la historia en la educación matemática puede desempeñar un papel importante ayudando a descubrir cómo “nuestros conceptos matemáticos, estructuras, ideas han sido inventados como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental” (Freudenthal, 1983, ix). (Tzanakis et al., 2000, p. 204)

(c) La forma en que concebimos en la actualidad ciertos conceptos matemáticos pueden generarnos una idea falsa acerca de las dificultades que presentó su desarrollo. La historia de la matemática puede señalar al docente eventuales dificultades y obstáculos a los que pueden enfrentarse los estudiantes en la construcción de dichos conceptos.

> Al estudiar la historia y tratar de reconstruir aspectos del desarrollo histórico de temas matemáticos específicos de una manera didácticamente apropiada, los profesores pueden: [...]
>
> Tomar conciencia sobre:
>
> (i) las dificultades, o incluso los obstáculos, que aparecieron en la historia y pueden reaparecer en el aula;
>
> (ii) ... incluso cuando un tema puede parecer simple, puede haber sido el resultado de una evolución gradual. En general, esta evolución se centró en cuestiones y problemas concretos que no son evidentes si el tema se presenta en su forma moderna desde el principio. Pero estas preguntas y problemas pueden presuponer una madurez matemática por parte del estudiante que puede no existir todavía. En este sentido, la historia de las matemáticas puede ayudar al profesor a tomar conciencia de los pros y los contras de presentar un tema en cierto nivel educativo... (Tzanakis et al., 2000, p. 206)

¿CÓMO INTEGRAR LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA A LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA?

A continuación presentamos tres formas complementarias a través de las cuales creemos que se puede integrar la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática. Mediante: (1) el relato de hechos históricos, (2) actividades y problemas extraídos de la historia, y (3) secuencias de actividades inspiradas en la historia.

Creemos que la historia de la matemática no debería reducirse a una mera colección de anécdotas con las que cuenta el docente para, por ejemplo, comenzar a trabajar ciertos contenidos (fecha de nacimiento y de deceso, país de origen, contribuciones a la matemática, etcétera, de un cierto personaje histórico).

Por otra parte, por diversas razones no es posible (ni pertinente) un trabajo en la clase de matemática que busque atrapar la complejidad de los hechos históricos: (i) por falta de tiempo, (ii) debido a que quizás el docente de matemática no cuenta con la formación suficiente (estas son dos de las objeciones acerca de integrar la historia de la matemática a la educación matemática recopiladas en Tzanakis et al., 2000, p. 203), y (iii) porque la historia se volvería el centro de la clase, dejando de ser un recurso didáctico para la enseñanza de la matemática. Pero entonces, ¿cómo brindarles herramientas a nuestros alumnos para que puedan apreciar a la matemática como una disciplina en donde el conocimiento es construido por personas de un modo dinámico y complejo, en contraposición a un conocimiento estático, acabado y caprichoso? Creemos que el relato histórico, como colección de anécdotas, debe ser complementado con actividades y problemas extraídos de la historia de la matemática y con secuencias de actividades que transmitan, más allá del relato, las ideas y concepciones de los matemáticos de otras épocas.

Sobre la secuencia de actividades

Reina, Lasa, y Wilhelmi (2012) señalan que "... los irracionales y las fracciones continuas suelen aparecer en secciones del tipo 'curiosidades matemáticas', 'para saber más', etc., normalmente desvinculadas de una verdadera actividad matemática y de un proyecto de enseñanza institucionalizado" (p. 70). Teniendo en cuenta además que "el número irracional no puede ser, en secundaria, una mera formación propedéutica, que encontraría su pleno sentido solo años más tarde en la universidad, en particular en las facultades de ciencias" (Reina et al., 2012, p. 69), es que proponemos una secuencia de actividades para introducir en tercer año de Ciclo Básico de enseñanza media el concepto de número irracional.

Acorde a lo expuesto en la sección anterior, en la secuencia de actividades que se presenta en este artículo, la historia de la matemática no corre en paralelo a la propuesta didáctica: la historia de la matemática se materializa en dicha secuencia. La misma está inspirada en los pitagóricos y busca situar a los estudiantes en un estado de consternación similar al que estos se encontraron cuando se enfrentaron al hecho, contrario a sus creencias, de que los números racionales no podían expresar cualquier fenómeno de la realidad.

Consideramos que de esta forma los estudiantes podrán valorar y dimensionar, desde sus vivencias, trascendiendo el mero relato histórico (que puede ser sentido como externo y lejano), la importancia de los números irracionales. Nuestra intención es entonces recrear, en alguna medida, la historia para que ahora pueda ser vivida por ellos.

Sobre los pitagóricos

El primer grupo importante en brindar una explicación racional de la naturaleza fue el de los pitagóricos; escuela dirigida por Pitágoras (*c*. 585 – *c*. 500 a. C.) y establecida en Crotona. Los pitagóricos encontraron que diversos fenómenos de la naturaleza podían ser explicados a través de los números (enteros positivos) y relaciones entre estos (números racionales positivos), por lo que se convirtieron para ellos en el primer principio de explicación de la naturaleza.

> Todos los objetos estaban hechos de partículas elementales de materia o «unidades de existencia» combinadas de acuerdo con las distintas figuras geométricas. El número total de unidades representaba, de hecho, el objeto material. El número era la materia y la forma del universo. De ahí la doctrina pitagórica: «Todas las cosas son números.» Puesto que el número es la «esencia» de todos los objetos, la explicación de los fenómenos naturales solo podía lograrse con la ayuda de los números. (Kline, 2000, p. 11)

Los pitagóricos dotaron al segmento de una estructura corpuscular, es decir concibieron al segmento como una consecución de átomos iguales, uno pegado al otro (Dalcín y Olave, 2012, p. 162).

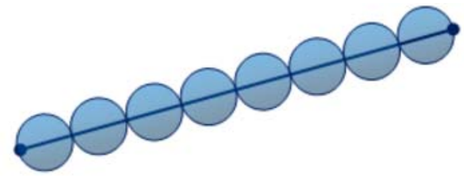

Figura 1. Los pitagóricos dotaron al segmento de una estructura corpuscular

De esta forma, a cada segmento se le podía asociar un número entero positivo que era la cantidad de corpúsculos por la cual estaba compuesto, de donde se concluye que dos segmentos cualesquiera eran siempre conmensurables, es decir, siempre existía un segmento que entraba un número exacto de veces en cada uno.

> Pero los matemáticos griegos hicieron un admirable y sorprendente descubrimiento: la diagonal y el lado de cualquier cuadrado son inconmensurables, esto es, no existe un segmento que esté contenido un número exacto de veces tanto en el lado como en la diagonal de un cuadrado.
>
> Descubrimiento admirable, porque llegaron a él con la fuerza del razonamiento, ya que se trata de un hecho que trasciende cualquier posibilidad de medida o experimentación. Y fue un descubrimiento demoledor para la ingenua teoría corpuscular... (Montesinos Sirera, 2007, p. 28)

LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES

A continuación presentamos la secuencia de actividades, mencionada anteriormente, para introducir el concepto de número irracional. Dicha secuencia está pensada para ser trabajada en equipos de tres o cuatro estudiantes. (El texto incluido en la actividad 1 fue extraído, aunque con modificaciones, de Dalcín y Olave, 2012, pp. 162-163).

Actividad 1

(I) Lee junto a tus compañeros de equipo el siguiente texto:

En la geometría pitagórica se considera a la recta como una sucesión de átomos uno consecutivo al otro y todos del mismo tamaño, de la misma forma que un collar está hecho de perlas.

Esta concepción implicaba, para los pitagóricos, que dados dos segmentos cualesquiera siempre era posible encontrar un átomo (bastaba disminuir su diámetro tanto como fuera necesario) para que entrara una cantidad entera de veces en ambos. A estos segmentos se los llama *conmensurables*.

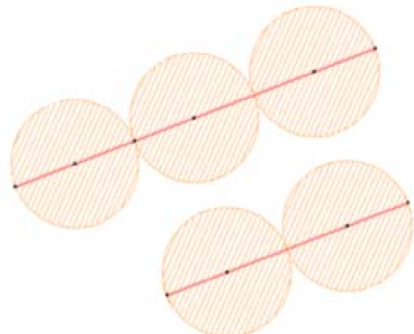

Figura 2. Dos segmentos de estructura corpuscular

De esta manera los pitagóricos afirmaban que la razón entre las medidas de estos dos segmentos es igual a la razón entre el número de átomos que entra una cantidad entera de veces en cada uno. En el caso de los segmentos de la figura 2, como existe un átomo que entra exactamente 2 veces en el segmento más pequeño y 3 veces en el más grande, la razón entre ambos es 2/3.

(II) Halla en cada caso, si es posible, el diámetro del átomo mayor que entra una cantidad entera de veces en cada pareja de segmentos y la razón entre las medidas de ambos. (Las medidas están expresadas en centímetros.)

(a) $\overline{AB} = 5$ y $\overline{CD} = 3$; (b) $\overline{AB} = 2$ y $\overline{CD} = 4$; (c) $\overline{AB} = 6$ y $\overline{CD} = 9$; (d) $\overline{AB} = 75$ y $\overline{CD} = 24$; (e) $\overline{AB} = 40$ y $\overline{CD} = 30$

Una de las observaciones que se puede realizar a partir de la actividad anterior es que si las medidas de los segmentos son números enteros, el diámetro del átomo mayor es el máximo común divisor entre las medidas de los segmentos dados. (Particularmente, si la medida de un segmento es múltiplo de la medida de otro, entonces el átomo mayor es el que tiene como diámetro la medida del segmento más pequeño). Otra observación importante es que la razón entre las medidas de estos segmentos (conmensurables) es el cociente entre dos números enteros.

Actividad 2

Halla en cada caso, si es posible, el diámetro del átomo mayor que entra una cantidad entera de veces en cada pareja de segmentos y la razón entre las medidas de ambos. (Las medidas están expresadas en centímetros.

(a) $\overline{AB} = 4{,}8$ y $\overline{CD} = 2{,}4$; (b) $\overline{AB} = 1{,}7$ y $\overline{CD} = 0{,}9$; (c) $\overline{AB} = 0{,}75$ y $\overline{CD} = 1{,}25$

Actividad 3

(1) Representa, en cada caso, cada pareja de segmentos considerando como unidad el siguiente segmento: $\vdash\!\!\!\text{———————}\!\!\!\dashv$

(a) $\overline{AB} = \frac{5}{4}$ y $\overline{CD} = \frac{1}{4}$; (b) $\overline{AB} = \frac{4}{2}$ y $\overline{CD} = \frac{6}{2}$; (c) $\overline{AB} = \frac{6}{4}$ y $\overline{CD} = \frac{8}{2}$

(2) Halla en cada caso, si es posible, el diámetro del átomo mayor que entra una cantidad entera de veces en cada pareja de segmentos y la razón entre las medidas de ambos.

En las actividades anteriores es posible encontrar un átomo que entre una cantidad entera de veces en cada pareja de segmentos, en otras palabras, los segmentos de cada pareja son conmensurables. La insistencia con que se presenta el tema en dichas actividades tiene como objetivo generar la convicción en los estudiantes de que dos segmentos cualesquiera son siempre conmensurables (acorde al pensamiento pitagórico) y que la razón entre las medidas de ambos es un cociente entre números enteros.

A continuación se les presenta a los estudiantes (utilizando proyector) lo que corresponde a la parte introductoria de la actividad siguiente (parte a), para que puedan visualizar, paso a paso, cómo realizar con GeoGebra las construcciones requeridas en una interpretación geométrica del método de Euclides para hallar el máximo común divisor entre dos enteros positivos. También permitirá, dados dos segmentos conmensurables cualesquiera, encontrar el diámetro del átomo mayor que entra una cantidad entera de veces en ambos. Esta actividad fue pensada para ser realizada utilizando computadora o celular con conexión a Internet.

Actividad 4

(a) Sigamos investigando sobre los segmentos conmensurables y cómo hallar el diámetro del átomo mayor, para lo cual utilizaremos una interpretación geométrica del método presentado por Euclides en el Libro VII de *Los Elementos.*

Consideremos dos segmentos de medidas 6 y 8 (las medidas están expresadas en centímetros). Para hallar el diámetro del átomo mayor se comienza por construir un rectángulo de dimensiones 6 y 8, y se siguen los siguientes pasos:

1. Se transporta el ancho sobre el largo la cantidad de veces que sea posible (en este caso una sola vez). Queda determinado en nuestro ejemplo un cuadrado de lado 6 y un rectángulo de largo 6 y ancho 2. (Ver figura 3).

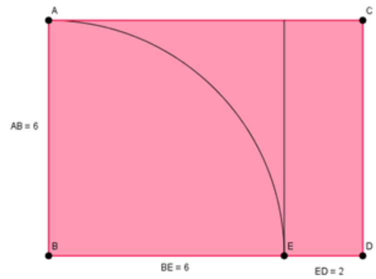

Figura 3. Paso 1

2. Luego se repite el procedimiento considerando ahora el rectángulo de dimensiones 2 y 6: se transporta el ancho sobre el largo la cantidad de veces que sea posible. De esta forma se obtienen tres cuadrados de lado 2 (ver figura 4). Por lo tanto, es posible recubrir el rectángulo original con cuadrados cuyos lados miden 2, lo que nos permite afirmar que el átomo mayor, que entra una cantidad exacta de veces en los segmentos de medidas 6 y 8, es el que tiene diámetro 2.

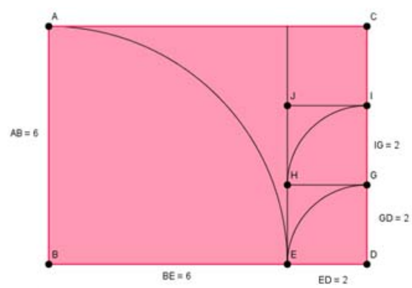

Figura 4. Paso 2

(b) A continuación te proponemos realizar tres actividades. Para acceder a los archivos de GeoGebra correspondientes a cada una de ellas puedes seguir los enlaces que aparecen a continuación o usar los códigos QR:

Geo 1: https://www.geogebra.org/o/KZtMfwqh

Geo 2: https://www.geogebra.org/o/XWDpuHqv

Geo 3: https://www.geogebra.org/o/TEzXe3zv

En cada caso, halla si es posible, utilizando el método de Euclides, el diámetro del átomo mayor que entra una cantidad entera de veces en los segmentos correspondientes a los lados del rectángulo (solo debes encontrar el segmento correspondiente a este diámetro, no su medida). Recuerda que ante la duda de si has encontrado el cuadrado que recubriría el rectángulo original, puedes utilizar la herramienta “Aproximar”.

Para los rectángulos que aparecen en los archivos Geo 1 y Geo 2 es posible encontrar un cuadrado que recubra a cada uno, en otras palabras, los lados de los rectángulos de los dos primeros archivos son conmensurables. El rectángulo que aparece en el archivo Geo 3 tiene dimensiones 1 y $\sqrt{2}$ (las dimensiones no aparecen visibles para que los estudiantes puedan conjeturar, en la actividad siguiente, por qué no es posible encontrar un átomo que entre una cantidad entera de veces en los lados del rectángulo), por lo que no es posible encontrar un cuadrado que lo recubra (utilizando la herramienta “Aproximar” los estudiantes podrán apreciar que se podría aplicar el procedimiento indefinidamente).

La actividad siguiente tiene por objetivo analizar más detenidamente los lados del rectángulo que aparece en el archivo Geo 3.

Actividad 5

Teniendo en cuenta el rectángulo que aparece en el archivo Geo 3, responde:

(a) ¿Has podido encontrar un átomo que entre una cantidad entera de veces en los segmentos correspondientes a los lados del rectángulo? ¿Cuál será el motivo?

(b) ¿Será posible expresar la razón entre las medidas de los lados del rectángulo como el cociente entre dos números enteros?

(c) Sabiendo que el rectángulo tiene las siguientes dimensiones: el ancho mide 1 (en centímetros) y el largo es igual a la diagonal de un cuadrado de lado 1 (en centímetros), ¿cuánto mide el largo del rectángulo?

A partir de las dos actividades anteriores se podrá establecer que: (1) los segmentos de medidas 1 y $\sqrt{2}$ no son conmensurables (debido a la imposibilidad de encontrar un átomo que entre una cantidad entera de veces en ambos), (2) a segmentos como estos se los llama *inconmensurables*, y (3) a los números como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como la razón entre dos números enteros (ya que si fuera posible, los segmentos de medidas 1 y $\sqrt{2}$ serían conmensurables) se los llama *números irracionales*.

Reflexiones finales

La secuencia de actividades que presentamos en este artículo busca, en una primera instancia, generar en los estudiantes la convicción de que los números racionales son suficientes para comparar dos segmentos cualesquiera, situándolos así en una concepción pitagórica sobre la conmensurabilidad. Luego se les presenta dos segmentos inconmensurables para que, a través de una interpretación geométrica del método de Euclides, se enfrenten al hecho de que no es posible encontrar un átomo que entre una cantidad entera de veces en ambos segmentos, lo cual da lugar a los segmentos inconmensurables y a la aparición de los números irracionales.

Esta secuencia de actividades busca recrear la historia para que sea vivida por los estudiantes, trascendiendo el mero relato: la historia de la matemática fue utilizada como una guía para la elaboración de actividades, atendiendo, en alguna medida, la complejidad histórica del concepto en cuestión.

Referencias bibliográficas

Dalcín, M. y Olave, M. (2012). *Gente en obra. Historia interactiva de los orígenes de la matemática.* Montevideo: Ediciones Palíndromo.

Gil, D. y de Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. España: Popular S. A.

Kline, M. (2000). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo veintiuno editores.

Montesinos Sirera, J. (2007). *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Síntesis.

Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta. Repensar la reforma. Reformar el pensamiento*. Buenos Aires: Nueva visión.

Reina, L., Wilhelmi, M. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional: Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación matemática*, *24*(3), 67-97.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C., Isoda, M., Lit, C., Niss, M.,... Siu, M. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En J. Fauvel y J. van Maanen (eds.), *History in mathematics education* (pp. 201-240). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.