Rey, M. (2016). La camiseta de Luis Suárez: un recorrido de estudio e investigación para la enseñanza en el nivel medio. *Reloj de agua*, 13, 5-20.

La camiseta de Luis Suárez: un recorrido de estudio e investigación para la enseñanza en el nivel medio

Mariela Rey[1]

RESUMEN

Este artículo reporta la experimentación de un recorrido de estudio e investigación (REI) en un curso de tercer año de bachillerato. En este se intenta, mediante la modelización funcional, proponer una experiencia de trabajo en el aula en la que se modifiquen tanto las reglas usuales del contrato didáctico como el vínculo de los estudiantes con los contenidos habitualmente presentes en la matemática escolar, para pasar a una corresponsabilidad entre profesor y alumnos en la toma de decisiones y una ruptura con los compartimentos estancos de la desarticulación de la matemática escolar, respectivamente, en consonancia con el paradigma emergente del cuestionamiento del mundo.

PALABRAS CLAVE: REI, modelización, cuestionamiento del mundo.

ABSTRACT

This article reports the testing of a study and research path (SRP) in a third-year course of high school. Through functional modeling, we propose an experience in the classroom in which both the usual rules of the didactic contract and the relationship between students and the contents usually present in school mathematics, are modified to move to a shared responsibility between teacher and students in decision-making and a break with the separated compartments of the disarticulation of school mathematics, respectively, in consonance with the emerging paradigm of questioning the world.

KEYWORDS: SRP, modeling, questioning the world.

INTRODUCCIÓN

En la experiencia de formación de profesores de matemática, cada vez más, aunque de manera aún sigilosa, nos encontramos con que los futuros profesores formulan preguntas del tipo ¿por qué las metodologías de trabajo en las clases de matemática del profesorado son tan divergentes con las metodologías sugeridas a partir de los estudios en las clases de didáctica de la matemática? En el doble

[1] Profesora de Matemática, egresada del Instituto de Profesores Artigas. Se desempeña como profesora de Análisis I y Didáctica I en el CFE y como profesora de Matemática en el CES.

rol de trabajar en clases de didáctica de la matemática y en clases de matemática, en una institución que yuxtapone la matemática y la didáctica, esa pregunta se puede analizar como un reclamo implícito de hasta cuándo. Las clases de matemática, al decir de los futuros profesores, no les dan respuesta de cómo tratar tal o cual tema en las clases de enseñanza media. Las clases de didáctica no son suficientes para romper con los modelos de enseñanza que el futuro profesor hereda, a partir de sus vivencias como alumno desde la educación primaria a la formación como profesor. En un principio de respuesta a este reclamo y como tema de tesis para la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa (CICATA-IPN, México) se desarrolló una investigación desde la que se propone responder cómo comenzar procesos de estudio en un programa de formación de profesores de matemática que puedan ir en la dirección de superar esas dicotomías, comenzando por una propuesta didáctica, particularísima, para el tratamiento de cómo enseñar las derivadas, en un curso de Análisis I del Instituto de Profesores Artigas (IPA). Esta propuesta tuvo como motivación inicial el contacto con los procesos de estudio que en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico se denominan recorridos de estudio e investigación (REI). La primera experimentación de los mismos se desarrolló durante el año 2014 en un grupo de tercer año de bachillerato de la diversificación físico-matemática, en un colegio privado de Montevideo. Bajo el título de La camiseta de Luis Suárez, se desarrolló un REI que mediante la modelización funcional ubicaba a los estudiantes en posición de predecir comportamientos de una variable y de decidir qué parámetros les permitirían tomar las mejores decisiones, según los criterios que ellos mismos debían diseñar y explicitar. Por razones de extensión, en este artículo reportaremos solamente esa primera experimentación con alumnos de secundaria.

Veamos a continuación una brevísima revisión de algunos elementos de la teoría antropológica de lo didáctico presentes en este artículo.

ALGUNOS ELEMENTOS DE LA TEORÍA ANTROPÓLOGICA DE LO DIDÁCTICO

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), provee de un modelo para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional. En Castela y Romo (2011, p. 85) se plantea la siguiente definición de institución:

> Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia.

Las actividades humanas pueden ser analizadas mediante la noción de praxeología. Desde la TAD se propone que cualquier actividad humana puede ser modelada considerando dos bloques: práctico (praxis) y teórico (logos). La *praxis* corresponde al “saber hacer” y se compone de dos elementos: los tipos de tareas (*T*) y las correspondientes técnicas (τ) , o maneras de resolver dichas tareas. El *logos* corresponde al *saber* y se compone de la tecnología (θ) y de la teoría (Θ), entendiéndose por la primera el discurso que explica, produce y justifica las técnicas y por la segunda el discurso más general que explica, produce y justifica las tecnologías. En resumen, se postula desde la TAD que cualquier actividad humana puede ser modelada por praxeologías, en particular, la matemática, tanto en su fase de producción como en su fase de estudio.

En los últimos treinta y cinco años, diversos autores han considerado los procesos de modelización como un aporte para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. La noción de modelización, tradicionalmente se ha entendido como una respuesta matemática a problemas de contexto extra-matemático, mediante la aplicación del ciclo de modelización (Blum y Niss, 1991) que se esquematiza en la siguiente figura, tomada de Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006).

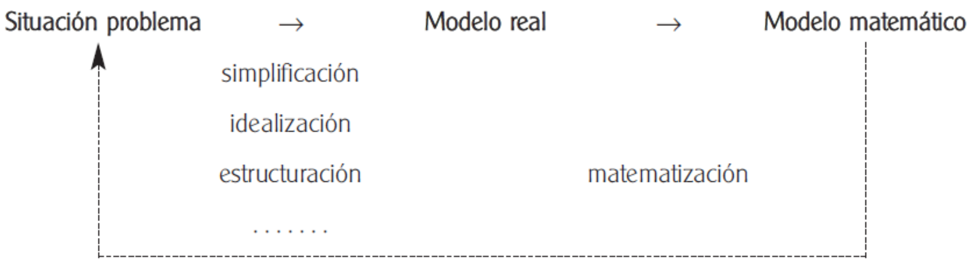

Fig. 1. Ciclo de modelización. Fuente: Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006)

El problema de la modelización, desde esta mirada, asume la transparencia tanto de las características de las "situaciones reales" a ser modeladas como de los procesos cognitivos implicados en el propio proceso de modelización. Unos años más tarde, el propio Niss (1999; p. 21) plantearía las limitaciones del ciclo de modelización aplicado a la enseñanza: "no hay una asociación causa-efecto inmediata entre los conocimientos matemáticos teóricos y la habilidad de resolver problemas matemáticos no rutinarios".

En el desarrollo posterior del trabajo con los procesos de modelización en el aula, se fueron incorporando los cuestionamientos a los problemas "del mundo real" a ser elegidos para modelizar así como las implicancias de los procesos cognitivos involucrados al realizar un proceso de modelización. En base a la incorporación de estos últimos, Blum (2005) reformula el ciclo de modelización como sigue:

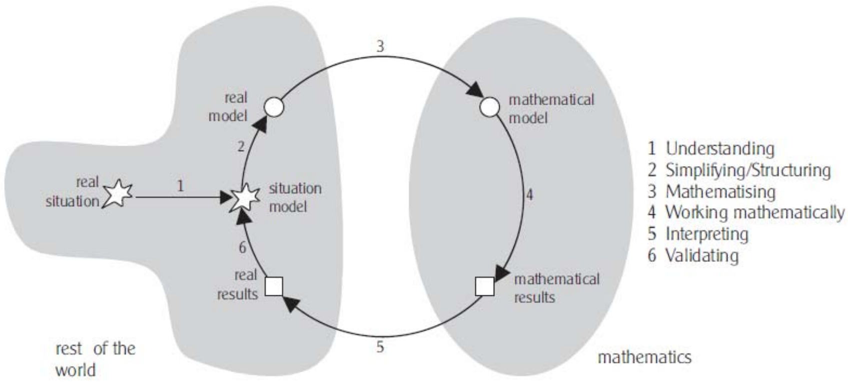

Fig. 2. Reformulación del ciclo de modelización. Fuente: Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006)

Ahora bien, ¿cómo reformula la TAD el problema de la modelización en la matemática? La TAD se ubica dentro del Programa Epistemológico y este postula la problematización del modelo epistemológico de la matemática. Esto implica que ya no solo se incorporan los cuestionamientos a la transparencia del proceso de modelación, los problemas a modelar o los procesos cognitivos involucrados en el proceso de modelación, sino que, al considerarse toda la matemática como una actividad de modelización, pasan a estar en cuestión también los propios conocimientos matemáticos. Por lo tanto, para la TAD, la pregunta vinculada al problema de la modelización pasa a ser ¿qué praxeologías se deben reconstruir y articular para generar cuestionamientos a las razones de ser de las organizaciones matemáticas?

> El punto de partida relevante para el diseño de un proceso de estudio no debería ser el carácter más o menos real de las cuestiones iniciales, sino la posibilidad que éstas ofrezcan para crear un complejo articulado e integrado de organizaciones matemáticas que permita el desarrollo de una actividad matemática amplia en una determinada institución escolar y que tenga en cuenta las restricciones y condiciones impuestas por esta institución. (Bosch et al, 2006, p. 49)

Esta visión del problema de la modelización implica la superación de explicarlo en términos de ciclo de modelización, para hacerlo desde la concepción de praxeología, sus niveles de complejidad y la articulación de las mismas. Esto no presupone una ruptura con el resto de los tratamientos del problema de la modelización, sino una ampliación del mismo y de su alcance. En lugar de ocupar un campo particular dentro de la investigación, desde la TAD, los problemas de modelización son el centro de cualquier problema matemático y por lo tanto se encuentran presentes en cualquier investigación.

Visita de monumentos versus cuestionamiento del mundo

Desde el paradigma dominante en la enseñanza matemática actual, al decir de Chevallard (2013) la *visita de monumentos*, la función de la educación matemática en cualquier nivel escolar, pero con gran énfasis en el nivel secundario, es la de proponer a los estudiantes un paseo por las obras matemáticas ya construidas y seleccionadas por un grupo de expertos, con el fin de reconocer esas obras para compartir la admiración por ellas. Es así que desde esta visión se establece como objetivo de la formación de los profesores de matemática la necesidad de que estos conozcan estas obras relevantes en profundidad y a su vez de que dispongan de buenas condiciones comunicativas para transmitirlas a sus estudiantes. En toda esta secuencia que va desde qué se debe enseñar a cómo se debe hacer, no aparecen cuestionamientos a los motivos por los que se seleccionan y cómo se secuencian tales o cuales contenidos cuyo conocimiento se considera imprescindible para toda una generación o más (dependiendo de la duración en el tiempo de los programas vigentes). ¿Por qué se enseña el arco capaz y no se enseña el desarrollo del binomio de Newton en la educación secundaria en Uruguay? ¿Por qué las derivadas aparecen en los programas curriculares por primera y única vez en el último año del bachillerato, y solo en algunas especialidades? Estas y otras tantas cuestiones no son formuladas por los profesores como institución; se aceptan como transparentes y se adecua tácitamente a ellas todo el trabajo de enseñanza. El acuerdo de silencio implícito en el contrato didáctico tiene tal fuerza, que en general, los considerados buenos estudiantes, no cuestionan el porqué de aprender tales o cuales conceptos, dejando en solitario las débiles protestas individuales de los no tan buenos estudiantes.

Tampoco aparecen cuestionamientos a la eficacia de este tipo de enfoque, si el objetivo a cumplir es que los estudiantes aprendan matemática: ¿cuántas veces como docentes nos enfrentamos a que año tras año los estudiantes parecen no haber aprendido nada sobre determinados conceptos recurrentes en los programas curriculares como el de función (a manera de ejemplo)? La solución que se propone desde la *visita de monumentos* es que el profesor debe revisitar los monumentos, observarlos más detalladamente y proponer una mejor descripción de los mismos. Con eso se asume que los alumnos los conocerán mejor. De esta manera, se transfiere toda la responsabilidad de determinar qué se puede hacer para mejorar la educación matemática a las habilidades comunicativas del profesor en solitario, transformando la tarea de los docentes en un perverso juego de culpas cada vez que no se logra que un estudiante dé una buena descripción del monumento en cuestión.

Pero hay otro cuestionamiento histórico, sociológico y hasta político a este paradigma, formulado por Chevallard (2013), que lo ubica en relación a sistemas de organización social y estatal previos a las concepciones actuales de las democracias. La relación de poder entre profesores y estudiantes que se establece en el paradigma de la *visita de monumentos* es vertical: el profesor tiene el poder del conocimiento y el alumno tiene la debilidad de la ignorancia. Una réplica en el micro mundo de la clase de las relaciones de poder entre los gobernantes y los gobernados de las sociedades no democráticas o con democracias débiles. En las sociedades democráticas actuales, en las que se defienden los valores de la participación y corresponsabilidad en la toma de decisiones que nos atañen a todos, parece por lo menos arcaico que en el ámbito de la educación las relaciones de poder ignoren estos principios.

En respuesta a este paradigma vigente (pero en decadencia) sobre la educación, y a partir de los postulados de la TAD, Chevallard (2013) propone un paradigma didáctico en construcción: el *paradigma del cuestionamiento del mundo*. Postula como principios básicos de este paradigma que la educación debe tender a formar ciudadanos herbartianos, procognitivos y exotéricos. Herbartianos (en homenaje a Johann Heinrich Herbart, creador de la Pedagogía) en el sentido de que el motor que los mueve para aprender es la "actitud receptiva hacia el planteamiento de preguntas sin respuesta y problemas sin resolver" (Chevallard, 2013, p. 168); procognitivos en el sentido de propender al conocimiento que está por construirse y no a la revisión del conocimiento del que se dispone; exotéricos en oposición a esotéricos, entendiendo esto último como conocedores por completo de los conocimientos disponibles sobre una disciplina. En ese sentido, exotéricos como inmersos en un proceso indefinido de estudio en el que siempre hay lugar para construir conocimiento sobre una disciplina.

Recorridos de Estudio e Investigación

Para que los postulados anteriores, acerca de lo que es deseable que la educación provea a los individuos, sean realizables, es deseable contar con un proceso de estudio, fundado en la teoría de respaldo (en este caso la TAD) que provea un marco desde el cual idear las acciones a llevar adelante.

Desde la TAD se propone un dispositivo didáctico que analiza las actividades de modelización en términos de cuestiones y de respuestas: los recorridos de estudio e investigación. Este proceso de estudio, desarrollado en Chevallard (2004), aparece como respuesta a las miradas formalistas y monumentalistas de la educación. Desde estas miradas, la construcción del conocimiento tiene su esencia en replicar los procesos ya desarrollados, en el primer caso, y reconocer un conocimiento ya terminado, en el segundo. De esta manera, se dejan de lado las preguntas que llevaron a la humanidad a construir respuestas, privilegiando los saberes involucrados para crear las respuestas. Así, la enseñanza, en particular la enseñanza matemática, es un vehículo de saberes ahistóricos en el sentido de atemporales y despojados de los avatares que las diferentes generaciones atravesaron para lograr su reconstrucción provisoria y actual. En cambio, en coherencia con la formulación del contraparadigma *cuestionamiento del mundo*, Chevallard (2004) propone la *funcionalidad* de los procesos de estudio. Es decir, rescatar las cuestiones y sus respuestas como motor que genera los procesos de estudio. De este modo, los saberes adquieren sentido en tanto pueden proveer de respuestas a cuestiones fecundas. De ahí que se irá en la búsqueda de los saberes en tanto sean funcionales a dar una respuesta a la cuestión que dio origen al proceso de estudio. La articulación de estas cuestiones y sus respuestas, que a su vez generan nuevas cuestiones y nuevas respuestas, es entonces lo que conocemos como recorridos de estudio e investigación (REI).

LOS REI COMO PROFESORA EN ACCIÓN

La actividad La camiseta de Luis Suárez fue implementada con un grupo que tenía a mi cargo durante el año 2014 y como parte del trabajo práctico del curso de Maestría al que hice referencia en un apartado anterior. He aquí la actividad tal y como fue propuesta a los estudiantes de secundaria.

Actividad: La camiseta de Luis Suárez

La empresa Nike es la encargada de proporcionar al Fútbol Club Barcelona de la indumentaria deportiva, tanto para sus prácticas habituales como para sus presentaciones oficiales.

Fig. 3. Presentación de Luis Suárez en el FC Barcelona. Fuente: CNN

Nike está interesada en saber cómo evolucionarán las ventas de la camiseta número nueve (la de Luis Suárez), en la ciudad de Barcelona, en los meses siguientes a su primera actuación oficial en el clásico frente al Real Madrid, el pasado 25 de octubre de 2014.

La empresa nos ha proporcionado los datos de ventas semanales de dicha camiseta, en todas las tiendas que posee en Barcelona, desde el 9 de agosto de 2014. Los mismos se recogen en la siguiente tabla:

Semana	**1** 9/8	**2** 16/8	**3** 23/8	**4** 30/8	**5** 6/9	**6** 13/9	**7** 20/9	**8** 27/9	**9** 4/10	**10** 11/10	**11** 18/10
Camisetas N° 9 vendidas	120	125	124	133	128	187	204	253	297	450	500

1) Representen en GeoGebra los datos de la tabla anterior, tomando como abscisa las semanas y como ordenada la cantidad de camisetas.

2) Utilicen dos parámetros a y b para representar la familia de rectas de ecuación $y = ax + b$.

a) ¿Para algún valor de a y/o b la recta de la familia contiene a todos los puntos que representaron en la 1? ¿Por qué?

b) Elijan una recta que les parezca es la que pasa lo más cerca posible de todos los puntos. Relaten cómo la eligieron y describan qué diferencias de ordenadas hay entre los puntos del gráfico de la recta y los puntos representados originalmente, para cada valor de la abscisa.

c) Según la recta que eligieron, ¿cuántas camisetas venderá Nike en la semana previa a la Navidad de 2014?

3) Realicen las mismas tareas que se les solicitaron en la parte 2), pero para una familia de parábolas de imagen $g(x) = cx^2 + dx + j$.

4) Realicen las mismas tareas que se les solicitaron en la parte 2), pero para una familia de funciones exponenciales de imagen $h(x) = \alpha \, \mathrm{e}^{\beta x}$, en donde e es el número de Euler conocido por ustedes.

5) a) Si fueran los dueños de Nike, ¿cuál curva de las que seleccionaron anteriormente les gustaría que representara la cantidad de camisetas vendidas en la semana previa a la Navidad? ¿Por qué?

b) Un equipo de otro grupo, cuando realizó esta actividad, probó también usando familias de funciones polinómicas de tercer grado. Dijeron que si ellos fueran el dueño de Nike, elegirían esa curva. ¿Están de acuerdo con ellos? ¿Por qué?

c) Si ahora además tienen en cuenta que la población de Barcelona es de alrededor de 1620000 habitantes, ¿eligen la misma curva que en la parte a)? ¿Por qué?

ANÁLISIS DE LA EXPERIMENTACIÓN

De los siete estudiantes que participaron en la actividad, tres eran muy buenos estudiantes, dos tenían un buen rendimiento y dos un desempeño regular. La actividad estaba pensada para realizarse en parejas pero como eran siete estudiantes, se armaron tres grupos: dos grupos de dos estudiantes y uno de tres. La forma de armar los grupos fue elegida por ellos y quedaron distribuidos de manera que cada uno de los muy buenos estudiantes quedaron en grupos diferentes, es decir los grupos tenían composiciones parejas en cuanto a que en los tres había muy buenos estudiantes y estudiantes buenos o regulares. Como veremos luego, esto tuvo influencia determinante en la riqueza y en la diversidad de aportes de los distintos grupos.

El tiempo real de aplicación fue de una primera sesión de ochenta minutos y una segunda de sesenta minutos, es decir dos horas y veinte minutos en total.

En lo previo había considerado que mis intervenciones comenzaran con el planteo al grupo del problema de realizar una previsión de ventas de un tipo de camisetas, para lo cual les proporcionaría los distintos tipos de familias de funciones con los que los estudiantes trabajarían. Una vez que cada grupo eligiera una curva particular de la familia, se debatiría en general sobre los porqués de la selección y cuál consideraban mejor.

Después del trabajo con los tres tipos de familias y sus posteriores debates, se trabajaría en devolverle al modelo matemático su dosis de realidad al contrastarlo con el problema original. En todo este tiempo, los estudiantes trabajarían en sus grupos y yo iría recorriendo el salón para detectar hallazgos o dificultades de los estudiantes, de manera que en los debates posteriores pudiera mediar entre los diferentes equipos. Las dificultades esperadas eran: 1) que los estudiantes demandaran una necesidad de guía excesiva al enfrentarse a un tipo de tarea que les es prácticamente desconocida (el modelado matemático) y les podía generar mucha inseguridad, 2) escasez de tiempo para resolver las distintas tareas. Si aparecía la primera dificultad pensaba resolverla devolviéndoles a los estudiantes la pregunta con la consigna de que se trataba de una tarea en que las decisiones eran de ellos y que no iba a ser yo quien las validara o refutara sino el grupo entero a partir de una discusión y una argumentación compartida. Para la segunda dificultad simplemente había previsto proporcionarles el tiempo que necesitaran.

Los estudiantes que realizaron esta actividad estaban habituados a trabajar con familias de funciones polinómicas en general, pero particularmente con las de primer grado, las cuadráticas y las cúbicas. También tenían buen dominio de trabajo con funciones potenciales, exponenciales y logarítmicas. Conocían las funciones trigonométricas elementales aunque estaban habituados a usarlas en un formato más algebraico que gráfico. En la tarea se proponía un trabajo con las primeras familias de funciones mencionadas. No estaba previsto trabajar con indicadores estadísticos para validar la elección de la curva que se les solicitaba, pues no tenían conocimientos previos ni de lo más elemental de estadística. Se esperaba que los estudiantes construyeran una forma de validar la selección de los modelos en base a criterios que ellos decidieran y justificaran. La dificultad prevista era, precisamente, cómo construirían algún tipo de indicador para seleccionar la curva particular para cada familia. De no surgir ninguna idea por parte de los estudiantes, se les sugeriría tener en cuenta el cálculo de error realizado para cada punto e intentar definir un criterio general a partir de los errores puntuales. Un análisis de la implementación se presenta a continuación.

ORGANIZACIÓN DE LOS EQUIPOS Y ROLES DE SUS INTEGRANTES

La primera sesión comenzó con los estudiantes separándose en tres grupos: (1) E1, E2 y E3, (2) E4 y E5, (3) E6 y E7. Una vez que les presenté la actividad de previsión de ventas de la camiseta número nueve del FC Barcelona comenzaron a organizarse para la tarea. Les dije que cada equipo debía tener un secretario pues, en las puestas en común, cada equipo debía copiar los datos en la pizarra para la discusión general. Así que en cada grupo un estudiante predominantemente manejaba la PC y otro tomaba notas de los resultados y escribía las respuestas a las preguntas. En el grupo de tres integrantes los dos estudiantes, E2 y E3, se alternaban en el uso de la PC y la estudiante, E1, obraba de secretaria (comentario aparte: las cuestiones de discriminación de género aparecen inevitable y lamentablemente…).

En el trabajo con la familia de funciones de primer grado hubo discusiones muy ricas y llevó un tiempo considerable para que los estudiantes se pusieran de acuerdo en cómo seleccionar la mejor recta. De hecho los ochenta minutos de la primera sesión se fueron solo en esa parte, esto me hizo temer que el tiempo que teníamos al día siguiente no iba a ser suficiente para lo que restaba del trabajo.

Debo aclarar que el trabajo con GeoGebra, en particular los deslizadores, no presentó ninguna dificultad para los estudiantes pues trabajaban con este programa graficando funciones y usando deslizadores desde el comienzo del curso (ocho meses antes).

GESTIÓN DEL REI Y SU COMPLEJIDAD ANTE DIFERENTES ACTITUDES ESTUDIANTILES

El trabajo realizado por los estudiantes en torno a la familia de funciones polinómicas de primer grado fue extendido a las otras familias de funciones, cuadráticas y cúbicas, como se ilustra a continuación.

Grupo (1): lo primero que me llamó la atención en la discusión de este grupo fue que se tomaron un tiempo especial para elegir qué rango de variación le daban a los deslizadores. Discutieron qué rango de valores era más conveniente para la pendiente de la recta y qué rango para la imagen de cero, con mucha minuciosidad. Una vez puestos de acuerdo en ese punto pasaron a discutir cómo elegir la recta. E2 argumentaba que debían elegir la recta que pasara por la mayor cantidad de puntos. Frente a mi pregunta de por qué debían elegir esa recta su respuesta fue "*porque eso es lo que hacemos en la clase de física*". E1 decía que esa elección no le parecía conveniente porque elegida así "*podía quedar muy lejos de los otros puntos*". Proponía elegir una recta que "*más o menos pasara cerca de todos los puntos aunque no pasara por ninguno*". Los dejé en esa discusión para ir viendo en qué estaban los otros grupos y por supuesto no manifesté ninguna inclinación por ninguna de las respuestas. Cuando volví a pasar por el grupo (1), habían decidido tomar el criterio de E1 dado que E3 se había convencido de que ese era el mejor criterio, a regañadientes de E2. Debo decir que E2 es un estudiante poco afecto a cuestionar a los profesores así que si un profesor le dijo, o él entendió que le dijo, que algo se hace de una manera, él considera que no hay nada que discutir. Es un alumno al que este tipo de tarea le resulta altamente incómoda pues necesita que todo el tiempo el profesor valide lo que hace. En cambio tanto E1 como E3 son alumnos muy independientes que a lo largo de todo el año dieron señales de apropiarse de los problemas y de resolverlos. Como el clima se había tensionado en este punto, en este grupo, les propuse que trabajaran con las dos rectas posibles que estaban proponiendo y que cuando decidieran un criterio general de toda la clase, ahí podían decidir con cuál recta se quedaban. En la siguiente pasada por el grupo se habían decidido por la idea de E1 y el resto del trabajo lo hicieron con ese criterio.

Grupo (2): E4 y E5 no tuvieron problemas en acordar elegir la recta que "a ojo" pasara más cerca de todos los puntos. Tomaron un criterio para elegir los coeficientes de la ecuación de la recta que luego mantuvieron para las otras curvas: eligieron valores enteros en la variación de los deslizadores. Cuando les pregunté por qué habían tomado esa decisión su repuesta fue "*porque queda más linda*".

Es decir, primaron criterios estéticos de qué es lo que consideran números lindos, más que la mayor proximidad de la recta a los puntos.

Grupo (3): E6 y E7 tomaron un criterio similar al del grupo anterior, pero eligieron coeficientes no necesariamente enteros. Ese era su criterio la primera vez que pasé, pero en la segunda observé que lo habían cambiado. Me contaron que encontraron un botón que decía regresión lineal y que lo usaron "*a ver qué pasaba*". Les pareció que la recta que les devolvía era muy similar a la que habían elegido ellos, pero se quedaron con la que da el programa porque "*tiene que ser mejor si es la que da el programa*". Entonces les pregunté con qué criterio el programa elegiría esa recta y si bien no dieron una respuesta inmediata se quedaron pensando y propusieron una respuesta en la puesta en común. Como los otros grupos demoraban en los cálculos, y este grupo dominaba mejor la hoja de cálculo del programa, comenzó a trabajar con la familia de funciones cuadráticas antes de la puesta en común.

Veamos el registro en la pizarra de los resultados obtenidos por los tres grupos para luego seguir con el análisis de la discusión.

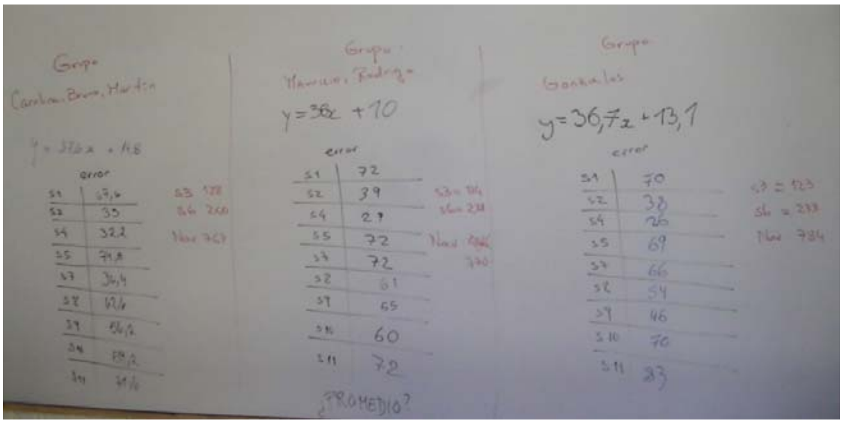

Fig. 4. Trabajo de los tres equipos en la pizarra (fotografía tomada por la autora)

Aquí los tres grupos compararon las ecuaciones elegidas, los errores en los cálculos para los datos que se daban y los que se estimaba con la recta, así como las estimaciones para las ventas de Navidad y para las semanas tres y seis (datos faltantes). Aclaro que la idea de error como diferencia de los valores estimados con los valores reales, considerada en valor absoluto, no fue tema de discusión. Simplemente lo plantearon como una idea transparente. Probablemente porque hacían uso habitualmente de esa idea de error en sus clases de Física. Todos estimaron los datos de las semanas tres y seis tomando la imagen de tres y de seis en la recta elegida. Pero frente a que las estimaciones de ventas que obtenían eran: (1) 767, (2) 770, (3) 784, la pregunta a responder pasó a ser con cuál se quedaban y por qué. La respuesta inmediata fue la que da ventas mayores. Pero enseguida E5 observó "*pero es la que cuantas más semanas tomás da error más grande*", a lo que sus compañeros no supieron qué responder. Oficiando de mediadora, les conté a los grupos (1) y (2) que el grupo (3) había encontrado una función del programa que les había elegido la recta y les pregunté cuál les parecía que sería el criterio con el que el programa la elegía. El grupo (3) propuso que podía ser calcular el promedio de los errores y como en ese momento terminó la sesión, quedó la pregunta "¿promedio?" al final de la pizarra para responder al día siguiente.

E3 faltó el segundo día pues estaba enfermo así que el grupo (1) quedó integrado por E1 y E2.

Comenzamos la clase retomando la discusión de cómo elegir cuál era la mejor recta y reafirmaron la idea del promedio. Les solicité entonces que calcularan esos promedios. Cada grupo calculó su promedio de errores y entonces seleccionaron entre todos la que daba error promedio menor.

En el trabajo con la familia de funciones cuadráticas ya no hubo indecisiones en cómo elegir la curva. Todos seleccionaron la que parecía pasar más cerca de todos los puntos y como les planteé que debían en la puesta en común elegir la mejor de las tres, ya hicieron el promedio de errores y lo presentaron como se observa en las siguientes fotos:

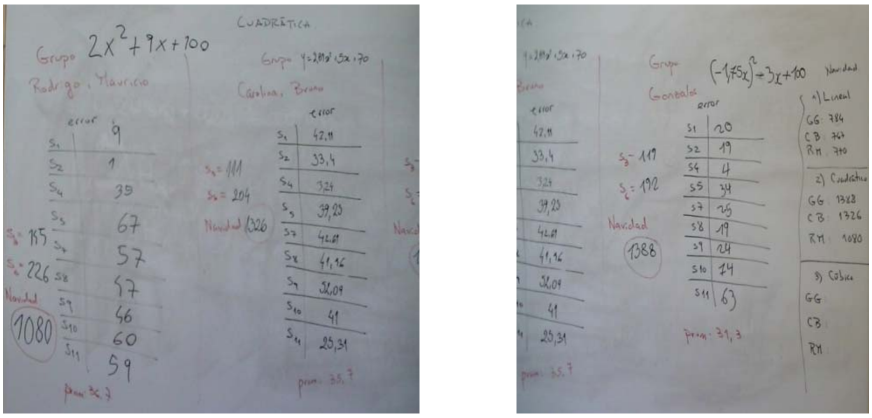

Fig. 5. Trabajo con funciones cuadráticas (fotografía tomada por la autora)

Los datos obtenidos para las ventas de Navidad fueron: (1) 1326 con error promedio 35,7 (2) 1080 con error promedio 36,7 (3) 1388 con error promedio 31,3. En forma inmediata la mayoría del grupo dijo "*hay que elegir la tercera: ¡vende más y tiene menos error!*". Pero, y aquí viene lo sorprendente para mí, E5 dijo que no le convencía. Su explicación fue la siguiente: "*la tercera vende más, tiene promedio de error más chico pero los errores están más separados, hay errores entre 4 y 74. Pero en las otras los errores están más juntos*". Y ahí, inmediatamente los demás, que entendieron su idea de la dispersión de los errores, miraron qué pasaba en cada uno de los casos: para el grupo (1) una dispersión máxima de errores de 49, para el (2) de 66 y para el (3) de 70. Entonces decidieron tomar como criterio evaluar los dos números: el error promedio y la distancia entre el error máximo y el error mínimo, eligiendo la curva que diera los dos menores. En este caso se les presentó una situación interesante porque no se minimizaban ambos para la misma curva. Eligieron la curva del grupo (2) pues tenía error promedio no mucho mayor que los otros dos pero dispersión significativamente menor. La palabra dispersión la mencioné al pasar en medio de esta conclusión y la tomaron con toda naturalidad sin necesidad de dejar por escrito una definición ya que a esta altura de la implementación estaba más que claro que la finalidad del trabajo no era la precisión matemática desde lo que ya está instituido sino la producción de los estudiantes de una o varias formas de justificar los criterios intuitivos que surgían. Como el grupo (3) trabajaba muy velozmente, mientras los demás hacían los cálculos para la función cúbica, ellos se pusieron a tratar de modelar con otro tipo de funciones. Comenzaron intentándolo con una exponencial. La idea que tenían era algo del estilo $f(x) = a^x + b$, y trataban de que b se pareciera al comportamiento de la semana uno. No les convenció mucho lo que obtenían entonces les sugerí probar con otras familias: logarítmicas y potenciales. El trabajo que hicieron con este tipo de familias no llegó a ponerse en común pues los otros dos grupos trabajaban más lentamente.

Cuando hicimos la puesta en común, surgieron algunos datos interesantes pues ahí además, se discutieron las respuestas de las tres últimas preguntas: “otro grupo experimentó con funciones cúbicas y concluyó que era lo mejor ¿estás de acuerdo?, ¿cuál función te gustaría que describiera las ventas si fueras el dueño de Nike? ¿Cuál es tu respuesta sabiendo que Barcelona tiene aproximadamente 1620000 habitantes?” Nuevamente comenzaron calculando el error promedio y la dispersión del error para decidir, pero se encontraron que la función que mejoraba esos valores daba ventas muy bajas. Inclusive menores a las cuadráticas. Esto los llevó a pensar que tenían que incorporar otros criterios que no se llegaron a definir pues no se les ocurrían ideas y yo no los quería inducir dado que ya había marcado bastante la actividad al plantear las familias de funciones para trabajar. Además no era el objetivo de la actividad dar un curso acelerado de estadística sino promover el trabajo de modelado con familias de funciones.

Una de las funciones cúbicas tenía coeficiente principal negativo pero era la que daba mejor los parámetros que habían tomado como decisores. Entonces les pregunté por cuánto tiempo más allá de la Navidad se podría vender esta camiseta. Alguno propuso dos años. Entonces les pedí que calcularan cada uno con su función cúbica cuántas camisetas se venderían a los dos años. Al grupo del coeficiente principal negativo le dio una venta menor que con la función lineal, es decir las ventas bajaban considerablemente. Aquí surgió entonces la opinión de E7: “*pero esa camiseta no la van a hacer para más de seis meses. Por eso del marketing cambian de camisetas cada vez que empieza una temporada*”. Calcularon entonces qué pasaba a los seis meses y resultaba dar la mejor venta. Entonces les pedí que calcularan hasta qué semana esa curva daba el mejor pronóstico de ventas y E4 calculó que era hasta la semana cuarenta. Se decidieron por esa curva pues llegaron a la conclusión de que para este problema el largo plazo no iba más allá de seis meses.

A todo esto estábamos en las dos horas previstas. Pero habían hecho mucho más de lo que yo esperaba y debo reconocer gratamente que con el avance del trabajo, aumentó el entusiasmo por la tarea, en lugar de disminuir.

CUESTIONES QUE PERMANECIERON SIN RESPUESTA

Quedaba por contestar la pregunta en la que debían tener en cuenta la población de la ciudad. Ahí no hicieron cálculos pero sí apareció en la discusión que no solo tenían que tener en cuenta las ventas de cada semana sino la suma de ventas totales y que ese era el número que debería decidir si era razonable las ventas previstas. El grupo (3) que había trabajado con familias de exponenciales, potenciales y logarítmicas, planteó que las exponenciales no podían ser porque estimaban unas ventas nada creíbles para una ciudad con esa cantidad de habitantes pero no se llegó a una respuesta respecto a esto.

Finalmente, como cierre de la actividad les conté que la estadística, rama de la matemática que ellos prácticamente desconocían, se ocupa de definir parámetros que ayuden a tomar las decisiones que ellos tomaron en esta actividad y que si deseaban comparar lo que habían hecho con cálculos estadísticos, podían explorar en GeoGebra las funciones ajuste lineal, polinómico, etc., tratando de investigar qué significado tienen todos los otros datos que da el programa (R, R^2, etc.) sin proporcionarles yo una explicación de qué son. Con esto terminamos la actividad (y el curso ya que solo nos restaba realizar la última evaluación).

CONCLUSIONES DE ESTA IMPLEMENTACIÓN

Observando esta implementación en retrospectiva y teniendo en cuenta elementos de la TAD, se pueden agregar conclusiones en la línea del análisis de las praxeologías construidas y reconstruidas. En la fase inicial del modelado por familias de funciones lineales, estos alumnos idearon una técnica no habitual en la clase de matemática: “mover” gráficos realizados en GeoGebra para resolver la tarea de aproximarlos a una serie de puntos. Esta técnica es nueva en el sentido de que el procedimiento es enteramente gráfico y no algebraico, considerando a la función lineal como un objeto transformable. Por más que la familia de funciones estaba expresada con un par de deslizadores, el gesto no era cambiar esos parámetros sino arrastrar el gráfico hasta lograr la posición deseada y a partir de ahí determinar los coeficientes en la expresión de primer grado. Lo habitual en las clases de matemática es una solución algebraica al problema: a partir de una expresión analítica $f(x) = ax + b$, e imponiendo condiciones como por ejemplo que la recta contenga a tal par de puntos, hallar a y b mediante la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El desarrollo de esta técnica fue posible debido al conocimiento avanzado que los estudiantes tenían del manejo de GeoGebra y al trabajo previo con gráficos en GeoGebra de familias de funciones elementales, dependientes de un parámetro. Es decir, los estudiantes ampliaron una técnica ya desarrollada en la clase.

Entre las cuestiones derivadas de la cuestión original, que aparecieron en el REI, se encontraba el definir parámetros decisores para la selección de la curva particular de cada tipo de familia de funciones. Es bien interesante cómo en el trabajo con las diferentes familias se fue ampliando la construcción de estos parámetros y ello permitió que los alumnos ampliaran la técnica empleada: del error al error promedio, de allí a la dispersión de errores y finalmente a la consideración del largo plazo apropiado. En este punto se aprecia claramente el carácter recursivo de la modelización que realizaron ya que en las sucesivas ampliaciones de la praxeología, la técnica incluía las técnicas anteriores y las completaba con nuevas técnicas. Otro aspecto interesante de esta parte del proceso: si bien los alumnos no contaban con elementos del bloque tecnológico-teórico de la matemática escolar para el tema regresión por funciones, de todos modos comenzaron un pequeño desarrollo tecnológico al respecto, tomado de su experiencia del cálculo de errores en la clase de Física. Es decir, en esta experimentación se aprecia no solo una ruptura con los compartimentos habituales de la matemática escolar sino también con los compartimentos estancos habituales entre asignaturas. Otras conclusiones adicionales de esta experimentación:

- El cambio en la distribución de tareas y responsabilidades entre profesora y alumnos, resultó favorable para que los estudiantes tomaran iniciativas, formularan conjeturas y las validaran o refutaran.
- La recursividad del proceso de modelación permitió que los estudiantes ampliaran sus técnicas de resolución de tareas generando una completación de praxeologías ya construidas.
- El hecho de que las técnicas y tecnologías utilizables en la resolución de las tareas no estuviera delimitado explícitamente provocó en los estudiantes una doble ruptura: por una parte, con la lógica en la que el profesor dice cómo hacer y el estudiante lo ejecuta para pasar a una lógica del atreverse a explorar y proponer. Por otra parte con la lógica de los compartimentos estancos dentro de la propia disciplina y con otras.
- Claramente estas implementaciones están más cerca del paradigma del *cuestionamiento del mundo* que del de *visita de obras* con las ventajas de democratización del conocimiento que ello conlleva.

REFERENCIAS

Blum, W. (2005). “Filling Up”–The Problem of Independence-preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modeling Task. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 17-21. San Feliu de Guixols.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática, 18(2),* 37-74.

Castela, C. y Romo, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(1), 79-130.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education,* 2 (2), 161-182.

Niss, M. (1999) Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 40(1), 1-24.