Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2(2): 67–73 (1995)

LA EXPANSIÓN ASINTÓTICA DE NÚCLEOS DISTRIBUCIONAL

Carlos Manuel Ulate Ramírez[1]

Resumen

Este artículo utiliza la técnica de expansión asintótica parcial aplicada a distribuciones de orden finito, con el fin de obtener la expansión distribucional de núcleos de la forma $f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})$, cuando $\lambda \to +\infty$ y $\mathbf{x}=\mathbf{y}$. Se introducen condiciones sobre f, que nos permite obtener la expansión de ciertas integrales de la forma $\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ cuando $\lambda \to +\infty$; y con ello generalizar los resultados obtenidos en [10, 11].

1 Introducción

En el estudio de operadores singulares [1, 2] a menudo se necesita conocer la expansión de integrales de la forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \lambda \to +\infty. \tag{1.1}$$

Recientemente Sellier [6, 7] utiliza el concepto de parte finita en el sentido de Hadamard $n \geq 2$, específicamente en el sentido de valor principal, con el fin de estudiar ciertas funciones singulares del tipo (1.1).

El siguiente análisis se basa en la expansión asintótica de momentos parcial [3, 4]

$$f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) \sim \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|\mathbf{k}|}\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})\mathbf{D}^{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{x})}{\mathbf{k}!\lambda^{|\mathbf{k}|+N}}, \text{ cuando } \lambda \to +\infty, \tag{1.2}$$

valida para algunos espacios de distribuciones sobre $\mathbb{R}^n \times V$, donde V es una variedad.

Los momentos $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) = \langle f(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\rangle$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n$, son funciones que dependen de $\mathbf{y}$.

Introduciendo los espacios de funciones prueba de orden finito y las distribuciones de orden finito sobre $\mathbb{R}^n$, obtendremos la versión distribucional de la expansión asintótica para núcleos como los considerados en (1.1).

Observe que en general no podemos poner $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ en la expansión (1.2), por ejemplo la expansión del núcleo de Fourier [3, 4]

$$e^{i\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} \sim (2\pi)^n \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{i^{|\mathbf{k}|}\mathbf{D}^{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{x})\mathbf{D}^{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{y})}{\mathbf{k}!\lambda^{|\mathbf{k}|+n}}, \text{ cuando } \lambda \to +\infty,$$

[1] Sede de Occidente, Universidad de Costa Rica

la cual es válida por ejemplo en $\mathcal{E}(I\!R^n)\,\widehat{\otimes}_\pi\,\mathcal{F}(\mathcal{E}'(I\!R^n))$. Si hacemos $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ se obtiene la expresión indefinida [9, 11] $(\mathbf{D^k}\delta(\mathbf{x}))^2$.

En lo que sigue de este trabajo usamos la notación usual de multi-índices, así por ejemplo si $\mathbf{k}\in I\!N^n$, entonces $\mathbf{k}!=k_1!\ldots k_n!$, $|\mathbf{k}|=k_1+\ldots+k_n$, $\mathbf{D^k}=\frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}}\cdots\frac{\partial^{k_n}}{\partial x_n^{k_n}}$.

De este modo los correspondientes momentos en (1.2), están definidos por
$\mu_{\mathbf{k}}(y_1,\ldots,y_n)=\langle f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n),x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{k_n}\rangle$, $\mathbf{k}\in I\!N^n$.

2 Espacio de distribuciones de orden finito

Introducimos ahora los espacios de funciones prueba y distribuciones que se utilizan en este análisis; $\mathcal{E}^m(I\!R^n)$, *el espacio de todas las funciones continuamente diferenciables de orden m ($m\in I\!N$) sobre $I\!R^n$*. El espacio dual $\mathcal{E}'^m(I\!R^n)$, *el espacio de distribuciones de soporte compacto de orden finito m.*

$\mathcal{D}^m(I\!R^n)$, el *espacio de las funciones continuamente diferenciables hasta de el orden m con soporte compacto cotenido en $I\!R^n$*, esto es las funciones ϕ para las cuales $\mathbf{D}^p\phi(x)$ existe y es continua para $|p|\le m$ y cuyo soporte compacto esta contenido en $I\!R^n$. El espacio $\mathcal{D}'^m(I\!R^n)$, *espacio de distribuciones de orden finito.*

$\mathcal{S}^m(I\!R)$, *el espacio de las funciones cuyas derivadas de orden menor o igual a m son rápidamente decrecientes*, esto es $\lim_{\mathbf{x}\to\infty}\mathbf{x^k D^j}\phi(\mathbf{x})=0$ para cada par de multi-índices $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\in I\!N^n$, $|\mathbf{j}|\le m$.

El espacio dual $\mathcal{S}'^m(I\!R^n)$ es el espacio de las distribuciones temperadas.

El espacio $\mathcal{O}^m_\gamma(I\!R^n)$, $\gamma\in I\!R$ consiste de las funciones suaves tales que $\mathbf{D^k}\phi(\mathbf{x})=\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^\gamma)$, cuando $\mathbf{x}\to\infty$ para cada $\mathbf{k}\in I\!N^n$, $|\mathbf{k}|\le m$. El espacio $\mathcal{O}^m_C(I\!R^n)$ es el límite inductivo $\lim_{\to}\mathcal{O}^m_\gamma(I\!R^n)$ cuando $\gamma\to\infty$. El espacio $\mathcal{K}^m(I\!R^n)$ consiste en las funciones suaves tal que $\mathbf{D^k}\phi(\mathbf{x})=O\left(|\mathbf{x}|^{\gamma-|\mathbf{k}|}\right)$ para algún γ y todo $\mathbf{k}\in I\!N^n$, $|\mathbf{k}|\le m$. El espacio $\mathcal{O}_M(I\!R^n)$ de funciones suaves, tal que $\mathbf{D^k}\phi(\mathbf{x})=O\left(|\mathbf{x}|^{\gamma_\mathbf{k}}\right)$ para alguna constante $\gamma_\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\in I\!N^n$.

El espacio $\mathcal{P}^m(I\!R^n)$ de las funciones suaves tales que $\mathbf{D^k}\phi(\mathbf{x})=O\left(e^{\gamma|\mathbf{x}|}\right)$ as $\mathbf{x}\to\infty$ para cada $\gamma>0$, y $\mathbf{k}\in I\!N^n$, $|\mathbf{k}|\le m$.

Para un estudio detallado de estos espacios y sus correspondientes duales, consultar [3, 4, 5]

En lo que sigue $\mathcal{A}'^m$, representa alguno de los espacios $\mathcal{A}=\mathcal{D},\ \mathcal{E},\ \mathcal{O}_C,\ \mathcal{K},\ \mathcal{P}$ o $\mathcal{S}$, dotado de la topología fuerte $\beta\left(\mathcal{A}'^m,\mathcal{A}^m\right)$; y lo denotamos por $\mathcal{A}'^m_\beta$.

3 Funciones bilineales continuas

Sea $\mathcal{A}=\mathcal{A}(I\!R^n)$ un espacio de funciones prueba sobre $I\!R^n$ y $\mathcal{A}'$ el correspondiente espacio de distribuciones, en general la función $\Phi:\mathcal{A}'\times\mathcal{B}\to\mathcal{A}'$, definida por $\Phi(T,\alpha):=\alpha T$, donde $\mathcal{B}$ *es el espacio de multiplicadores* [11] *de* $\mathcal{A}$, no es continua. Por ejemplo la función $\mathcal{D}'\times\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ no es continua [5].

La función Φ induce un operador [11] $\Delta:\mathcal{A}'\times\mathcal{B}\to\mathcal{A}'$ tal que $\Delta(T\otimes\alpha)=\alpha T$ de modo que si $\sigma(x,y)=\sum_{k=1}^m\alpha_k(\mathbf{x})T_k(\mathbf{y})$, entonces $(\Delta\sigma)(\mathbf{x})=\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Si Φ es continua, entonces Δ se extiende a un operador continuo de $\mathcal{A}' \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{B} \to \mathcal{A}'$, donde $\widehat{\otimes}_\pi$ significa la complexión del espacio $\mathcal{A}' \otimes_\pi \mathcal{B}$ provisto de la $\pi-$topología [3, 4, 8] o topología proyectiva.

La siguiente proposición nos garantiza cuando Φ es continua [5, pg. 362].

Proposición 3.1:
Sea $m \in I\!N$ entonces la función

$$\Phi : \mathcal{D}'^m_\beta(I\!R^n) \times \mathcal{E}^m(I\!R^n) \to \mathcal{D}'^m_\beta(I\!R^n) \tag{3.1}$$

definida por $\Phi(T, \alpha) := \alpha T$ es bilineal y continua.

Al ser la función (3.1) continua se sigue que el operador $\Delta : \mathcal{D}'^m_\beta(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{E}^m(I\!R^n) \to \mathcal{D}'^m_\beta(I\!R^n)$, definido por $(\Delta\sigma)(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ es continuo.

Como $\mathcal{E}'^m \hookrightarrow \mathcal{D}'^m$ y $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'^m$, se tiene que $\Phi : \mathcal{E}'^m \times \mathcal{E} \to \mathcal{D}'^m$ es continua y por lo tanto $\Delta : \mathcal{E}'^m \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{E} \to \mathcal{D}'^m$ es continuo.

De la misma manera se obtiene [11] que Δ es continuo en los espacios: $\mathcal{E}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(I\!R^n)$, $\mathcal{S}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{O}_M(I\!R^n)$, $\mathcal{O}'^m_C(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{O}_C(I\!R^n)$, $\mathcal{P}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{P}(I\!R^n)$, $\mathcal{K}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{K}(I\!R^n)$.

4 La expansión en $\mathcal{A}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(I\!R^n)$

La introducción de los espacios donde el operador Δ es lineal y continuo, nos va a permitir obtener la expansión de $f(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x})$, cuando $\lambda \to +\infty$.

Teorema 4.1:
Sea $\mathcal{A}$ uno de los espacios $\mathcal{E}$, $\mathcal{O}_C$, $\mathcal{K}$ o $\mathcal{P}$. Sea $f \in \mathcal{A}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(I\!R^n)$ para algún $m \in I\!N$. Entonces

$$f(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}\in I\!N^n} \sum_{\mathbf{j}\leq\mathbf{k}} \frac{(-1)^{|\mathbf{k}-\mathbf{j}|}\mu^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} \mathbf{D}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}}\delta(\mathbf{x})}{\mathbf{j}!(\mathbf{k}-\mathbf{j})!\lambda^{|\mathbf{k}|+n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+n+1}}\right), \quad \textit{cuando } \lambda \to +\infty, \tag{4.1}$$

donde $\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}^{\mathbf{k}}\rangle$, $\mathbf{k} \in I\!N^n$ son los momentos parciales de f y $\mu^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}}$ están dados por

$$\mu^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{D}^{\mathbf{j}}\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{0}), \tag{4.2}$$

Prueba: Si $f \in \mathcal{A}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(I\!R^n)$, entonces la expansión

$$f(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{N} \frac{(-1)^{|\mathbf{k}|}\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})\mathbf{D}^{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{x})}{\mathbf{k}!\ \lambda^{|\mathbf{k}|+n}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+n+1}}\right), \tag{4.3}$$

cuando $\lambda \to \infty$, es valida en el espacio $\mathcal{A}'^p(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{A}(I\!R^n)$ para algún $p \geq \max\{m, N\}$. Aplicando el operador Δ a (4.3) y teniendo en cuenta que

$$\mu(\mathbf{x})\mathbf{D}^{\mathbf{k}}\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{j}\leq\mathbf{k}} (-1)^{|\mathbf{j}|} \frac{\mathbf{k}!}{\mathbf{j}!(\mathbf{k}-\mathbf{j})!} \mathbf{D}^{\mathbf{j}}\mu(\mathbf{0})\mathbf{D}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}}\delta(\mathbf{x}),$$

se obtiene

$$f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}\in I\!N^n}\sum_{\mathbf{j}\leq\mathbf{k}} \frac{(-1)^{|\mathbf{k}-\mathbf{j}|}\mu_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}}\mathbf{D}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}}\delta(\mathbf{x})}{\mathbf{j}!(\mathbf{k}-\mathbf{j})!\lambda^{|\mathbf{k}|+n}}, \text{ cuando } \lambda\to+\infty \ \square$$

Ejemplo. Como ejemplo de la aplicación de este teorema consideremos el funcional

$$\Psi(\lambda) := \int_{I\!R^2} e^{-\lambda(x_1^2+x_2^2)}(x_1^2+x_2^2)\phi(x_1,x_2)dx_1dx_2, \quad \phi \in \mathcal{P}.$$

Entonces se tiene que $\Psi(\lambda) = \langle f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}),\phi(\mathbf{x})\rangle$, donde $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = e^{-|\mathbf{x}|^2}|y|^2$; entonces $f \in \mathcal{P}'^m \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{P}$ y por el teorema 4.1 sabemos que

$$f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) \sim \sum_{\mathbf{k}\in I\!N^n}\sum_{\mathbf{j}\leq\mathbf{k}} \frac{(-1)^{|\mathbf{k}-\mathbf{j}|}\mu_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}}\mathbf{D}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}}\delta(\mathbf{x})}{\mathbf{j}!(\mathbf{k}-\mathbf{j})!\lambda^{|\mathbf{k}|+n}}, \text{ cuando } \lambda\to+\infty,$$

donde los correspondientes momentos (4.2), están dados por

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}} &= \mathbf{D}^{\mathbf{j}}\left(\mu_{\mathbf{k}}(\mathbf{y})\right)_{\mathbf{y}=0} \\ &= \mathbf{D}^{\mathbf{j}}\left(|\mathbf{y}|^2\Gamma\left(\frac{2k_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k_2+1}{2}\right)\right)_{\mathbf{y}=0}, \end{aligned}$$

o bien

$$\mu_{(k_1,k_2)}^{(j_1,j_2)} = \frac{\partial^{j_1}}{\partial y_1^{j_1}}\frac{\partial^{j_2}}{\partial y_2^{j_2}}\left((y_1^2+y_2^2)\Gamma\left(\frac{2k_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2k_2+1}{2}\right)\right)_{(0,0)}, \tag{4.4}$$

si $\mathbf{k}=(k_1,k_2)$, $\mathbf{j}=(j_1,j_2)$.

Desarrollando los primeros términos $N=3$ y usando (4.4), encontramos que

$$\begin{aligned} f(\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}) &\sim \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda^4}\delta(\mathbf{x}) - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\lambda^5}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\delta(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_1}\delta(\mathbf{x})\right] \\ &- \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda^5}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\delta(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_2}\delta(\mathbf{x})\right], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) &= \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda^4}\phi(0,0) + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\lambda^5}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x_1,0) + \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(0,x_2)\right] \\ &+ \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda^5}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\phi(0,x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x_1,0)\right] + O(\lambda^{-6}), \quad \lambda\to+\infty. \end{aligned}$$

Ejemplo. Si $\phi \in \mathcal{S}(I\!R^n)$, entonces su transformada de Fourier está dada por

$$\widehat{\phi}(u) = \mathcal{F}\{\phi(\mathbf{x});\mathbf{u}\} = \int_{I\!R^n}\phi(\mathbf{x})e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}}d\mathbf{x}.$$

Puesto que la transformada de Fourier es un isomorfismo [3] de $\mathcal{S}(I\!R^n)$ en $\mathcal{S}(I\!R^n)$. Teniendo en cuenta que [9]

$$\mathcal{S}(I\!R^{2n}) \hookrightarrow \mathcal{A}'^m(I\!R^n)\,\widehat{\otimes}_\pi\,\mathcal{A}(I\!R^n),$$

por ejemplo para $\mathcal{A} = \mathcal{O}_C$. Se sigue que la expansión (4.1) es valida en $\mathcal{S}(I\!R^{2n})$ y por lo tanto $\widehat{\phi}$, admite la expansión

$$\widehat{\phi}(\lambda\mathbf{u},\mathbf{u}) \sim \sum_{\mathbf{k}\in I\!N^n}\sum_{\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \frac{(-1)^{|\mathbf{k}-\mathbf{j}|}\mu_{\mathbf{k}}^{\mathbf{j}}\mathbf{D}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}}\delta(\mathbf{u})}{\mathbf{j}!(\mathbf{k}-\mathbf{j})!\lambda^{|\mathbf{k}|+n}}, \text{ cuando } \lambda\to+\infty.$$

Ejemplo. Consideremos la siguiente función generalizada

$$\Phi(\epsilon) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\sin\left(\frac{\epsilon}{n^2}\right)\delta\left(x-\frac{\epsilon}{n}\right), \; p>1, \; \epsilon\to 0^+.$$

Es fácil ver que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(q)}(y)\right|$ converge para todo $q=0,1,\ldots$, donde $a_n(y)=n^{-p}\sin\left(\frac{y}{n}\right)$. Además el núcleo $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\sin\left(\frac{y}{n}\right)\delta\left(x-\frac{1}{n}\right) \in \mathcal{E}'^m(I\!R^n)\,\widehat{\otimes}_\pi\,\mathcal{E}(I\!R^n),\ m=0$.

Por el teorema 4.1, obtenemos

$$\Phi(\epsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}\mu_k^j\mathbf{D}^{k-j}\delta(x)}{j!(k-j)!}\epsilon^k, \text{ cuando } \epsilon\to 0^+$$

donde

$$\mu_k^j = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^{(j)}(0)}{n^k}.$$

Teniendo en cuenta que

$$a_n^{(q)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } q=2j, \quad j=1,2,\ldots \\ \frac{(-1)^{q+1}}{n^{p+q}} & \text{si } q=2j-1, \quad j=1,2,\ldots \end{cases},$$

obtenemos que

$$\Phi(\epsilon) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\lfloor\frac{1+k}{2}\rfloor}\frac{(-1)^{k-m}\zeta(p+2m+k-1)\delta^{(k+1-2m)}(x)}{(2m-1)!(k+1-2m)!}\epsilon^k, \text{ cuando } \epsilon\to 0^+,$$

donde ζ es la función zeta de Riemann y $\lfloor\ \rfloor$ significa parte entera.

En particular, si $p+2m+k-1 \in Z\!\!Z$ y es par, podemos obtener los valores de ζ a partir de [3]

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1}B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}, \tag{4.5}$$

donde los B_{2k} son los coeficientes de Bernoulli.

Si $\phi \in \mathcal{E}(I\!R)$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \sin\left(\frac{\epsilon}{n^2}\right) \phi\left(\frac{\epsilon}{n}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{1+k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{1-3m} \zeta(p+2m+k-1) \phi^{(k+1-2m)}(0)}{(2m-1)!(k+1-2m)!} \epsilon^k,$$

cuando $\epsilon \to 0^+$.

En particular si $\phi \equiv 1$ se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \sin\left(\frac{\epsilon}{n^2}\right) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \zeta(p+4j-2)}{(2j-1)!} \epsilon^{2j-1}, \quad \text{cuando } \epsilon \to 0^+$$

Si p es par, entonces del teorema 4.1 y usando (4.5) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \sin\left(\frac{\epsilon}{n^2}\right) = \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{\frac{p}{2}+3j-1} (2\pi)^{p+4j-2} B_{p+4j-2}}{2(2j-1)!(p+4j-2)!} \epsilon^{2j-1} + O\left(\epsilon^{N+2}\right),$$

cuando $\epsilon \to 0^+$.

La expansión (4.1) no es válida [3] en $\mathcal{S}'(I\!R^n)$, sin embargo si se introducen algunas condiciones se puede obetener la siguiente expansión.

Teorema 4.2: *Sea* $f \in \mathcal{S}'^m(I\!R^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{O}_M(I\!R^n)$ *con* $sop(f) \subseteq B \times I\!R$ *donde* $B = [A_1, \infty[\times \ldots \times [A_n, \infty[$, *para algunas constantes* $A_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$

Suponga

$$\mathbf{D}^{\mathbf{j}}_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} \mathbf{D}^{\mathbf{j}} \psi_i(\mathbf{y}) + O\left(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_{n+1}} \mathbf{D}^{\mathbf{j}} \psi_{n+1}(\mathbf{y})\right),$$

cuando $\mathbf{x} \to \infty$, *para* $0 \leq |\mathbf{j}| \leq N+1$, *donde* $\mathbf{a}_1 > \mathbf{a}_2 > \ldots > \mathbf{a}_{n+1}$ *y* $-(N+2) < |\mathbf{a}_{n+1}| < -(N+1)$.

Entonces

$$f(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} Pf((\lambda \mathbf{x})^{\mathbf{a}_i} H(\lambda \mathbf{x})) \psi_i(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{k} \in I\!N^n} \sum_{\mathbf{j} \leq \mathbf{k}} \frac{(-1)^{|\mathbf{k}-\mathbf{j}|} \mu^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} \mathbf{D}^{\mathbf{k}-\mathbf{j}} \delta(\mathbf{x})}{(\mathbf{k}-\mathbf{j})! \mathbf{j}! \lambda^{|\mathbf{k}|+n}} + O(\lambda^{|\mathbf{a}_{n+1}|}),$$

cuando $\lambda \to +\infty$ *en el espacio* $\mathcal{S}'$, *donde* $Pf(\mathbf{x}^{\mathbf{a}} H(\mathbf{x}))$ *es la distribución dada por la parte finita de Hadamard*

$$\langle Pf(\mathbf{x}^{\mathbf{a}} H(\mathbf{x})), \phi(\mathbf{x}) \rangle = F.p \int_{I\!R^n} \mathbf{x}^{\mathbf{a}} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

y donde $\mu^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}}$ *son los momentos generalizados*

$$\mu^{\mathbf{j}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{D}^{\mathbf{j}} \left\langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pf}(\mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} H(\mathbf{x})) \psi_i(\mathbf{y}), \mathbf{x}^{\mathbf{k}} \right\rangle_{\mathbf{y}=0}.$$

Referencias

[1] Brüning, J.; Seeley, R. (1958) "Regular Singular Asymptotics", *Advances in Mathematics* 58: 133–148.

[2] Brüning, J.; Seeley, R. (1991) "The Expansion of the Resolvent", *Journal of Functional Analysis* 95: 255–290.

[3] Estrada, R.; Kanwal, R.P. (1993) *Asymptotic Analysis: a Distributional Approach.* Birkäuser, Boston.

[4] Estrada, R.; Kanwal, R. P. (1990) "A distributional theory for asymptotic expansions", *Proc. R. Soc.Lond. A* 428: 399–430.

[5] Horváth, J. (1966) *Topological Vector Spaces and Distributions,* Vol. 1. Addison–Wesley, Reading Mass.

[6] Sellier, A. "Asymptotic expansions of a class of integrals", preprint.

[7] Sellier, A. "Hadamard's finite part concept in dimension $n \geq 2$. Distributional definition. Regularization forms and distributional derivatives", to appear in *Proc. Roy. Soc. London A.*

[8] Treves, F. (1967) *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press, New York.

[9] Ulate, C.M.; Estrada, R. "Expansion of distributional kernels of the type $f(\lambda x, x)$, as $\lambda \to \infty$", por publicarse.

[10] Ulate, C.M. (1994) "La expansión asintótica de momentos para núcleos de la forma $f(\lambda x, x)$, cuando $\lambda \to +\infty$ si $f \in \mathcal{S}'^{m}_{x}(I\!R) \widehat{\otimes}_{\pi} \mathcal{O}_{My}(I\!R)$". En: Memoria *II Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas,* I Parte, G. Mora (editor). San Ramón, Sede de Occidente U.C.R., pp. 207–215.

[11] Ulate, C. M. *Tesis de Grado para optar al título de Licenciado en Matemática*, Universidad de Costa Rica, en preparación.