Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2(2): 1–7 (1995)

VALORES PROPIOS DE DIRICHLET ASOCIADOS A LA ECUACIÓN DE HILL CON POTENCIAL DE RUIDO BLANCO

Henry P. Mckean[1] – Santiago Cambronero[2]

Resumen

Mostramos que la ecuación de Hill con potencial de "ruido blanco" tiene una sucesión λ_n de valores propios de Dirichlet que se comporta casi como en el caso clásico, en el sentido que $\lambda_n - n^2\pi^2$ posee un crecimiento logarítmico, proveniente de de una sucesión de variables gaussianas.

Abstract

We show that Hill's equation with white noise potential has a sequence of Dirichlet eigenvalues λ_n that behaves almost like in the classical case, in the sense that $\lambda_n - n^2\pi^2$ has a logarithmic growth coming from a sequence of Gaussian random variables.

Introducción

La ecuación de Hill con potencial Q, y parámetro λ, está dada por

$$-y'' + Qy = \lambda y. \tag{1}$$

Los valores propios de Dirichlet son aquellos valores de λ para los cuales existe una solución no trivial de (1) satisfaciendo

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

En el caso clásico Q es una función suave, y es sabido que (1) posee una sucesión de valores propios de Dirichlet $\lambda_o < \lambda_1 < \ldots$, tal que $\lambda_n = n^2\pi^2 + \int_o^1 Q + O(\frac{1}{n^2})$, para n grande. De hecho, la cantidad de términos en esta expansión puede incrementarse indefinidamente, dependiendo del número de derivadas que Q posea. Por ejemplo, si Q es $\mathcal{C}^2$, entonces

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \int_o^1 Q + \frac{c}{n^2} + O(\frac{1}{n^3}).$$

[1]Courant Institute of Mathematical Sciences, 251 Mercer Street, New York, NY 10012, Estados Unidos.

[2]Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

Para revisar las demostraciones de dichos resultados, así como obtener más información al respecto, el lector puede consultar [2], [3], [7], y [8].

En el presente trabajo consideramos la ecuación (1), donde el potencial Q es ruido blanco, esto es, la derivada formal de un movimiento Browniano, en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Una solución de esta ecuación es una función y de clase $\mathcal{C}^1$ que satisface la versión integral

$$-y'(x) + y'(0) + \int_0^x y(t)db(t) = \lambda \int_0^x y(t)dt,$$

donde b es el correspondiente movimiento Browniano en $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, y la integral de la izquierda se define como

$$y(x)b(x) - \int_0^x b(t)y'(t)dt.$$

La solución y con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ debe satisfacer entonces

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_o^x \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} y(t)db,$$

o equivalentemente

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \int_o^x b(t)[\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} y'(t) - \cos\sqrt{\lambda}(x-t)y(t)]dt.$$

Si iteramos esta ecuación obtenemos

$$y = y_o + y_1 + ... + y_n + R_n(x),$$

donde $y_o = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$, $\;y_{n+1} = \int_o^x \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} y_n(t)db(t)$.

Esto sugiere que definamos $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$, para lo cual trataremos de estimar $|y_n|$ y mostrar convergencia. $|y|$ denotará la norma sup de y en $[0, 1]$. Los siguientes resultados serán de gran utilidad.

Lema 1. Si $G_o \equiv a \geq 0$, y para todo $n = 0, 1, \ldots$

$$G_{n+1}(x) = 2c \int_0^x G_n(t)dt + \frac{c}{\mu} G_n(x),$$

donde $c, \mu > 0$, entonces G_n está dado por

$$G_n(x) = a(2c)^n \sum_{k=0}^{n} a(n,k) x^k \mu^{-(n-k)},$$

donde $a(n,0) = 2^{-n}$, y $a(n,k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2 2^{n-k}}$, para $k = 1, \ldots, n$.

Prueba

Basta observar que $a(n+1,k) = \frac{1}{k}a(n,k-1) + \frac{1}{2}a(n,k)$, y usar inducción en n. $\Box$

Lema 2. Supongamos que (f_n) y (g_n) satisfacen

$$0 \leq f_{n+1}(x) \leq c\int_0^x (f_n + g_n),$$

$$0 \leq g_{n+1}(x) \leq c\int_0^x (f_n + g_n) + \frac{c}{\mu} f_n(x),$$

para $n = 0, 1, \ldots$, $x \in [0,1]$, y definamos $h_n = \max(f_n, g_n)$. Entonces, para $x \in [0,1]$, y $\mu > 2c$ tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \leq 2e^{4c}|h_o|.$$

Prueba

Nótese que $h_{n+1}(x) \leq 2c\int_o^x h_n + \frac{c}{\mu}h_n(x)$. Tomando $a = |h_o|$, el lema anterior permite concluir que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} a(2c)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k!)^2 2^{n-k}\mu^{n-k}} \\
&= a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2c)^k}{(k!)^2} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(\frac{c}{\mu})^{n-k} \\
&= a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2c)^k}{k!}(1-\frac{c}{\mu})^{-(k+1)} \\
&\leq 2a\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4c)^k}{k!} = 2ae^{4c}. \ \Box
\end{aligned}$$

Es fácil mostrar que $f_n = |y_{n_o+n}|$, y $g_n = \frac{1}{\mu}|y'_{n_o+n}|$ satisfacen las hipótesis del lema 2, con $\mu = \sqrt{\lambda}$, y $c = |b|$. Como consecuencia obtenemos que

$$\sum_{n=n_o}^{\infty} |y_n| \leq 2ae^{4|b|}, \quad \sum_{n=n_o}^{\infty} |y'_n| \leq 2a\mu e^{4|b|},$$

para $\mu > 2|b|$, donde $a = \text{máx}\{|y_{n_o}|, \frac{1}{\mu}|y'_{n_o}|\}$. De la definición de y_n se sigue inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 1 *Para $\lambda > 4|b|^2$, la solución de (1), con condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, está dada por $y = \sum y_n$, donde la convergencia es uniforme en $[0,1]$. También tenemos que $y' = \sum y_n'$, uniformemente en $[0,1]$.*

Observación. El lema 2 muestra también que el orden de $|R_n|$ está dominado por el orden de $\max\{|y_n|, \frac{1}{\mu}|y_n'|\}$. O sea que si mostramos que $\max\{|y_n|, \frac{1}{\mu}|y_n'|\} = O(\mu^\alpha)$, entonces $|R_n| = O(\mu^\alpha)$. En lo que sigue vamos a usar este hecho para estimar los valores propios λ_n.

Observe que $|y_o| \leq \mu^{-1}$, y $|y_o'| \leq 1$. Por otro lado, de la definición tenemos $y_1 = \int_o^x b(t)\frac{\operatorname{sen}\mu(2t-x)}{\mu}dt = \frac{1}{\mu}Im(e^{-i\mu x}I_1(x))$, donde

$$I_1 = \int_0^x b(t)e^{2i\mu t}dt = -\int_{\frac{\pi}{2\mu}}^{x+\frac{\pi}{2\mu}} b(t - \frac{\pi}{2\mu})e^{2i\mu t}dt.$$

Si sumamos estas dos integrales, vemos que $2I_1$ es igual a

$$\int_x^{x+\frac{\pi}{2\mu}} b(t - \frac{\pi}{2\mu})e^{2i\mu t} - \int_0^{\frac{\pi}{2\mu}} b(t)e^{2i\mu t} + \int_{\frac{\pi}{2\mu}}^x [b(t - \frac{\pi}{2\mu}) - b(t)]e^{2i\mu t}.$$

Usando esta expresión, y el módulo de continuidad de $b(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \tfrac{\pi|b|}{2\mu} + \tfrac{1}{2}\max\{|b(t - \tfrac{\pi}{2\mu}) - b(t)| : \tfrac{\pi}{2\mu} \leq t \leq x\} \\ &\leq \tfrac{\pi|b|}{2}\mu^{-1} + \mu^{-1/2}(\log\mu)^{1/2} \leq 2\mu^{-1/2}(\log\mu)^{1/2}, \end{aligned}$$

para $\mu \geq \mu_o(w)$, y casi todo w.

Esto implica que $|y_1| \leq 2\mu^{-3/2}(\ln\mu)^{1/2}$, para casi todo w, donde $\mu \geq \mu_o(w)$. Similarmente tenemos que $\frac{1}{\mu}|y_1'| \leq 3\mu^{-3/2}(\ln\mu)^{1/2}$, para $\mu \geq \mu_o$.

De la observación hecha arriba se sigue que, para λ grande,

$$y(x,\lambda) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + O(\lambda^{-3/4+}),$$

y entonces $y(1,\lambda) = 0$ implica $\sqrt{\lambda} = n\pi + \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n = O(n^{-1/2+})$. Recíprocamente, para n grande, existe ε_n tal que $y(1,(n\pi + \varepsilon_n)^2) = 0$, y $\varepsilon_n = O(n^{-1/2+})$.

Los siguientes resultados nos permitirán obtener una expresión más exacta para ε_n.

Lema 3. Sea $X_n(t) = \int_o^t \cos(2n\pi u)db(u)$. Cuando $n \to \infty$ tenemos $|X_n| = O(n^{0+})$, con probabilidad 1.

PRUEBA:

Cada $X_n(t)$ es una martingala, con $EX_n^{2p}(1) \leq C_p$, para $p \geq 1$, y entonces $P(\text{máx}_{0\leq t\leq 1} |X_n(t)| \geq n^\alpha) \leq \frac{C_p}{n^{2p\alpha}}$ (ver [5], páginas 13 y 163).
Dado $\alpha > 0$, podemos escoger $p \geq 1$ tal que $2p\alpha > 1$, y entonces, por Borel–Cantelli,

$$P(\text{máx}\, |X_n(t)| \leq n^\alpha, \;\; \text{cuando} \;\; n \uparrow \infty) = 1,$$

para todo $\alpha > 0$. Como podemos restringirnos a valores racionales de α, concluimos que

$$P(\text{máx}\, |X_n(t)| = O(n^\alpha), n \uparrow \infty, \forall \alpha > 0) = 1. \;\square$$

Corolario 1. $\text{máx}_{0\leq t\leq 1} |\int_o^t b(u) \operatorname{sen}(2n\pi u) du| = O(n^{-1+})$, cuando $n \to \infty$, con probabilidad 1.

Prueba:

$\int_o^t b(u) \operatorname{sen}(2n\pi u) du = \frac{1}{2n\pi} \int_o^t \cos(2n\pi u) db - \frac{b(t)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}$. $\square$

El mismo argumento muestra el siguiente lema.

Lema 4. Sea $Z_n(t) = \int_o^t ub(u) \cos(2n\pi u) du$. Cuando $n \to \infty$ tenemos que $|Z_n| = O(n^{-1+})$, con probabilidad 1.

Observación. Resultados similares son válidos si intercambiamos los roles de seno y coseno, con obvias modificaciones.

Lema 5. Sea $X_n(t) = \int_o^t b(u) \cos(2n\pi u) c(u) du$, donde $c(\cdot)$ está dado por $c(t) = \int_o^t b(u) \operatorname{sen}(2n\pi u) du$. Cuando $n \to \infty$ tenemos que $X_n(t) = -\frac{1}{4n\pi} \int_o^t b^2(u) du + O(n^{-2+})$. Más precisamente

$$\max_{0\leq t\leq 1} |X_n(t) + \frac{1}{4n\pi} \int_o^t b^2(u) du| = O(n^{-2+}),$$

con probabilidad 1.

Prueba:

Observemos primero que $c(t) = \frac{1}{2n\pi}[e(t) - b(t)\cos 2n\pi t]$, con $e(t) = \int_o^t \cos(2n\pi u) db$, y entonces

$$E[c^{2p}(t)] \leq \frac{2^{2p}}{(2n\pi)^{2p}}[Ee^{2p}(t) + Eb^{2p}(t)] \leq \frac{C_p}{n^{2p}},$$

donde C_p es una constante que depende sólo de p. Por otro lado, como $|c| = O(n^{-1+})$, tenemos que

$$X_n(t) = \int_o^t \frac{(\cos(4n\pi u) - 1)}{4n\pi} b^2(u) du - \frac{1}{2n\pi} Y_n(t) + O(n^{-2+}),$$

donde $Y_n(t) = \int_o^t c(u) \operatorname{sen}(2n\pi u) db$ satisface $EY_n^{2p}(t) \leq \frac{\hat{C}_p}{n^{2p}}$, y por lo tanto $P[\text{máx}_{0\leq t\leq 1} |Y_n(t)| > n^\alpha] \leq \frac{1}{n^{2p\alpha}} EY_n^{2p}(1) \leq \frac{C_p}{n^{2p\alpha+2p}}$.

Por Borel–Cantelli se sigue que $|Y_n| = O(n^{-1+})$.
Similarmente tenemos que $\int_o^t \cos(4n\pi u) b^2(u) du = O(n^{-1+})$. $\square$

Volvamos ahora al problema de aproximar λ_n. Como observamos anteriormente, $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \varepsilon_n$, donde $\varepsilon_n = O(n^{-1/2+})$, y entonces $(-1)^n \sqrt{\lambda_n} y_1(1, \lambda_n)$ se puede expresar como

$$\operatorname{sen} \varepsilon_n \int_0^1 b(t) \cos(2\sqrt{\lambda_n} t) dt + \cos \varepsilon_n \int_0^1 b(t) \operatorname{sen}(2\sqrt{\lambda_n} t) dt.$$

Por el corolario 1 es fácil concluir que $\sqrt{\lambda_n} y_1(1, \lambda_n) = O(n^{-1+})$, y lo mismo es válido para $y_1'(1, \lambda_n)$. Como consecuencia $\varepsilon_n = O(n^{-1+})$.

Para obtener un mejor estimado de ε_n necesitamos acotar $y_2(1, \lambda_n)$. Usando el hecho que

$y_2 = -\int_o^x b(t)[\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} y_1'(t) - \cos\sqrt{\lambda}(x-t) y_1(t)] dt$,

se obtiene que $y_2 = A + B + C + D$, con

$A = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x}{2\sqrt{\lambda}}[(\int_o^x b(t)\cos 2\sqrt{\lambda}t dt)^2 + (\int_o^x b(t) \operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda}t)^2]$,

$B = -\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}(\int_o^x b(t)\cos 2\sqrt{\lambda}t)(\int_o^x b(t)\operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda}t)$,

$C = 2\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}[\int_o^x b(t)\cos 2\sqrt{\lambda}t dt \int_o^t b(u)\operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda}u du]$,

$D = \frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{2\lambda}\int_o^x b^2(t)dt - \frac{1}{2\lambda}\int_o^x b^2(t)\cos\sqrt{\lambda}(x-2t)dt$.

De lo anterior, y los lemas 3, 4 y 5, concluimos que $y_2(1, \lambda_n) = O(n^{-3+})$, y entonces

$$0 = (-1)^n \sqrt{\lambda_n} y(1, \lambda_n) = \varepsilon_n + \int_o^1 b(t) \operatorname{sen}(2n\pi t) dt + O(n^{-2+}),$$

esto es

$$\varepsilon_n = -\int_o^1 b(t) \operatorname{sen}(2n\pi t) dt + O(n^{-2+}) = \frac{1}{2n\pi}(b(1) - X_n) + O(n^{-2+}),$$

donde

$$X_n = \int_o^1 \cos(2n\pi t) db(t).$$

Hemos mostrado el siguiente teorema.

Teorema 2 *Los valores propios de Dirichlet asociados al operador $-\frac{d^2}{dx^2} + Q$, donde Q es ruido blanco, están dados por*

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + b(1) - \int_o^1 \cos(2n\pi t) db(t) + O(n^{-1+}),$$

para valores grandes de n, donde b es el movimiento Browniano correspondiente.

Nótese la diferencia con respecto al caso clásico (cuando Q es una función suave). Aquí obtenemos la sucesión de variables gausianas X_n, que satisface $X_n = O(n^{0+})$. De hecho, no es difícil mostrar que $\text{máx}\{|X_k| : k = 0, \ldots, n\}$ está dominado por $\sqrt{3 \log n}$, para valores grandes de n. Para esto basta observar que $EX_n = 0$, $EX_n^2 = \frac{1}{2}$, y $EX_nX_m = 0$, para $n \neq m$, y por lo tanto las variables Gausianas X_n son independientes e idénticamente distribuidas. Esto implica que

$$\begin{aligned} P[\max_{k=1,\ldots,n} |X_k| \leq \sqrt{\alpha \ln n}] &= \{P[|X_1| \leq \sqrt{\alpha \ln n}]\}^n \\ &= \{1 - \frac{e^{-\alpha \ln n}}{\sqrt{\pi\alpha \ln n}}(1 + o(1))\}^n \\ &= \exp[-n^{1-\alpha}(\pi\alpha \ln n)^{-1/2}(1 + o(1))], \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} P[\max_{k=1,\ldots,n} |X_k| > \sqrt{\alpha \ln n}] &= 1 - \exp[-n^{1-\alpha}(\pi\alpha \ln n)^{-1/2}(1 + o(1))] \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}\sqrt{\pi\alpha \ln n}}(1 + o(1)) \\ &\leq \frac{2}{n^{\alpha-1}}, \end{aligned}$$

para n grande. Por Borel Cantelli se sigue que

$$P[\max_{k=1,\ldots,n} |X_k| \leq \sqrt{\alpha \ln n},\ n \uparrow \infty] = 1,$$

para todo $\alpha > 2$.

Referencias

[1] Breiman, L. (1992) *Probability.* Classics in Appl. Math. SIAM.

[2] Eastham, M.S.P. (1971) *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations.* Scottish Academic Press.

[3] Hochstadt, H. (1961) “Asymptotic Estimates for the Sturm – Liouville Spectrum”, *Com. Pure Appl.*, vol. XIV, 749–764.

[4] Itô, K. & Mckean, H. (1974) *Diffusion Processes and their Sample Paths.* Segunda edición, Springer–Verlag.

[5] Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer–Verlag. Segunda edición.

[6] Mckean, H. (1969) *Stochastic Integrals.* Academic Press, New York.

[7] Mckean, H. & Moerbeke, P. (1975) “The Spectrum of Hill’s Equation”, *Inv. Math.* 30, 217-274.

[8] Levitan, B.M. & Sargsjar, I.S. (1991) *Sturm Liouville and Dirac Operators.* Kluwer Academic Publishers.