Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 1(1): 73–86 (1994)

funciones periódicas, cuasiperiódicas y clasificación de funciones

Edwin Castro Fernández[1]

Resumen

En este trabajo presentamos algunos conjuntos significativos de funciones. Siguiendo las ideas de [2] introducimos las *funciones cuasiperiódicas* y sus propiedades elementales. Basados en [12] damos una clasificación de los conjuntos.

Abstract

In this work we present some significative sets of functions. Following the ideas of [2] we introduce the *almost periodic functions* and its elementary properties. Based in [12] we give a classification of the sets.

1. Introducción

En el presente trabajo vamos a estudiar algunos conjuntos de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ vamos a ultilizar la siguiente notación: C el conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; B el conjunto de funciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$; $C.U$ el conjunto de funciones uniformemente continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

En los párrafos que siguen introduciremos también los conjuntos de funciones P (periódicas y continuas) $C.P$ (cuasiperiódicas). Aunque el conjunto P es bien conocido, nosotros explotaremos algunas propiedades que nos servirán para introducir el conjunto $C.P$.

2. El conjunto de funciones C ([1],[8])

El conjunto de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y denotado con C es bien conocido, este conjunto se puede dotar con la estructura de espacio vectorial definiendo la suma y la multiplicación escalar en forma usual; definiendo la multiplicación de funciones también en forma usual se tiene que C es una álgebra.

[1]Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

3. El conjunto de funciones $C.U$ ([1],[8],[10])

Sea $D \subset I\!R$ y $f : D \longrightarrow I\!R$ aplicación decimos que f es uniformemente continua en D si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que: para todo $x, y \in D$ con $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Denotaremos con $C.U$ al conjunto de funciones uniformemente continuas de $I\!R$ en $I\!R$.

Es claro que si $f, g \in C.U$ entonces $f + g \in C.U$ y si $\lambda \in I\!R$ entonces $\lambda f \in C.U$, sin embargo no siempre el producto de dos funciones de $C.U$ es una función de $C.U$, si consideramos por ejemplo la función $f(x) = x$ se tiene que $f \in C.U$, pero $g(x) = f(x)\ \ f(x) = x^2$ no es una función de $C.U$. El resultado siguiente es bien conocido.

Proposición 3.1. Sean $a, b \in I\!R$, $\ a < b$ y $f[a, b] \longrightarrow I\!R$ continua entonces f es uniformemente continua.

Para la prueba de la proposición 3.1. véase ([8]).

4. El conjunto de funciones B

Decimos que una función $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ es acotada si existe $M \in I\!R$, $\ M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq M \ \ \forall x \in I\!R.$$

Si f es una función acotada y continua diremos que $f \in B$. Es claro que si $f, g \in B$, $\ \lambda \in I\!R$ entonces $\lambda f + g \in B$ y $f \cdot g \in B$. También se tiene que si $f \in C.U$, $\ g \in B$ entonces $fg \in C.U$, pero no es cierto que $B \subset C.U$ ([1]).

5. El conjunto de funciones P ([2],[9],[10])

El conjunto P es esencial en el presente trabajo, por eso presentaremos y probaremos algunas de sus propiedades vamos a decir que una función $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ pertenece a P si:

a) $f \in C$

b) f es periódica, es decir: existe $T \in I\!R$, $\ T \neq 0$ tal que: $f(x + T) = F(x) \ \ \forall x \in I\!R$.

La propiedad (b) nos permite decir que f es periódica de período T.

Fácilmente se tiene:

Lema 5.1. Si $f \in P$ entonces:

(a) f es acotada ($f \in B$).

(b) Denotando con T un período de f tenemos que:

   i) f es de período $-T$,

   ii) f es de período $mT \ \ \forall m \in \mathbb{Z}$.

El lema 5.1 nos permite trabajar solamente con períodos positivos.

Vamos a ver a continuación que la suma y el producto de dos funciones de P no necesariamente es una función de P. En efecto, considere $g(x) = cost + cos\sqrt{2}t$ se ve que cada uno de los miembros de la suma es una función de P, sin embargo si $g(x)$ fuera una función de P se tendría que existiría un $T > 0$ tal que: $cos(t+T) + cos\sqrt{2}(t+T) = cost + cos\sqrt{2}t \ \ \forall t \in I\!R$ y en particular para $t = 0$ tendremos: $cosT + cos\sqrt{2}T = 2$ de donde $T = 2m\pi$ y $\sqrt{2}T = 2n\pi$ para algún $m, n \in Z\!\!Z\backslash 0$, tendríamos entonces que: $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ lo cual es absurdo. Por lo tanto $g \notin P$.

Observe el lector que la suma $cost + cos\sqrt{2}t$ se puede escribir en la forma:

$$2\ cos\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ t\ cos\frac{\sqrt{2}+1}{2}\ t$$

Se ve entonces que le producto de dos funciones de P no siempre es una función de P. Cabe preguntarnos sin embargo: ¿En qué casos la suma de dos funciones de P es una función de P?

Observe el lector en primer lugar que existen funciones periódicas que no pertenecen a P, un ejemplo es la función $f(x) = x - [x]$ que es periódica de período 1 pero no es continua.

Proposición 5.2 Sean f, g funciones periódicas con períodos T_1 y T_2 respectivamente si $T_1/T_2 \in Q\!\!\!\!Q$ entonces $f + g$ es periódica.

Demostración. Podemos escribir $T_1/T_2 = m/n$, con $m, n \in I\!N$, entonces $nT_1 = mT_2$ y $T = nT_1 = mT_2$ se tiene que:

$$(f+g)(t+T) = f(t+T) + g(t+T) = f(t+nT_1) + g(t+mT_2) = f(t) + g(t) \ \ \forall t \in I\!R$$

Así $f + g$ es periódica de período T.

Surge ahora la pregunta ¿qué sucede si f y g son periódicas de períodos T_1 y T_2 respectivamente y $T_1/T_2 \notin Q\!\!\!\!Q$? Considere tres números reales a, b, c inconmensurables entre sí (es decir que ninguno de los cocientes $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{a}{c}$ son racionales) y definimos:

$$f(x) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - ma - nb) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - ma - nc)$$

$$g(x) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - mb - nc) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x - ma - nb)$$

donde

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in I\!R\backslash\{0\} \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Sea $x_0 \in I\!R$ si $x_0 = ma + nb$ para algún $m, n \in Z\!\!Z$entonces $\quad \varphi(x_0 - ma - nb) = 1$. Se concluye que cualquiera de las dos series anteriores es convergente por la definición de φ, además se tiene:

$$f(x+a) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x-(m-1)a-nb) - \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \varphi(x-(m-1)a-nc) = f(x)$$

Análogamente: $g(x+b) = g(x)$ $(f+g)(x+c) = (f+g)(x)$

Por lo tanto hemos construido dos funciones f, g con períodos incomensurables cuya suma es periódica y su período es incomensurable con el período de f y de g.

Los resultados que siguen serán útiles en el estudio de las funciones periódicas.

Proposición 5.3 Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces el conjunto: $A = \{mx + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

La demostración de esta proposición será incluida en el apéndice del presente trabajo.

Corolario 5.4. Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ tales que $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$ entonces el conjunto

$$S = \{mT_1 + nT_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea $T_1/T_2 = x$ entonces el conjunto: $A = \{mx + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ lo cual implica que $T_2 A$ es denso en $\mathbb{R}$ pero $T_2 A = S$.

Observación. Si $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$ entonces cada elemento del conjunto S definido en el Corolario 5.4 se escribe de manera única, es decir si: $mT_1 + nT_2 = m'T_1 + n'T_2$ con $m, n, m', n' \in \mathbb{Z}$ entonces $m = m'$, $n = n'$.

Proposición 5.5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua (a la derecha o a la izquierda) con la propiedad de que existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no estacionaria y convergente tal que: $f(x + a_n) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ entonces f es constante.

La demostración de esta proposición será presentada en el apéndice.

Teorema 5.6. Sea $f \in P$, f no constante entonces el conjunto de los períodos de f es numerable.

Demostración. Sea $A = \{T > 0 : f(t + T) = f(t) \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ y $A_i = A \cap [0, i]$, $i \geq 1$. Si A_1 fuera infinito tendría un punto de acumulación T^* y entonces existiría una sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos diferentes de A_i convergente a T^* por la proposición 5.5 se concluiría que f sería constante, como A_i es finito y $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ se deduce que A es numerable.

Colorario 5.7. Si $f \in P$ entonces el conjunto de períodos de f es un conjunto aislado. Este Corolario deduce de la prueba del teorema 5.6.

Colorario 5.8. Sea $f \in P$ no constante entonces f posee un período positivo más pequeño.

Demostración. Sea $A = \{T > 0 : f(t + T) = f(t) \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ y $T^* = infA$.

i) Si $T^* \in A$ entonces T^* tiene la propiedad del enunciado.

ii) Si $T^* \notin A$ entonces $T^* \in A'$ y existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos diferentes de A tales que $a_n \longrightarrow T^*$. Resulta que f sería constante, lo cual es absurdo.

Proposición 5.9. Sea $f \in P$. Si f tiene dos períodos incomensurables entonces f es constante.

Demostración. Sean T_1, T_2 dos períodos incomensurables de f como:

$$S = \{mT_1 + nT_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

es denso en $\mathbb{R}$ se tiene de la relación:

$$f(mT_1 + nT_2) = f(0) \ \ \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

y se deduce que

$$f(y) = f(0) \ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Proposición 5.10. Sean $f, g \in P$, f, g no constantes, f con período T_1, g con período T_2, $f+g$ con período T. Si T_1 y T_2 son incomensurables entonces T y T_1, T y T_2 son también incomensurables.

Demostración. Supóngase que $T/T_2 \in \mathbb{Q}$ entonces: $T/T_2 = p/q$ y entonces que:

$$(f+g)(t) = (f+g)(t+T) = (f+g)(t+qT) = f(t+qT) + g(t+pT_2) = f(t+qT) + g(t)$$

de donde $f(t) = f(t+qT)$, se concluye que f es periódica de período qT y entonces es periódica de período pT_2. Como f tiene período pT_2 y T_1 y ambos son incomensurables entonces f es constante. Contradicción.

Proposición 5.11. Sean $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ tales que $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$ y sea

$$A = \{mT_1 + nT_2 : m, n \in \mathbb{Z}\} \ \ .$$

Sea $x \notin A$ entonces:

(1) Existen dos sucesiones de enteros $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_nT_1 + b_nT_2 \longrightarrow x$.

(2) Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son no acotadas.

(3) Algunas de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se puede elegir convergiendo a $+\infty$.

(4) Algunas de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ó $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se puede elegir en $\mathbb{N}$ y la otra compuesta de enteros negativos.

La demostración de esta proposición aparecerá en el apéndice.

Proposición 5.12. Sea $f \in P$ no constante con período T_2 y sea $T \in \mathbb{R}$ tal que $T/T_1 \notin \mathbb{Q}$ entonces los límites:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(nT) \ , \quad \lim_{n\longrightarrow-\infty} f(nT)$$

no existen.

Demostración. Supóngase que $lim \ \ f(nT) = l$; $l \neq \pm\infty$ pues $f \in B$; existe α y β suficientemente cerca tales que: $f(nT) \in [\alpha, \beta] \ \ \forall n \geq N$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que:

i) $f(x) \notin [\alpha, \beta]$

ii) $f(-x) \notin [\alpha, \beta]$

iii) $x \neq mT_1 + nT \ \ \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Como se ve, i), ii) se aseguran tomando α, β suficientemente cerca, iii) es claro.

Se tiene que existe una sicesión $(a_nT_1 + b_nT)_{n\in\mathbb{N}}$ convergiendo a x. Pueden haber dos casos: (proposición 5.11)

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^-$.

2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^-$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$

si se da el primer caso se considera la sucesión: $(-a_nT_1 - b_nT)_{n\in\mathbb{N}}$ y se reduce al segundo. Consideramos el segundo caso, se tiene que:

$$\alpha \leq f(a_nT_1 + b_nT) \leq \beta \ \ \forall n \geq N$$

y tomando límite se deduce que: $f(x) \in [\alpha, \beta]$, lo cual es contradictorio.

Observaciones:

(1) La proposición anterior es cierta así: si $(a_n) \subset \mathbb{Z}$ y $a_n \longrightarrow +\infty$ o $a_n \longrightarrow -\infty$ entonces $lim \ \ f(a_nT)$ no existe.

(2) Es fácil probar que si $f \in P$ y f no es constante entonces $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ no existe. Aún sin la hipótesis de continuidad para f. Además si $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ existe entonces f es constante.

(3) La proposición 5.12 es cierta también si $T/T_1 \in \mathbb{Q}$ y T no es período de f siempre que $f(T) \neq f(0)$. Como $\frac{T}{T_1} = \frac{p}{q}$ entonces $qT = pT_1$ se tiene entonces que:

$$f(qT) = f(pT_1) = f(0), \ \ f(nqT) = f(npT_1) = f(0), \ \ f((nq+1)T) = f(T).$$

Así el límite $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(nT)$ no existe.

Proposición 5.13. Sea $f, g \in P$, f con período T_1, g con período T_2, $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$, f y g no constantes. Entonces $f+g$ no puede ser periódica.

Demostración. Supóngase que $f+g$ es periódica de período T.

(i) $(f+g)(aT_1 + bT) = f(0) + g(aT) \ \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$

(ii) $(f+g)(cT_2 + bT) = f(cT_2) + g(0) \ \ \forall c, b \in \mathbb{Z}$

Supóngase que existe una sucesión $a_nT_1 + b_nT \longrightarrow x$ con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ y $a_n \longrightarrow +\infty$ y además $x \neq mT_1 + nT \ \ \forall m, n \in \mathbb{Z}$. Considerando (i):

$$(f+g)(a_nT_1 + b_nT) = f(0) + g(a_nT_1)$$

y haciendo tender $n \longrightarrow +\infty$, el miembro izquierdo tiende a $(f+g)(x)$ y el derecho no tiene límite cuando $n \longrightarrow +\infty$.

6. Otras propiedades de las funciones periódicas

Proposición 6.1. Si $f \in P$ entonces $f \in C.U.$ ([8],[10]).

Demostración. Sea $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ periódica y continua y $T > 0$ período de f, como f es continua en $[0, 3T]$ entonces f es uniformemente continua así: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\delta(\varepsilon) < T$ y con la propiedad de que si $x, y \in [0, 3T]$ con $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Vamos a probar que tiene lugar la implicación $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sin la restricción $x, y \in [0, 3T]$.

Sean $x, y \in I\!R$ tales que $|x - y| < \delta$ se tiene que: $0 \leq x[\frac{x}{T}]T < T$ y entonces $x' = x + T - [\frac{x}{T}]T \in [T, 2T]$, $y' = y + T - [\frac{x}{T}]T \in [0, 3T]$ además $|x' - y'| = |x - y| < \delta$ y entonces $|f(x') - f(y')| < \varepsilon$ pero $f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')|$, y se sigue el resultado.

A continuación nos dedicaremos a estudiar la composición de funciones periódicas.

Es claro que si $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ y $g : I\!R \longrightarrow I\!R$ periódica entonces $f \circ g$ es periódica.

Si $g \in P,\quad f \in C$ no necesariamente se tiene que $g \circ f$ es periódica, por ejemplo si $f(x) = x^2$, $g(x) = senx$ fácilmente se ve que $(g \circ f)(x) = senx^2$ no es periódica.

Sin embargo si $f \in P$ y $p(x) = ax + b$ se tiene que $\varphi(x) = (f \circ p)(x) = f(ax + b)$ es periódica.

El siguiente resultado responde parcialmente a las inquietudes anteriores.

Teorema 6.2. Sean $f, g \in C$ tales que:

1) $f \in P$, f no constante.

2) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$ entonces $f \circ g \notin P$.

Demostración. Sea $T > 0$ período de f entonces f alcanza en $[0, T]$ su máximo y su mínimo $f(u) = m = min\{f(x) : x \in [0, T]\}$, $f(v) = M = max\{f(x) : x \in [0, T]\}$. Sea $\varepsilon = \dfrac{M - m}{2} > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - y| < \delta \text{ implica } |f(g(x)) - f(g(y))| < \frac{M - m}{2} \tag{1}$$

Por otra parte existe un intervalo de longitud δ en el cual g tiene una variación mayor que T. En efecto, si $|x - y| < \delta$ entonces $|g(x) - g(y)| \leq T$ entonces:

$$\left|\frac{g(n\delta)}{n\delta}\right| \leq \frac{|g(0)| + |g(\delta) - g(0)| + \ldots + |g(n\delta) - g((n-1)\delta)|}{n\delta} \leq \frac{|g(0)|}{n\delta} + \frac{T}{\delta}$$

y entonces

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{g(n\delta)}{n\delta}\right| \leq \frac{T}{\delta}$$

lo cual contradice 2).

Sea $[n_0\delta, (n_0 + 1)\delta]$ con la propiedad de que existen $x_1, x_2 \in [n_0\delta, (n_0 + 1)\delta]$ tal que: $|g(x_1) - g(x_2)| > T$ entonces entre x_1, x_2 existen t_1, t_2 tales que $f(g(t_1)) = f(u) = m$,

$f(g(t_2)) = f(v) = M$ así pues $|t_1 - t_2| < \delta$ y $|f(g(t_1)) - f(g(t_2))| = M - m$ lo cual contradice (1) por lo tanto $f \circ g \notin P$.

Observación. Si en lugar de la hipótesis 2) escribimos $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -\infty$ el resultado sigue con la misma demostración.

Colorario 6.3. Sea $f \in P$ no constante y p polinomio entonces $f \circ p \in P$ sí y solo sí el grado de p es ≤ 1.

Colorario 6.4. Sea $g \in P$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y de clase C^1 tal que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = \infty$, entonces $g \circ f \notin P$.

7. Funciones cuasiperiódicas ([3],[4],[5],[6],[7],[9])

Consideremos la ecuación diferencial

$$y^{(4)} + 3y'' + 2y = 0$$

cuya solución de clase C^1 es:

$$y(t) = Acost + BsenT + Ccos\sqrt{2}t + Dsen\sqrt{2}t \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

Cada uno de los términos de la solución es una función periódica, sin embargo ya vimos anteriormente que la aplicación $t \longrightarrow cost + cos\sqrt{2}t$ no es periódica y sin embargo es solución de la ecuación diferencial.

Lo anterior motivó a Bohr a introducir una clase de funciones más amplia llamada funciones cuasiperiódicas y denotadas con $C.P.$

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice cuasiperiódica si:

a) $f \in C$

b) $\forall \varepsilon > 0$ existe $l > 0$ tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ existe: $\tau \in [a, a + l]$ con la propiedad

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Proposición 7.1. $P \subset C.P.$

Demostración. Sea $f \in P$ por hipótesis existe $T \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(t + T) = f(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $l = T > 0$. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\tau = nT$ con $n = 1 + [a/T]$ se tiene que: $a \leq \tau \leq a + l$ puesto que da

$$\frac{a}{T} - 1 < \left[\frac{a}{T}\right] \leq \frac{a}{T} \text{ ó } \frac{a}{T} - 1 < n - 1 \leq \frac{a}{T} \ ,$$

se tiene que $a < nT \leq a + T$ y se obtiene $a \leq \tau \leq a + l$.

Sea $t \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$|f(t + \tau) - f(t)| = |f(t + nT) - f(t)| = |f(t + T) - f(t)| = 0$$

Proposición 7.2. $C.P \subset B$.

Demostración. Sea $f \in C.P$ y sea $\varepsilon = 1$ entonces existe $l > 0$ tal que para cualquier $a \in I\!R$ se puede hallar $\tau \in [a, a+l]$ con $|f(t+\tau) - f(t)| < 1 \ \ \forall t \in I\!R$. Como f es continua f es acotado en $[0, l]$ y entonces existe $L > 0$ tal que $|f(t)| \leq L \ \ \forall t \in [0, l]$. Sea $t \in I\!R$ para $a = -t$ existe $\tau \in [-t, -t+l]$ tal que:

$$|f(t)| \leq |f(t) - f(t+\tau)| + |f(t+\tau)| < 1 + L$$

Proposición 7.3. $C.P \subset C.U$

Demostración. Sea $f \in C.P$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $l > 0$ tal que para todo $a \in I\!R$ existe $\tau \in [a, a+l]$ con: $|f(s+\tau) - f(s)| < \varepsilon \ \ \forall s \in I\!R$

Como f es uniformemente continua en $[-1, 1+l]$ entonces existe $\delta > 0$ con $\delta \leq 1$ tal que para cualquier s', s'' con $s', s'' \in [-1, 1+t]$ con $|s' - s''| \leq \delta$ tenemos que $|f(s') - f(s'')| < \varepsilon$.

Sea ahora $t', t'' \in I\!R$ con $|t' - t''| < \delta$ poniendo $a = -t'$ existe $\tau \in [-t', -t'+1]$ tal que $|f(s+t) - f(s)| < \varepsilon \ \ \forall s \in I\!R$.

Como $t' + \tau \in [0, l] \subset [-1, 1+l]$ y $t'' + \tau \in [-\delta, \delta + l] \subset [-1, 1+l]$ se deduce que:

$$|f(t') - f(t'')| \leq |f(t') - f(t'+\tau)| + |f(t'+\tau) - f(t''+\tau)| + |f(t''+\tau) - f(t'')| < 3\varepsilon$$

Proposición 7.4. Sea $f \in C$ monótona y no constante entonces $f \notin C.P$.

Demostración. Existen $a, b \in I\!R, \quad a < b$ tales que $f(a) < f(b)$ (ó $f(a) > f(b)$). Supóngase que f es creciente. Supóngase que f es cuasiperiódica. Sea $\varepsilon = f(b) - f(a) > 0$ entonces existe $l > 0$ y existe $\tau \in [b, b+l]$ tal que: $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \in I\!R$.

Se tiene en particular que:

$$f(a+\tau) - f(a) < \varepsilon \text{ pero } f(a+\tau) - f(a) \geq f(b) - f(a)$$

lo cual es contradictorio. Se sigue el resultado.

Proposición 7.5. Sea $f \in C.P$ entonces $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ existe si y solo si f es constante.

Demostración. Supóngase que $f \in C.P$ y que el límite existe, sin pérdida de generalidad supóngase que el límite es igual a cero.

Vamos a suponer que f no es constante. Sea $x_0 \in I\!R$ tal que $f(x_0) > \delta > 0$ (análogamente si existe $x_0 \in I\!R$ con $f(x_0) < \delta < 0$. Probaremos que dado cualquier $M > 0$ existe $x_1 \in I\!R$ tal que $f(x_1) > \delta > 0$ con $x_2 > M$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_0) - \varepsilon > \delta$, existe $l > 0$ tal que para todo $a \in I\!R$ existe $\tau \in [a, a+l]$ y:

$$|f(x_0 + \tau) - f(x_0)| < \varepsilon$$

se sigue que

$$f(x_0 + \tau) > f(x_0) - \varepsilon \tag{2}$$

Sea a de tal forma que $x_0 + a > M$ entonces podemos elegir τ con $\tau \in [a, a+l]$ para que se cumpla (2) y se tiene: $x_0 + \tau > x_0 + a$ y por (2) $f(x_0 + \tau) > \delta > 0$. Si se toma $x_1 = x_0 + \tau$ se tiene el resultado.

Proposición 7.6. Sea $f \in C.P.$ y $g \in C$ entonces $g \circ f \in C.P.$

Demostración. Como $f \in C.P$ entonces $A = \overline{f(I\!R)}$ es compacto y entonces $g : A \longrightarrow I\!R$ es uniformemente continua.

Sea $\varepsilon > 0$ se tiene que:

(a) Existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$ se tiene que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

(b) Existe $l > 0$ tal que para todo $a \in I\!R$ existe $\tau \in [a, a + l]$ con: $|f(x + \tau) - f(x)| < \delta \ \ \forall x \in I\!R$.

Combinando (a) y (b) tenemos que: existe $l > 0$ tal que para todo $a \in I\!R$ existe $\tau \in [a, a+l]$ con $|g(f(x + \tau)) - g(f(x))| < \varepsilon \ \ \forall x \in I\!R$, es decir $g \circ f \in C.P$.

Observación 1. Se $f \in C$; $g \in P$ no se sigue $g \circ f \in C.P$. Sea por ejemplo $f(x) = x^2$, $g(x) = senx$ entonces $(g \circ f)(x) = senx^2$. Se tiene que $g \circ f \notin C.U$ entonces $g \circ f \notin C.P$. (§9 Ej. 3).

Observación 2. Vale la proposición 6.2 si en lugar de P ponemos $C.P$.

Proposición 7.7. La suma de dos funciones cuasiperiódicas es una función cuasiperiódica.

Vamos a probar la proposición 7.7 en la forma que sigue:

Si $f_1, f_2 \in C.P$ y $\varepsilon > 0$ entonces existe $l > 0$ tal que para todo $b \in I\!R$ existe $\tau \in [b, b + l]$ con:

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| < \varepsilon, \ \ |f_2(t + \tau) - f_2(t)| < \varepsilon$$

Demostración. (a) Sean $f_1, f_2 \in C.P$ entonces existen $l_1, l_2 > 0$ tales que para todo $a \in I\!R$ existe $\tau_i(a) \in [a, a + l_i]$ $\ i = 1, 2$ con:

$$|f_i(t + \tau_i(a)) - f_i(t)| < \varepsilon/4 \ \ \forall t \in I\!R \tag{3}$$

Sea $l_0 = Max\{l_1, l_2\}$ como f_1, f_2 son uniformemente continuas entonces existe $\delta > 0$, $\delta \leq l_0$ tal que para todo $s, t \in I\!R$ con $|t - s| \leq \delta$ se tiene:

$$|f_i(t) - f_i(s)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

(b) Sea $\sigma_i(a) = p_i\delta \ \ i = 1, 2$, donde p_i cumple:

$$|\tau_1(a) - p_i\delta| = inf\{|\tau_i(a) - q\delta| : q \in Z\!\!\!Z, a \leq q\delta \leq a + l_0\}$$

es claro que:

$$\sigma_i(a) \in [a, a + l_0] \text{ y } |\tau_i(a) - \sigma_i(a)| \leq \delta$$

lo cual nos da:

$$|f_i(s + \sigma_i(a)) - f_i(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall s \in I\!R$$

en virtud de (3) y (4).

(c) Observe que:

$$|\sigma_1(a) - \sigma_2(a)| \leq l_0 \, . \tag{5}$$

Sea $C = \{(\sigma_1(a), \sigma_2(a)) : a \in I\!R$. Introducimos en C una relación de equivalencia definida así:

$$(\sigma_1(a), \sigma_2(a)) \sim (\sigma_1(b), \sigma_2(b) \text{ si y solo si } |\sigma_1(a) - \sigma_2(a)| = |\sigma_1(b) - \sigma_2(b)|$$

Obsérvese de (5) que el conjunto $C/\sim$ tiene un número finito de clases de equivalencia $\widehat{C}_1, \ldots, \widehat{C}_n$. En cada clase elegimos un representante $(\sigma_1(a_k), \sigma_2(a_k))$; $a_k \in I\!R$. Sea:

$$l_1' = Sup\{|\sigma_i(a_k) : i = 1, 2\} \tag{6}$$

(d) Sea $l = l_0 + 2l_1'$. Sea $b \in I\!R$ y $a = b + l_1'$.

Considere los números $\sigma_1(a), \sigma_2(a)$ de la etapa (b), por (c) existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(\sigma_1(a), \sigma_2(a)) \in \widehat{C}_k$ entonces

$$|\sigma_1(a) - \sigma_2(a)| = |\sigma_1(a_k) - \sigma_2(a_k)| \tag{7}$$

denotando con $\eta = Sign(\sigma_1(a) - \sigma_2(a))Sign(\sigma_1(a_k) - \sigma_2(a_k))$ (7) se escribe como:

$$\sigma_1(a) - \eta\sigma_1(a_k) = \sigma_2(a) - \eta\sigma_2(a_k) \tag{8}$$

Denotaremos con τ el valor común de las expresiones (8) y como:

$$\sigma_1(a) \in [a, a + l_1], \quad \sigma_2 \in [a, a + l_2] \text{ y } [a, a + l_i] \subset [a, a + l_0] = [b + l_1', b + l_1' + l_0] \ .$$

Se tiene por (6) que $\tau \in [b, b + l_0 + 2l_1'] = [b, b + l]$.

Finalmente, sea $t \in I\!R$ se tiene que:

$$f_i(t+\tau) - f_i(t)| \leq |f_i(t+\sigma_i(a) - \eta\sigma_i(a_k)) - f_i(t - \eta\sigma_i(a_k))| + |f_i(t - \eta\sigma_i(a_k)) - f_i(t)| < \varepsilon \ \ i = 1, 2$$

Colorario 7.9. Si $c \in I\!R$ y $f, g \in C.P$ entonces $cf + g \in C.P$.

Proposición 7.10. Si $f \in C.P$ entonces $f^2 \in C.P$

Demostración. Como $f \in C.P$ implica $f \in B$, entonces $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in I\!R$ y además:

$$|f^2(x + \tau) - f^2(x)| = |f(x + \tau) + f(x)||f(x + \tau) - f(x)| \leq M|f(x + \tau) - f(x)|$$

se sigue el resultado.

Proposición 7.11. Si $f, g \in C.P$ entonces $f \cdot g \in C.P$

Demostración. El resultado se sigue de escribir:

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\{(f + g)^2 - (f - g)^2\}$$

Proposición 7.11. Si $f \in C.P$ y $inf\{|f(x)| : x \in I\!R\} = m > 0$ entonces $1/f \in C.P$.

Demostración.

$$\left|\frac{1}{f(x + \tau)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x + \tau) - f(x)}{f(x + \tau)f(x)}\right| \leq \frac{|f(x + \tau) - f(x)|}{m^2}$$

y se sigue el resultado.

Colorario 7.12. Si $f, g \in C.P$ y $inf\{|g(x)| : x \in I\!R\} = m > 0$ entonces $f/g \in C.P$. (El Corolario 7.12 se sigue de las proposiciones 7.8 y 7.9).

8. Ejemplos

1.) $f \in C \backslash (C.U \cup B)$ $f(x) = x^2$

2.) $f \in C.U \backslash B$ $f(x) = x$

3.) $f \in B \backslash C.U$ $f(x) = sen x^2$.

Prueba: Sea $\varepsilon = 1/2$. Si f fuera uniformemente continua existiría $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in I\!R$, $|x - y| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(y)| < 1/2$. Sea $n \in I\!N$ tal que

$$|\sqrt{n\pi} - \sqrt{(2n+1)\pi/2}| < \delta$$

entonces se va a tener

$$1 = |0 - 1| = |sen n\pi - sen(2n+1)\pi/2| = |sen(\sqrt{n}\pi)^2 - sen(\sqrt{(2n+1)\pi/2}\})^2| < \frac{1}{2}$$

4.) $f \in B \cap C.U \backslash C.P$. Sea $f(x) = arctan x$. En primer lugar $f \notin C.P$ (Proposición 7.5). Se tiene además que $f \in B$. Como

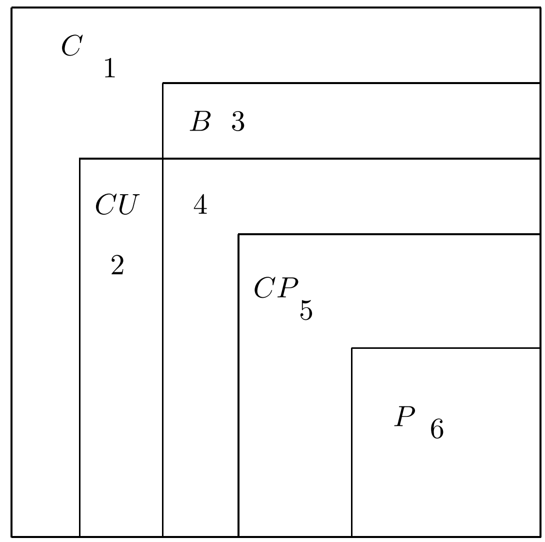
$$|f(x) - f(y)| = |x - y||f'(\xi)| = |x - y|\frac{1}{1 + \xi^2} \leq |x - y| \;\; \forall x, y \in I\!R, \;\; \xi \in \overline{xy}$$

se sigue que $f \in C.U$.

5.) $f \in C.P \backslash P$. $f(x) = cos x + cos\sqrt{2}x$ (ver §5)

6.) $f \in P$. $f(x) = cos x$

9. Diagrama de funciones



APENDICE
Sobre un conjunto denso en $I\!R$

Sea $x \in I\!R \setminus Q$ y $A = \{mx + n : m, n \in Z\!\!Z\}$. Vamos a probar que A es denso en $I\!R$. (Proposición 5.3)

Vamos a probar que para cualquier intervalo abierto y acotado $I \subset I\!R \setminus \{0\}$ tenemos que $I \cap A \neq \emptyset$. Se tiene evidentemente que existe $n \in Z\!\!Z$ tal que $\frac{1}{n} I \subset]0,1[$ y tenemos que: $\frac{1}{n} I \cup A \neq \emptyset$ si y solo si $I \cap A \neq \emptyset$, por lo tanto podemos suponer que $I \subset]0,1[$.

Sea $I =]0, \varepsilon[$ con $0 < \varepsilon < 1$ y consideremos $((x)) = x - [x]$ sean $((x)), ((2x)), \ldots, ((rx))$ donde $r \in I\!N$ y $\frac{1}{r} < \varepsilon$. Los números $((x)), ((2x)), \ldots, ((rx))$ son distintos dos a dos pues $x \in I\!I$.

Sean $p, q \in \{1, \ldots, r+1\}$ tales que:

$$((px)) - ((qx)) \leq \frac{1}{r} < \varepsilon$$

Como $((px)) - ((qx)) = [qx] - [px] + (p - q)x$, se deduce que $I \cap A \neq \emptyset$.

Sea ahora $I =]c, d[, \ \ 0 < c < d < 1$. Considere $-I =] - d, -c[$, $1 - I = \{1 - y : y \in I\} =]1 - d, 1 - c[$. Como $1 - c > 0$ entonces existe $1 - p \in (1 - I) \cap A$ con $P \in I$, de donde $1 - p \in A$ y así $-p \in A - 1 = A$, o sea $p \in A$. Así $p \in A \cap I$. Se concluye que en cualquier caso se tiene $I \cap A \neq \emptyset$.

Proposición 5.5. Sea $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ continua (a la derecha o a la izquierda) en $I\!R$ con la propiedad de que existe una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ no estacionaria y convergente tal que: $f(x + a_n) = f(x) \ \ \forall x \in I\!R, \forall n \geq 1$, entonces f es constante.

Demostración. Podemos suponer que $lim\ a_n = 0$. De la hipótesis deducimos que:

$$f(a_n) = f(0), \ \ n \geq 1$$

$$f(2a_n) = f(a_n) = f(0)$$

y en general: $f(ma_n) = f(0)\ \ \forall m, n \geq 1$.

Se deduce también que $f(0) = f(-a_n)\ \ n \geq 1$ y entonces: $f(-ma_n) = f(0)\ \ \forall m, n \geq 1$ y así se tiene que

$$f(ma_n) = f(0)\ \ \forall n \in I\!N,\ m \in Z\!\!Z$$

Sea $x > 0$, como f es continua en x se tiene que $f(x^+) = f(x)$. Para cada $k \geq 1$ sea m_k el primer número natural tal que $x_k = m_k|a_k| \geq x$ y entonces:

$$0 \geq x_k - x \geq |a_k| \text{ y } f(m_k a_k) = f(0)\ \ \forall k \geq 1$$

Como $a_k \longrightarrow 0$ tenemos $x_k \searrow x$ y entonces $f(x^+) = lim\ f(x_k) = f(0)$ y como $f(x) = f(x^+)$ se tiene que $f(x) = f(0)$.

En forma análoga se prueba que $f(x) = f(0)\ \ \forall x < 0$.

Proposición 5.11. Sean $T_1, T_2 \in I\!R$ tales que $T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$. Supongamos que $x \notin A$ entonces:

(1) Existen dos sucesiones de enteros $(a_n)_{n\in I\!N}$, $(b_n)_{n\in I\!N}$ tales que: $a_nT_1 + b_nT_2 \longrightarrow x$. La sucesión $(a_nT_1 + b_nT_2)_{n\in I\!N}$ se puede elegir con todos los términos diferentes.

(2) Una de las sucesiones $(a_n)_{n\in I\!N}$ o $(b_n)_{n\in I\!N}$ se puede elegir tendiendo a $+\infty$ y la otra $-\infty$.

(3) Una de las sucesiones $(a_n)_{n\in I\!N}$ o $(b_n)_{n\in I\!N}$ se puede elegir de enteros positivos y la otra de enteros negativos.

Demostración.

(1) Evidente pues $\overline{A} = I\!R$.

(2) Supongamos que $(a_n)_{n\in I\!N}$ es acotada, entonces el conjunto $\{a_1, a_1, ldots, a_n, \ldots\}$ sería finito y se tendría que la sucesión $\{a_1T_1 + b_1T_2, a_2T_1 + b_2T_2, \ldots\}$ sería finito y entonces $x \in A$. Contradición. Por lo tanto ninguna de las sucesiones $(a_n)_{n\in I\!N}$ o $(b_n)_{n\in I\!N}$ es acotada.

Entonces alguna de las sucesiones tiene un número infinito de términos positivos supóngase que es $(a_n)_{n\in I\!N}$, considérese la sucesión $a_{n_k} \longrightarrow +\infty$ entonces la subsucesión $a_{n_k}T_1 + b_{n_k}T_2 \longrightarrow x$ cuando $k \longrightarrow +\infty$ y se debe tener que $b_{n_k} \longrightarrow -\infty$ cuando $k \longrightarrow -\infty$.

(3) Resulta fácil de (2).

Referencias

[1] Castro, Edwin; *Sobre algunas funciones acotadas.* (por aparecer).

[2] Cooke, Roger (1981) *Almost Periodic Functions*, Amer. Math. Monthly. 88(7), 515-525.

[3] Besicovitch, A.S. (1954) *Almost Periodic Functions.* Dover Publications Inc. New York.

[4] Bohr, Harold (1951) *Almost Periodic Functions.* Chelsea Publishing Company. New York.

[5] Fink, A.M. (1977) *Almost Periodic Differential Equations*. Lecture Notes in Mathematics 377. Springer-Verlag.

[6] Titchmarsh, E.C. (1986) *The theory of Functions*. Second Editions. Oxford University Press. 1939. (corregida 1986).

[7] Muntean, Ioan (1990) *Analizā Functionala: Capitale Speciale*. Cluj. Napoca. Universitatea Babes, Bolyai.

[8] Arnaudiès, J.M. (1991) *Cours de Mathematiques - 2 Analyse*. Dunod Université. Paris.

[9] Barrantes, Delgado, Geiner (1973) *Funciones cuasiperiódicas*. Universidad de Costa Rica. Tesis presentada para optar el grado de Licenciado en Matemática.

[10] Dalyay Pal, Balogh Zoltam (1986) *Functii Uniform Continue*. Gazeta Matematică, Anul XCI, Nr11-12 (1986), 412-417.

[11] Niculescu, Liliana (1990) *O Metoda de Calcul a Primitivelor xxxx Functii Periodice*, Gazeta Matematică. Anul XCVI, Nr8, 281-284.

[12] Muntean, Ioan (1990) *Clasificaci'on de Algunas Funciones Reales sobre un intervalo compacto*, Ciencias Matemáticas, Volumen 1, número 1, 36-41.