# Modelos matemáticos que introducen la perspectiva dinámica en la enseñanza de la teoría económica

Andaluz, Joaquín (jandaluz@unizar.es)
Jarne, Gloria (gjarne@unizar.es)
Perote, Juan (jperote@unizar.es)
*Departamento de Análisis Económico*
*Universidad de Zaragoza*

## RESUMEN

La presente propuesta se enmarca dentro de la actividad del Proyecto de Innovación Docente de la Universidad de Zaragoza titulado, "Introducción de perspectivas evolutivas, institucionales y de complejidad en la enseñanza de la teoría económica" (PIIDUZ-18-020). Se trata de una innovación dirigida a aumentar y diversificar la oferta docente en asignaturas de teoría económica en cuanto a una perspectiva dinámica y evolutiva del comportamiento y preferencias de los agentes económicos y de su interacción y co-evolución con las instituciones sociales en que se enmarcan.

La incorporación del análisis dinámico ofrece resultados económicos que el análisis estático y de estática comparativa no son capaces de proporcionar y pone de manifiesto la necesidad del empleo de las matemáticas en el estudio de distintos fenómenos de naturaleza económica. Como ejemplo, en este trabajo se analiza la estabilidad del equilibrio en un duopolio diferenciado en el que las empresas compiten vía precios o vía cantidades, en condiciones de racionalidad limitada. Se demuestra que la especificación de las expectativas en un contexto de tiempo discreto, genera una dinámica cuyas propiedades cualitativas dependen tanto del tipo de competencia utilizado como del grado de diferenciación del producto.

## ABSTRACT

The present proposal is part of the activity of the Teaching Innovation Project of the University of Zaragoza entitled "Introduction of evolutionary, institutional and complexity perspectives in the teaching of economic theory" (PIIDUZ-18-020). It is an innovation aimed at increasing and diversifying the teaching offer in subjects of economic theory in terms of a dynamic and evolutionary perspective of the behaviour and preferences of economic agents and their interaction and co-evolution with the social institutions in which they are framed.

The incorporation of dynamic analysis offers economic results that static analysis and comparative statics are not capable of achieving and it highlights the need for the use of mathematics in the study of different economic phenomena. As an example, this paper analyses the stability of equilibrium in a differentiated duopoly assuming that firms compete via prices or via quantities, under conditions of bounded rationality. It is shown that the specification of expectations in a discrete time context generates a dynamic whose qualitative properties depend both on the type of competition used and the degree of product differentiation.

***Palabras claves*:**
Análisis dinámico; expectativas; equilibrio de Nash; estabilidad dinámica

***Área temática*:** Aspectos cuantitativos de problemas económicos y empresariales (A5).

# 1. INTRODUCCIÓN

Una de las hipótesis que caracterizan a los modelos microeconómicos convencionales es suponer que los agentes económicos tienen un comportamiento racional. En ellos, se da por hecho que cada agente individualmente es capaz de elegir de manera óptima, de acuerdo con su propio criterio de valoración y restricciones particulares. Dicho supuesto implica a su vez aceptar que todo el mundo tiene acceso de forma simultánea y completa a la información.

Particularmente, en el caso de los modelos de oligopolio, la presencia de un reducido número de empresas conduce a la interdependencia en la toma de decisiones, de manera que cuando una empresa decide qué precio fijar o qué cantidad ofrecer en un determinado periodo, debe conocer de antemano las decisiones de sus rivales en dicho periodo.

No obstante, la evidencia empírica muestra que dicha hipótesis está lejos de la realidad. En un contexto de oligopolio, las empresas no conocen con certeza las funciones de costes de sus rivales, ni tienen información perfecta de la demanda que abastecen y tampoco estiman de manera precisa las acciones de sus rivales en cada periodo de tiempo.

Como es sabido, el modelo de Cournot (1838) es considerado como el primer intento de análisis riguroso de la competencia en un mercado en el que las empresas reconocen su interdependencia. Uno de los supuestos que caracterizan a dicho modelo y que ha sido objeto de crítica es el relacionado con el comportamiento de las empresas. Cournot analiza un duopolio suponiendo que cada duopolista actúa bajo la creencia de que la variable de decisión de su rival se mantiene fija.

Bajo dicha hipótesis, se deduce que las variables de decisión de ambas empresas pueden converger al equilibrio, definido por la intersección de las funciones de reacción. Dicha situación constituirá un equilibrio de Nash, ya que ninguna de las empresas tendrá incentivos a cambiar su decisión unilateralmente y, en ausencia de coordinación entre ellas, los valores de las variables se mantendrán en los niveles de equilibrio. Por el contrario, si en un periodo determinado los valores de las variables de decisión elegidos no constituyen un equilibrio, al menos una de las empresas aumentará su beneficio desviándose de dicha situación. Dado que ambas actúan del mismo modo y de forma simultánea, se genera un proceso dinámico cuyas propiedades dependerán tanto de la naturaleza del tiempo considerada (discreto o continuo) como del modo en el que las empresas formen sus expectativas. Desde nuestro punto de vista, tanto la consideración del tiempo como la definición del comportamiento de las empresas en condiciones de racionalidad limitada, son dos aspectos que deberían estar presentes en la formación microeconómica y son un buen ejemplo de la interdependencia entre las matemáticas y el análisis microeconómico.

En este sentido, tal y como señala Cabral (2012), el estudio de la dinámica surgida en los modelos de oligopolio es un aspecto que puede ofrecer importantes resultados en el campo de la organización industrial, ya que los modelos dinámicos proporcionan un importante valor añadido con respecto a los modelos estáticos.

Tradicionalmente, el tiempo ha sido modelado mediante el empleo de juegos en forma extensiva con múltiples etapas. Sin embargo, dicho enfoque sufre dos importantes limitaciones. Por un lado, se considera un periodo inicial y una etapa final, siendo que en el mundo real, el comienzo y el final son difíciles de identificar en algunas ocasiones. Por otro lado, a pesar de que las estrategias son históricamente dependientes y, por tanto, el tiempo juega un importante papel, no se contempla la conexión entre los diferentes períodos en los que se estructura el juego.

Por otra parte, de acuerdo con lo apuntado por Okuguchi (1976), la hipótesis de Cournot debe considerarse como un caso especial de otros tipos de expectativas más realistas y generales. Existe reciente literatura en la que se analiza la competencia entre empresas que toman sus decisiones en condiciones de racionalidad limitada. Mecanismos de decisión tales como la *regla del gradiente* basada en el beneficio marginal o las *expectativas adaptativas*, son ejemplos de reglas de decisión capaces de generar dinámicas con interesantes propiedades y ofrecer resultados que los modelos estáticos son incapaces de proporcionar.

El presente trabajo se enmarca dentro de las actividades del Proyecto de Innovación Docente titulado “Introducción de perspectivas evolutivas, institucionales y de complejidad en la enseñanza de la teoría económica” (PIIDUZ-18-020). Se trata de una innovación dirigida a extender y completar el contenido de determinadas asignaturas de teoría económica incorporando una perspectiva dinámica y evolutiva del comportamiento de los agentes económicos que actúan en condiciones de racionalidad limitada.

Los instrumentos y resultados matemáticos a utilizar son adecuados para estudiantes de Economía. Algunos de ellos se imparten en las asignaturas Matemáticas I y II (en primer curso del grado en Economía) y otros, como el análisis cualitativo de sistemas dinámicos discretos y su simulación mediante un software adecuado, necesitarán una explicación adicional.

La actividad docente que aquí se expone sería adecuada para la elaboración de un trabajo de fin de grado, para implementarla en una asignatura de libre elección o de Máster de Economía o para un trabajo de fin de máster, ya que los contenidos necesarios de microeconomía relacionados con la competencia imperfecta y los de teoría de juegos, se imparten en las asignaturas obligatorias Microeconomía II (2º cuatrimestre de segundo curso) y Microeconomía IV (2º cuatrimestre de tercer curso), y en la optativa Juegos y Decisión (2º cuatrimestre de tercer curso).

El artículo se organiza como sigue: La sección 2 expone de forma esquemática y con un enfoque aplicado la metodología del análisis dinámico cualitativo de sistemas en tiempo discreto. En la sección 3 se hace una breve descripción de las expectativas utilizadas en la literatura. Como aplicación de lo anterior, en la sección 4 se analiza la dinámica del equilibrio de Nash surgido en un contexto de duopolio diferenciado, tanto bajo competencia en cantidades como en precios suponiendo un esquema de expectativas basado en la regla del gradiente. La sección 5 cierra el artículo presentando las conclusiones principales.

## 2. ANÁLISIS DINÁMICO EN TIEMPO DISCRETO

Se considera un sistema dinámico $n$-dimensional en tiempo discreto:

$$T:\begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t},...,x_{n,t}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n,t+1} = f_n(x_{1,t},...,x_{n,t}) \end{cases}$$

Sus puntos de equilibrio (puntos estacionarios) vienen determinados por la condición de puntos fijos de la función *T*, $T(\overline{x}) = \overline{x}$, o equivalentemente, las soluciones del siguiente sistema de *n* ecuaciones y *n* incógnitas:

$$x_{i,t+1} = x_{i,t} = x_i, \forall i = 1,...,n \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = f_1(x_1,...,x_n) \\ .......................... \\ x_n = f_n(x_1,...,x_n) \end{cases}$$

Cada uno de estos puntos $\overline{x}^* = (x_1^*,...,x_n^*)$ puede ser equilibrio frontera si algún $x_i^* = 0$, o bien equilibrio interior si $x_i^* \neq 0,\ \forall\ i = 1,...,n.$

Nuestro objetivo es deducir qué condiciones deben cumplirse para que los equilibrios que dicho sistema presenta sean localmente estables o inestables y en este último caso, qué tipo de dinámicas pueden aparecer. Un estudio en profundidad del análisis dinámico se puede encontrar en Gandolfo (2010) y en Fernández Pérez et al. (2003). A continuación únicamente expondremos un esquema de las técnicas de análisis dinámico cualitativo que vamos a utilizar para que sirvan de guía práctica a los estudiantes. Comenzamos describiendo el caso de un sistema unidimensional para, posteriormente, extenderlo al caso de dos dimensiones.

### 2.1. Sistema unidimensional

En primer lugar consideramos sistemas dinámicos en tiempo discreto de una dimensión.

#### *2.1.1. Caso lineal*

Sea el sistema lineal $x_{t+1} = ax_t + b,$ con $a, b$ parámetros reales. Si $a \neq 1$ existe un único punto de equilibrio $x^e = \dfrac{b}{1-a}$.

En este caso es muy sencillo hacer un análisis cuantitativo y obtener la solución explícita que vienen dada por: $x_t = (x_0 - x^e)a^t + x^e$, siendo $x_0$ la condición inicial. Se tiene que:

- Si $|a| < 1 \Rightarrow x^e$ es localmente asintóticamente estable ya que $\lim_{t\to+\infty} x_t = x^e$. Esta convergencia puede ser monótona si 0 < *a* < 1 o fluctuante si -1 < *a* < 0.
- Si $|a| > 1 \Rightarrow x^e$ es inestable y la trayectoria se aleja del equilibrio de forma monótona si a > 1 o de forma fluctuante si a < -1.

*2.1.1. Caso no lineal*

Sea el sistema no lineal $x_{t+1} = f(x_t)$, en el que se supone que existe un punto de equilibrio $x^e$ (es decir, $x^e = f(x^e)$).

Si la función *f* es diferenciable en $x^e$, entonces, en un entorno suficientemente pequeño de dicho punto, se puede realizar una aproximación lineal de $f(x)$ mediante el polinomio de Taylor de grado 1: $f(x) \approx f(x^e) + f'(x^e)(x - x^e)$.

De esta manera si $|f'(x^e)| \neq 1$, el comportamiento cualitativo de las trayectorias solución del sistema no lineal inicial en un entorno del punto de equilibrio se puede deducir a partir del sistema lineal: $x_{t+1} = x^e + f'(x^e)(x_t - x^e)$.

Por tanto, se verifica:

- Si $|f'(x^e)| < 1 \Rightarrow x^e$ es localmente asintóticamente estable ( $x^e$ es un *atractor*).
- Si $|f'(x^e)| > 1 \Rightarrow x^e$ es inestable pudiendo surgir dinámicas complejas

**2.2. Sistema bidimensional**

Sea el sistema $T: \begin{cases} x_{1,t+1} = f_1(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{2,t+1} = f_2(x_{1,t}, x_{2,t}) \end{cases}$ en el que se supone que existe un punto de equilibrio $\bar{x}^e = \left(x_1^e, x_2^e\right)$ (es decir, $T(\bar{x}^e) = \bar{x}^e$)

Si la función vectorial $T = \left(f_1, f_2\right)$ es diferenciable en $\bar{x}^e$, en un entorno suficientemente pequeño de dicho punto se considera la siguiente aproximación lineal:

$$T(\bar{x}) \approx T(\bar{x}^e) + JT(\bar{x}^e)(\bar{x} - \bar{x}^e)$$

siendo $JT(\bar{x}^e)$ la matriz jacobiana de *T*, evaluada en el punto de equilibrio.

Si el módulo de los valores propios de esta matriz (es decir, las soluciones de la ecuación $Det\left(JT(\overline{x}^e)-\lambda I_2\right)=0 \Leftrightarrow \lambda^2 - Tr(JT(\overline{x}^e))\lambda + Det(JT(\overline{x}^e))=0$) son distintos de la unidad, $|\lambda_i| \neq 1, i=1{,}2,$ se tiene que la estabilidad del punto de equilibrio en el sistema inicial es la misma que en el sistema dinámico lineal:

$$\overline{x}_{t+1} = \overline{x}^e + JT(\overline{x}^e)(\overline{x}_t - \overline{x}^e)$$

Por tanto, se verifica:

- Si $|\lambda_i| < 1, i = 1,2 \;\Rightarrow\; \overline{x}^e$ es localmente asintóticamente estable ($\overline{x}^e$ es un *atractor*).
- Si $|\lambda_i| > 1$ para algún $i \;\Rightarrow\; \overline{x}^e$ es inestable pudiendo surgir dinámicas complejas.

Estas condiciones de estabilidad pueden expresarse en términos de la traza (*T*) y del determinante (*D*) de la matriz jacobiana del sistema dinámico, evaluada en el punto de equilibrio, $JT(\overline{x}^e)$. En concreto, en un contexto bidimensional, un punto de equilibrio $\overline{x}^e$ es localmente asintóticamente estable, si se verifican simultáneamente las siguientes desigualdades conocidas en la literatura como *condiciones de Schur*:

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ 1-T+D>0 \\ (ii)\ 1+T+D>0 \\ (iii)\ 1-D>0 \end{array}\right\}$$

## 3. FORMACIÓN DE EXPECTATIVAS

En un contexto de tiempo discreto, en cada periodo, la decisión de cada empresa viene determinada por su función de mejor repuesta, la cual depende de su expectativa sobre las acciones que en dicho periodo tomarán las empresas rivales. Formalmente:

$$x_{i,t+1} = R_i(x^e_{j,t+1}), i \neq j$$

donde $x^e_{j,t+1}$ representa la expectativa de la empresa *i* sobre la decisión de la empresa *j* en el momento $t+1$.

En la literatura, habitualmente se han introducido los esquemas de expectativas que se presentan a continuación.

### *3.1. Expectativas naïve*

El esquema más simple de expectativas es el denominado expectativas naïve o de Cournot, el cual supone que cada jugador espera que sus rivales no varíen su decisión con respecto a la tomada en el último periodo, $x^e_{j,t+1} = x_{j,t}$, dando lugar al modelo dinámico:

$$x_{i,t+1} = R_i\left(x_{j,t}\right),\ i \neq j,\ i = 1,\ldots,n$$

### *3.2. Expectativas adaptativas*

Bajo este esquema, cada empresa ajusta su variable de decisión proporcionalmente a la diferencia entre su mejor respuesta con expectativas naïve y el nivel elegido en el último período, dando lugar al modelo dinámico:

$$\begin{aligned} & x_{i,t+1} - x_{i,t} = \beta_i\left(R_i\left(x_{j,t}\right) - x_{i,t}\right) \\ & \Leftrightarrow x_{i,t+1} = \left(1-\beta_i\right)x_{i,t} + \beta_i R_i\left(x_{j,t}\right),\ i \neq j,\ 0 \leq \beta_i \leq 1,\ i = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

Se trata de un ajuste parcial hacia las expectativas naïve ($\beta_i = 1$).

### *3.3. Regla del gradiente basado en el beneficio marginal*

Cada empresa varía su decisión de un periodo a otro, en función de la variación del beneficio marginal. Ello da lugar a la siguiente regla dinámica de ajuste:

$$x_{i,t+1} = x_{i,t} + \alpha_i(x_{i,t})\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_{i,t}},\quad i = 1,\ldots,n$$

siendo $\alpha_i(x_{i,t}) > 0$ una función que denota la velocidad de ajuste de la empresa.

Se basa en el hecho de que las empresas son "miopes" al no tener plena información sobre las condiciones del mercado. Dicho proceso de ajuste no requiere por parte de las empresas del cálculo de sus funciones de mejor respuesta, sino que solamente necesitan una información local de sus funciones de beneficios (véase Bischi et al, 2010). De este modo, aumentan o disminuyen el valor de la variable de decisión en función del signo positivo o negativo del beneficio marginal alcanzado en el período anterior, respectivamente.

# 4. APLICACIÓN: DUOPOLIO DINÁMICO CON PRODUCTO DIFERENCIADO

A continuación desarrollaremos una versión del modelo de Fanti y Gori (2012) quienes, tomando como referencia el modelo de Shing y Vives (1984), analizan la estabilidad del equilibrio de Cournot resultante de la competencia entre dos empresas que producen cantidades de dos variedades de un bien diferenciado (el análisis del modelo estático formaría parte de los contenidos de un programa de microeconomía avanzada del grado).

El sistema inverso de demanda de ambas variedades viene dado por:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - q_1 - dq_2 \\ p_2 &= 1 - dq_1 - q_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Despejando las cantidades se obtiene el sistema directo de demanda:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1 - d - p_1 + dp_2}{1 - d^2} \\ q_2 &= \frac{1 - d - p_2 + dp_1}{1 - d^2} \end{aligned} \qquad (2)$$

El parámetro $d$ indica el grado de diferenciación del producto. Consideramos que $0 < d < 1$, de manera que las variedades son sustitutivas desde el punto de vista de la demanda. En el caso extremo $d = 1$, no existe diferenciación del producto y para $d = 0$, ambas variedades son independientes.

A efectos de simplificación y sin pérdida de generalidad, supondremos que las empresas tienen costes marginales nulos. Nuestro objetivo es analizar la influencia del grado de sustituibilidad entre las variedades sobre la estabilidad del equilibrio de Nash, sabiendo que las empresas, en cada momento del tiempo, ajustan su variable de decisión (cantidad o precio), de acuerdo con la denominada regla del gradiente.

## 4.1. Competencia en cantidades

Dado el sistema inverso de demanda (1), en el momento $t$, el beneficio de las empresas viene dado por:

$$\begin{aligned}\Pi_{1,t} &= (1-q_{1,t}-dq_{2,t})q_{1,t}\\ \Pi_{2,t} &= (1-q_{1,t}-dq_{2,t})q_{1,t}\end{aligned} \tag{3}$$

Como ya se ha señalado, según el esquema de expectativas basado en la regla del gradiente, el mecanismo de ajuste de las cantidades de un periodo a otro viene expresado por:

$$q_{i,t+1} = q_{i,t} + \alpha_i(q_{i,t})\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_{i,t}}, \quad i=1,2 \tag{4}$$

Supondremos que la velocidad de ajuste es una función lineal de la cantidad $\alpha_i(q_{i,t}) = \alpha q_{i,t}$, $i=1,2$, con $\alpha > 0$.

De este modo, se deduce el sistema dinámico bidimensional no lineal:

$$T^C : \begin{cases} q_{1,t+1} = q_{1,t} + \alpha q_{1,t}(1-2q_{1,t}-dq_{2,t}) \\ q_{2,t+1} = q_{2,t} + \alpha q_{2,t}(1-2q_{2,t}-dq_{1,t}) \end{cases} \tag{5}$$

Como se ha dicho, los puntos de equilibrio de este sistema dinámico son las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} q_1 = q_1 + \alpha q_1(1-2q_1-dq_2) \\ q_2 = q_2 + \alpha q_2(1-2q_2-dq_1) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtienen tres puntos de equilibrio frontera, $(0,0), \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, y un único equilibrio interior que es el equilibrio de Cournot-Nash:

$$E^* = \left(\frac{1}{2+d}, \frac{1}{2+d}\right) \tag{6}$$

*Resultado 1*

*Suponiendo que ambas empresas ajustan sus cantidades de acuerdo con la regla del gradiente basado en el beneficio marginal, el equilibrio de Cournot-Nash es localmente asintóticamente estable si* $\alpha < \alpha^C = 2$.

*Prueba:*

La matriz jacobiana del mapa $T^C$, evaluada en $E^*$, viene dada por:

$$JT^C(E^*) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{2\alpha}{2+d} & \dfrac{-\alpha d}{2+d} \\ \dfrac{-\alpha d}{2+d} & 1-\dfrac{2\alpha}{2+d} \end{pmatrix}$$

cuya traza y determinante son, respectivamente, $T = 2 - \dfrac{4\alpha}{2+d}$ y $D = T - 1 + \alpha^2 \dfrac{2-d}{2+d}$.

Aplicando las condiciones de Schur, se tiene que la condición (*i*) se cumple para todos los valores de los parámetros.

La condición (*iii*) se verifica siempre que el valor del parámetro de la velocidad de ajuste sea tal que $\alpha < \alpha_1 = \dfrac{4}{2-d}$ .

La condición (*ii*) se satisface cuando el valor del parámetro $\alpha$ pertenece al conjunto $(0,\alpha_2) \cup (\alpha_3, +\infty)$, siendo $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = 2\dfrac{2+d}{2-d}$.

Comparando $\alpha_1, \alpha_2$ y $\alpha_3$ se deduce que $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$, por lo que el equilibrio de Cournot-Nash es localmente asintóticamente estable siempre que $\alpha < \alpha_2 = 2$ .

Por tanto, bajo competencia en cantidades, la estabilidad del equilibrio es independiente del grado de diferenciación del producto.

En las siguientes figuras se representan diversas simulaciones del sistema dinámico (5), realizadas con el software *Mathematica*, para el valor del parámetro $d = \dfrac{3}{4}$ y sucesivos valores del parámetro de velocidad de ajuste de las empresas. Se observa cómo si la velocidad de ajuste toma un valor menor que el del umbral de estabilidad, $\alpha^C = 2$, la trayectoria solución converge al equilibrio de Cournot-Nash (Figura 1). Sin embargo, al superar dicho umbral, el equilibrio de Cournot-Nash pierde la estabilidad apareciendo *atractores* (conjuntos a los que convergen las trayectorias cuya condición inicial es suficientemente cercana al punto de equilibrio) cada vez más complejos como son 2-ciclos (Figura 2), $2^n$-ciclos (en la Figura 3 un $2^3$-ciclo) o *atractores extraños* (Figura 4).

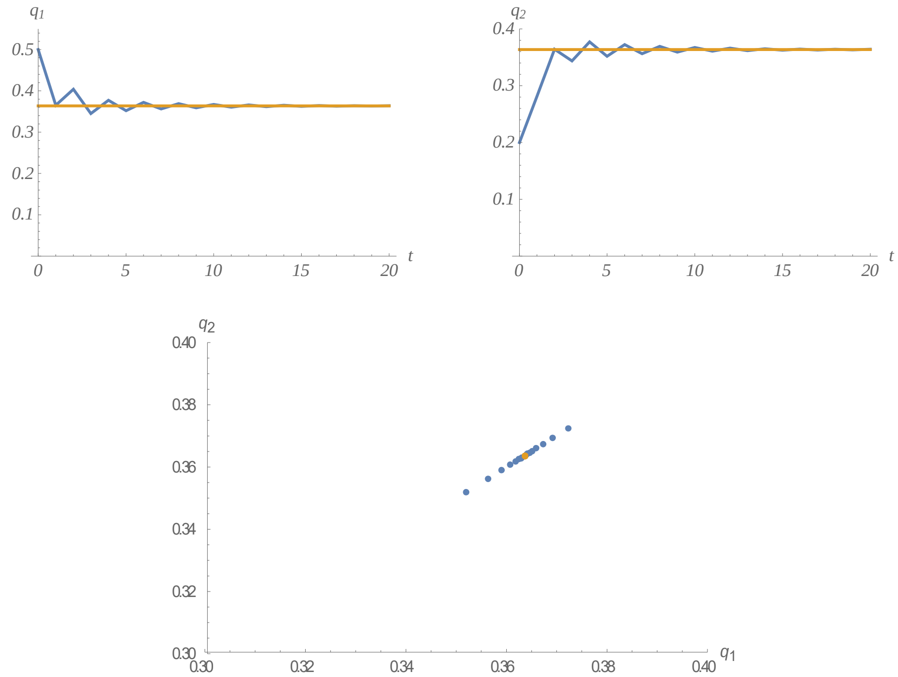


Figura 1. $\alpha = 1.8, q_{1,0} = 0.5, q_{2,0} = 0.2$

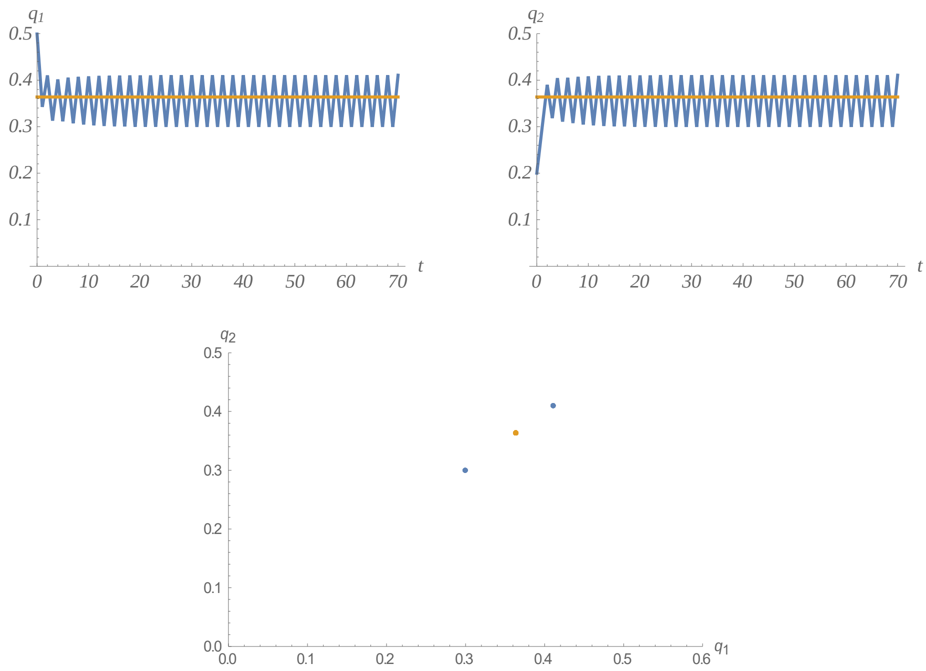


Figura 2. $\alpha = 2.1, q_{1,0} = 0.5, q_{2,0} = 0.2$

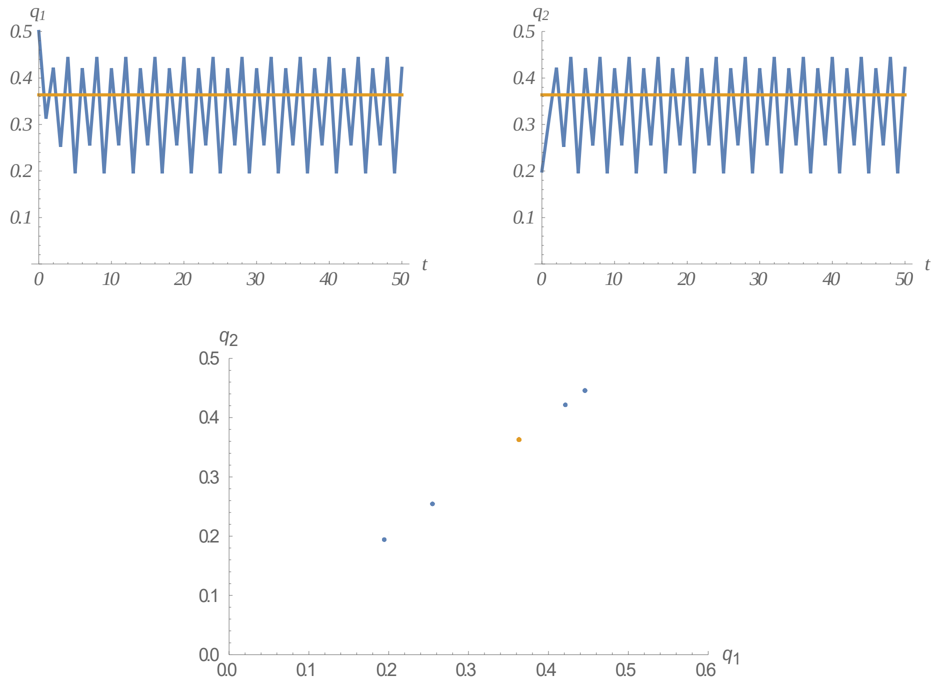


Figura 3. $\alpha = 2.5, q_{1,0} = 0.5, q_{2,0} = 0.2$

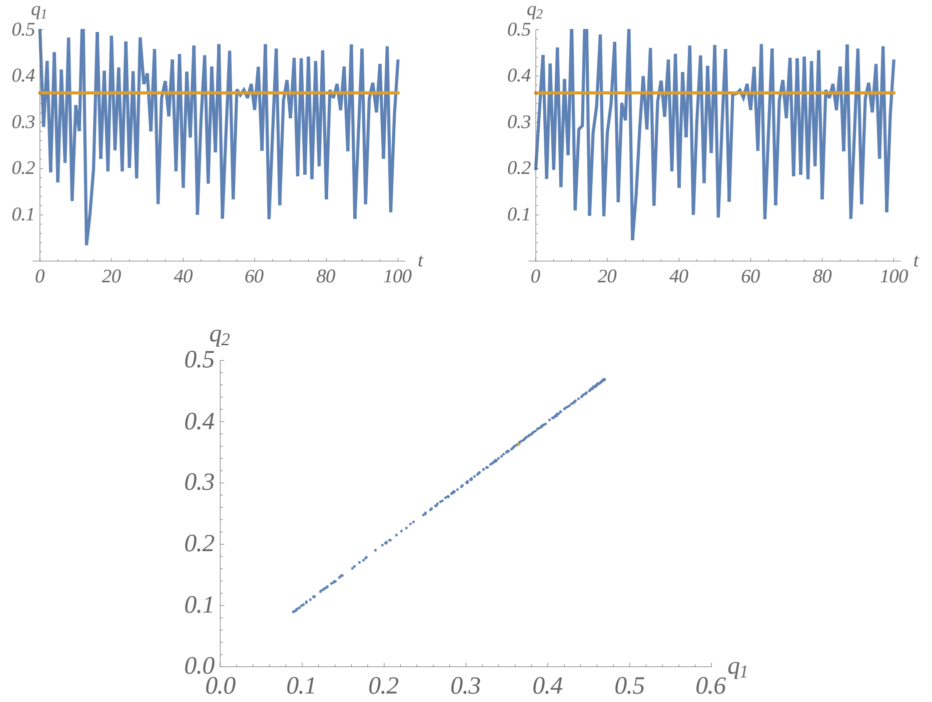


Figura 4. $\alpha = 2.8, q_{1,0} = 0.5, q_{2,0} = 0.2$

### 4.2. Competencia en precios

Bajo competencia en precios, considerando el sistema directo de demanda (2), las funciones de beneficios vienen expresadas como:

$$\begin{aligned} \Pi_{1,t} &= \frac{p_{1,t}(1-d-p_{1,t}+dp_{2,t})}{1-d^2} \\ \Pi_{2,t} &= \frac{p_{2,t}(1-d-p_{2,t}+dp_{1,t})}{1-d^2} \end{aligned} \tag{7}$$

De acuerdo con la regla del gradiente, el mecanismo de ajuste de los precios de un periodo a otro viene expresado por $p_{i,t+1} = p_{i,t} + \alpha p_{i,t} \frac{\partial \Pi_i}{\partial p_{i,t}}, i = 1,2$, dando lugar al sistema dinámico:

$$T^B : \begin{cases} p_{1,t+1} = p_{1,t} + \alpha p_{1,t} \dfrac{1-d+dp_{2,t}-2p_{1,t}}{1-d^2} \\ p_{2,t+1} = p_{2,t} + \alpha p_{2,t} \dfrac{1-d+dp_{1,t}-2p_{2,t}}{1-d^2} \end{cases} \tag{8}$$

Este sistema tiene tres equilibrios frontera $(0,0), \left(0, \frac{1-d}{2}\right)$ y $\left(\frac{1-d}{2}, 0\right)$ y un equilibrio interior que constituye el equilibrio de Bertrand-Nash:

$$E_B^* = \left(\frac{1-d}{2-d}, \frac{1-d}{2-d}\right) \tag{9}$$

*Resultado 2*

*Suponiendo que ambas empresas ajustan sus precios de acuerdo con la regla del gradiente basado en el beneficio marginal, el equilibrio de Bertrand-Nash es localmente asintóticamente estable si* $\alpha < \alpha^B = \frac{2(1+d)(2-d)}{2+d}$.

*Prueba:*

La matriz jacobiana de $T^B$, evaluada en $E_B^*$, viene dada por:

$$JT^B(E_B^*) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2\alpha}{(1+d)(2-d)} & \dfrac{\alpha d}{(1+d)(2-d)} \\ \dfrac{\alpha d}{(1+d)(2-d)} & 1 - \dfrac{2\alpha}{(1+d)(2-d)} \end{pmatrix}$$

cuya traza y determinante son $T = 2 - \dfrac{4\alpha}{(1+d)(2-d)}$ y $D = T - 1 + \dfrac{\alpha^2(2+d)}{(1+d)^2(2-d)}$, respectivamente.

Analizando el cumplimiento de las condiciones de Schur, se deduce que la condición (*i*) se verifica para todos los valores de los parámetros.

La condición (*iii*) viene garantizada para el conjunto de valores del parámetro de la velocidad de ajuste tales que $\alpha < \alpha_1 = \dfrac{4(1+d)}{2+d}$ .

La condición (*ii*) se cumple para los valores del parámetro $\alpha$ pertenecientes al conjunto $(0,\alpha_2)\cup(\alpha_3,+\infty)$, siendo $\alpha_2 = \dfrac{2(1+d)(2-d)}{2+d}$ y $\alpha_3 = 2(1+d)$.

Comparando los valores de $\alpha_1, \alpha_2$ y $\alpha_3$ se deduce que $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$, por lo que el equilibrio de Bertrand-Nash es localmente asintóticamente si:

$$\alpha < \alpha_2 = \alpha^B = \frac{2(1+d)(2-d)}{2+d}$$

Se deduce así que, considerando competencia en precios, el umbral que garantiza la estabilidad del equilibrio depende del grado de diferenciación del producto. Derivando la expresión de $\alpha^B$ respecto a *d*, se tiene que:

$$\frac{\partial \alpha^B}{\partial d} = \frac{-2d(4+d)}{(2+d)^2} < 0,\ \forall\ 0 < d < 1$$

Por tanto, bajo competencia en precios, una mayor diferenciación del producto (menor valor de *d*), aumenta el valor del umbral $\alpha^B$, favoreciendo la estabilidad del equilibrio de Nash.

El comportamiento dinámico del sistema (8) cuando la velocidad de ajuste supera el umbral es análogo al caso de competencia en cantidades.

## 5. CONCLUSIONES

Los libros de texto utilizados en los grados de Economía contienen modelos microeconómicos que se caracterizan principalmente por dos aspectos: Por una parte, suponen que los agentes económicos disponen de información completa, lo cual justifica que todos ellos presenten una conducta racional. Por otra parte, en su mayoría, son analizados desde una perspectiva estática y de estática comparativa, eludiendo la influencia del tiempo en los resultados.

Desde nuestro punto de vista, la incorporación del análisis dinámico, junto con el reconocimiento de que los agentes toman sus decisiones en condiciones de racionalidad limitada, supone una importante extensión del tratamiento convencional, ya que pueden surgir resultados que el análisis estático es incapaz de proporcionar.

Por otro lado, dicha línea de actuación puede igualmente cubrir objetivos importantes desde el punto de vista didáctico, ya que pone de manifiesto la necesidad del uso de herramientas matemáticas que todo graduado en Economía debe conocer y ser capaz de aplicar.

En este sentido, una de las áreas más significativas, aunque no la única, es el estudio de mercados de competencia imperfecta, dado que en ellos es crucial la interdependencia entre las decisiones tomadas por las empresas. Por ello, en este trabajo hemos presentado un ejemplo en el que se estudia la estabilidad del equilibrio de Nash resultante de la competencia, tanto en cantidades como en precios, en un duopolio diferenciado en el que las empresas deciden en condiciones de racionalidad limitada. En ambos casos se deduce un umbral en la velocidad de ajuste de las empresas por debajo del cual la estabilidad del equilibrio de Nash está garantizada y una vez superado el mismo aparecen comportamientos dinámicos fluctuantes alrededor del equilibrio y cada vez más complejos.

Del análisis efectuado se ha deducido que el grado de diferenciación del producto influye en la estabilidad del equilibrio únicamente en un contexto de competencia en precios. En concreto, una mayor diferenciación del producto constituye un factor estabilizador del equilibrio.

Desde el punto de vista microeconómico, dicho ejemplo pone de manifiesto que la incorporación del análisis dinámico supone un valor añadido con respecto al enfoque puramente estático. Además de las ya conocidas consecuencias que desde el punto de vista de la eficiencia tiene la elección de uno u otro tipo de competencia, la dinamización del modelo permite extraer conclusiones sobre otra de las propiedades asociadas al equilibrio, como es su estabilidad.

Además, el ejemplo desarrollado aporta un valor didáctico importante. Muestra una clara vinculación entre el empleo de conocimientos matemáticos y el análisis microeconómico. Concretamente, en el modelo analizado se han utilizado la mayoría de los tópicos que todo graduado en Economía debe conocer, tales como, la formulación y resolución de programas de optimización, cálculo matricial y valores propios, el análisis dinámico cualitativo en tiempo discreto y la simulación de sistemas dinámicos.

Podemos afirmar que el proceso de ajuste utilizado supone implícitamente una racionalidad excesivamente limitada por parte de las empresas, ya que ignoran el hecho de que sus acciones presentes influirán en las acciones futuras de sus competidores. De hecho, una extensión a desarrollar sería la consideración de reglas de decisión basadas en el aprendizaje o la imitación, lo cual supondría una conexión con la teoría de los juegos evolutivos, pudiendo constituir una interesante línea de referencia para futuros trabajos de fin de grado y de máster.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BISCHI, G.I., CHIARELLA, C., KOPEL, M. and SZIDAROVSZKY, F. (2010). Nonlinear Oligopolies. Stability and Bifurcations. Ed. Springer.

CABRAL, L. (2012). Oligopoly Dynamics. International Journal of Industrial Organization 30, pp. 278-282.

FANTI, L. and GORI, L. (2012). The dynamics of a differentiated duopoly with quantity competition. Economic Modelling 29, pp. 421-427.

FERNÁNDEZ PÉREZ, C., VÁZQUEZ HERNÁNDEZ, F.J. y VEGAS MONTANER, J.M. (2003): Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas Dinámicos. Ed. Thomson.

GANDOLFO, G. (2010). Economic Dynamics. Springer.

OKUGUCHI, K. (1976). Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Expectations and Stability in Oligopoly Models. Springer-Verlag.

SINGH, N. and VIVES, X. (1984). Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly. The RAND Journal of Economics 15 (4), pp. 546-554.