El lenguaje formal y las demostraciones en Matemáticas para la Facultad de Economía y Empresa

Cascón, J.M. (casbar@usal.es)
Cesteros, F. (fcesteros@usal.es)
García, M.D. (dgarcia@usal.es)
García-Bernalt, B. (bgarcia@usal .es)
Manrique, M.A. (amg@usal.es)
Santos, G. (santos@usal.es)

Dpto Economía e Historia Económica. Univesidad de Salamanca
Edificio FES. Campus Miguel de Unamuno. 37007 Salamanca

RESUMEN

Esta comunicación presenta un Proyecto de Innovación y Mejora Docente de la Universidad de Salamanca que pretende paliar ciertas carencias detectadas en estudios previos, entre las que destacan el desconocimiento del lenguaje matemático (notación, formulación) y el déficit de habilidades o técnicas para la resolución creativa de problemas (demostraciones).

En este proyecto se pretende introducir a los alumnos de las Facultades de Economía y Empresa en el lenguaje formal matemático, presentar las principales técnicas de demostración y desarrollar la actividad creativa del estudiante. Los alumnos de nuestras titulaciones desconocen la notación y estructuras formales en matemáticas, lo que lastra de forma dramática su proceso de aprendizaje en asignaturas como Álgebra o Análisis Matemático y se extiende después a otras materias del Grado.

La demostración es un proceso creativo que en general supone una gran dificultad para el estudiante. Este tipo de razonamientos no solo son útiles en materias relacionadas con las matemáticas, sino que están presentes en la resolución de cualquier problema entendido en sentido amplio. Conocer en profundidad las principales técnicas empleadas en los razonamientos matemáticos es fundamental para entender los contenidos de las materias instrumentales del primer curso de Grado y poder derivar después resultados de forma autónoma.

Palabras clave: pensamiento matemático, lenguaje formal, demostraciones matemáticas.
Área temática: A1

ABSTRACT

In this paper we present the main topics included in a Teaching Project of the University of Salamanca. The project intends to overcome certain deficiencies detected in previous studies, such as the lack of mathematical language (notation, formulation) and the deficit of skills or techniques for mathematical proofs.

This project aims to introduce the students of the Faculties of Economics and Business in the formal mathematical language and to present the main techniques used in mathematical proofs since most of them do not know the notation and formal language in Mathematics. This feature affects their learning ability in Mathematical topics such as Algebra or Mathematical Analysis and many other subjects in their degrees.

The mathematical proof is a creative process that may constitute a particular challenge for our students. Being able to understand the main techniques used in mathematical proofs is useful not only in Mathematical subjects but it is also important in the resolution of many problems in a broad sense.

1 INTRODUCCIÓN

En los cursos 2016/2017 y 2017/2018 los autores (Cascón y otros (2017a, 2017b, 2018a, 2018b)) participaron en dos proyectos de innovación y mejora docente enmarcados en el Programa de Mejora de la Calidad de la Universidad de Salamanca. En el primer proyecto se desarrollaron diversos materiales para la implementación de un Curso Cero de Matemáticas para la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Salamanca (disponibles en el Repositorio Documental de la Universidad de Salamanca (GREDOS) `http://hdl.handle.net/10366/133328`), y en el segundo dicho material fue revisado y analizado por alumnos y profesores de Enseñanza Secundaria (`http://hdl.handle.net/10366/138557`). El estudio desarrollado detectó determinadas carencias, entre las que destacamos, el desconocimiento del lenguaje matemático (notación, formulación) y el déficit de habilidades o técnicas para la resolución creativa de problemas (demostraciones). Por otro lado, se nos recomendó incorporar al material temas relacionados con Estadística y Probabilidad, cuestión abordada por otro proyecto de innovación docente en el que participan varios compañeros del Departamento del perfil de Estadística.

Este tercer proyecto surge para dar continuidad a los anteriores e intentar paliar las deficiencias detectadas. Sus principales objetivos son introducir al alumno en el lenguaje formal matemático, presentar las principales técnicas de demostración y desarrollar la actividad creativa del estudiante.

El estudio realizado durante el último año ha permitido corroborar que los alumnos de nuestras titulaciones desconocen la notación y estructuras formales en matemáticas, lo que lastra de forma dramática su proceso de aprendizaje en asignaturas con alto contenido abstracto como Álgebra o Análisis Matemático, y que se extiende después a otras materias del Grado.

Según el diccionario de la Real Academia Española (RAE) demostar es: “hacer ver la verdad de algo mediante un razonamiento o prueba”. Parafraseando esta definición, una demostración en Matemáticas consiste en hacer ver el valor (de verdad o falsedad) de una proposición utilizando la lógica como herramienta fundamental.

La demostración es ante todo un proceso creativo que requiere capacidad de sintésis y abstracción. Esta es la principal razón por la que las demostraciones suelen provocar rechazo entre nuestros estudiantes. Durante las etapas de educación primaria y secundaria, las Matemáticas básicamente consisten en aprender una determinada técnica que después se repite para que el alumno la asimile convenientemente. Esta reiteración tiene por objetivo que el estudiante adquiera determinadas destrezas (por ejemplo de cálculo). En un determinado momento, los contenidos matemáticos evolucionan, aparecen ejercicios o problemas que no se resuelven con un procedimiento establecido (algoritmo o *receta*), sino que requieren cierta creatividad o imaginación. Esta situación puede desconcertar al estudiante y generar frustación. Una situación similar se plantea cuando en Matemáticas comienzan a aparecen teoremas y sus demostraciones.

> 'El problema básico para escribir matemáticas es el mismo que para escribir biología, una novela, o las instrucciones para montar un clavicémbalo: el problema es comunicar una idea. Para hacerlo, y para hacerlo con claridad, debes tener algo que decir, y debes tener alguien a quien decírselo; debes organizar lo que quieres decir, y organizarlo en el orden en que quieres decirlo; debes escribirlo, reescribirlo, y reescribirlo varias veces, y debes estar dispuesto a pensar mucho en ello y a trabajar firmemente en los detalles mecánicos como la dicción, la notación, y la puntuación. Eso es todo lo que hay que hacer.'

La cita pertenece al matemático húngaro Paul R. Halmos (1916-2006) (ver HALMOS (1970)), y en realidad resume mucho de lo fundamental de este proyecto.

El objetivo de este proyecto es presentar ciertas estrategias que pueden ayudar a nuestros alumnos a entender una demostración y a desarrollar nuevas demostraciones. Estamos convencidos que se puede **aprender a demostrar**, aunque como en casi todas las facetas de la vida, existen dos factores determinantes para alcanzar el éxito:

- Esfuerzo, dedicación. La asimilación de los razonamientos utilizados en una demostración es un trabajo personal que requiere tiempo.

- Experiencia. Al enfrentarse a una demostración, identificar un problema similar del que se conoce la resolución es de gran ayuda.

Nuestro objetivo **no es demostrar** ciertos resultado clásicos, que por otro lado pueden encontrarse en cualquier manual, sino que nuestro propósito es describir de dónde surgen y cuáles son los razonamientos lógicos que nos permiten llevar a cabo estas demostraciones. Por supuesto, los argumentos no son únicos y existen otras alternativas que se podrían explorar. Esto dará lugar a que nuestras exposiciones puedan parecer demasiado extensas (o incluso tediosas) a un lector *avanzado*. En ese caso, el lector debería intentar realizar las demostraciones por sí mismo y después comparar el resultado con el dado.

El resto de la publicación se organiza de la siguiente forma: en la sección 2 presentamos el material desarrollado (en la subsección 2.1 describimos los epígrafes dedicados a cómo preparar una demostración y en la subsección 2.2 indicamos cómo demostrar de dos formas distintas la fórmula que calcula la suma de los primeros números naturales). Las conclusiones y líneas de trabajo futuras aparecen en la sección 3.

2 MATERIAL DESARROLLADO

El material desarrollado incluye los siguientes capítulos:

1. Los sistemas matemáticos de símbolos y la escritura matemática

    1.1. Introducción: algún ejemplo y un círculo vicioso

    1.1.1. Ejercicios y cuestiones

    1.2. Características y problemas del lenguaje simbólico matemático

    1.2.1. Ejercicios y cuestiones

En los dos primeros capítulos nos centramos en motivar y discutir la necesidad del razonamiento matemático e introducir el lenguaje de la lógica.

En el capítulo 1 introducimos los sistemas matemáticos de símbolos y la escritura matemática, así como sugerencias para escribir matemáticas.

La siguiente tabla presenta los símbolos matemáticos más comunes descritos en la sección 1.3.2.

$\boxed{\mathbb{N} \mid \mathbb{Z} \mid \mathbb{Q} \mid \mathbb{I} \mid \mathbb{R} \mid \mathbb{C}}$	Conjunto de los números: *naturales | enteros | racionales | irracionales | reales | complejos*
$\boxed{\infty \mid -\infty}$	*infinito | menos infinito*
$\boxed{= \mid \neq}$	*igual a | distinto a*
$\boxed{+ \mid - \mid *, \times, \cdot \mid \div, /}$	*suma, más | resta, menos | producto, por | división, partido por*
$\boxed{\pm \mid \mp}$	*más menos | menos más*
$\boxed{(\ ) \mid [\ ] \mid \{\ \} \mid \langle\rangle \mid \lvert\rvert}$	*paréntesis | corchetes | llaves | corchetes angulares | valor absoluto de*
$\boxed{\sum \mid \prod}$	*sumatorio (suma desde... hasta...) | producto desde... hasta...*
$\boxed{\ldots, \vdots, \ddots}$	*y así sucesivamente hasta | etc.*
$\boxed{! \mid \binom{n}{m}}$	*factorial de | símbolo binomial n sobre m*
$\boxed{< \mid \leq, <= \mid > \mid \geq, >=}$	*menor que | menor o igual que | mayor que | mayor o igual que*
$\boxed{\prec \mid \preccurlyeq \mid \sim \mid \succ \mid \succcurlyeq}$	*estrictamente menos preferido a | menos preferido o indiferente a | | indiferente a | estrictamente preferido a | preferido o indiferente a*
$\boxed{\vee \mid \wedge \mid \neg}$	*disyunción, o | conjunción, y | negación, no*
$\boxed{\Rightarrow \mid \Leftarrow \mid \Leftrightarrow}$	*implica, si ... entonces ...| para ... es suficiente ...| si y solo si*
$\boxed{\{\ \} \mid \in \mid \notin}$	*conjunto formado por/definido por | pertenece a | no pertenece a*
$\boxed{\forall \mid \exists \mid \nexists}$	*para todo | existe algún | no existe ningún*
$\boxed{\subset \mid \subseteq \mid \nsubseteq}$	*incluido estrictamente en | incluido en | no incluido en*
$\boxed{\bigcup \mid \bigcap \mid \varnothing}$	*unión | intersección | conjunto vacío*

Tabla 1: Símbolos matemáticos más comunes

En el capítulo 2 introducimos la lógica de proposiciones insistiendo de nuevo en que el lenguaje matemático tiene que ser formal y riguroso. En la primera parte presentamos las operaciones con proposiciones (negación, conjunción y disyunción de dos proposiciones) así como las leyes de De Morgan que establecen la relación entre negación, conjunción y disyunción de proposiciones. En la segunda parte presentamos las proposiciones condicionales, explicamos las condiciones necesaria y suficiente e introducimos las proposiciones recíproca, contraria y contrarrecíproca de una proposición condicional $p \Rightarrow q$.

El capítulo 3 se divide en dos secciones. En la primera damos una serie de indicaciones y pautas para preparar una demostración (como se detalla en la siguiente subsección) y en la segunda describimos las principales técnicas de demostración que se utilizan en Matemáticas y las ilustramos con numerosos ejemplos.

Al terminar la exposición de cada una de las proposiciones presentamos la demostración tal y como podría aparecer en un libro de Matemáticas. A menudo estas pruebas son demasiado concisas, omiten cálculos intermedios y presuponen determinados conocimientos. Estas son las principales razones que hacen que la lectura de un manual de Matemáticas no sea sencilla y requiera cierto entrenamiento. Por otro lado, cuando leemos una demostración se nos descubre *la ruta correcta* pero no se comentan los intentos infructuosos, los ensayos estériles que son la base del método científico (*ensayo y error*). En este sentido, en este proyecto hemos tratado de ilustrar estos aspectos, algo que sería inviable en un libro común.

2.1 Preparando una demostración

La sección 3.2 de los contenidos desarrollados está dedicada a enseñar a los alumnos cómo preparar una demostración. Henos considerado los siguientes apartados:

1. Analizar y clasificar la proposición

2. Revisar contenidos relacionados
3. Seleccionar estrategia de demostración
4. Desarrollar la demostración
5. Revisar y mejorar

Comenzamos dando algunas pautas para afrontar una demostración (ver tabla 2). Se trata de una serie de recomendaciones para organizar la información y decidir la estrategia a seguir.

Resolución Problema	**Esquema demostración**
1. Entender el problema	1. Analizar y clasificar la proposición
2. Buscar herramientas	2. Revisar contenidos relacionados
3. Diseñar un plan	3. Seleccionar estrategia de demostración
4. Ejecutar el plan	4. Desarrollar la demostración
5. Mirar hacia atrás	5. Revisar y mejorar

Tabla 2: Esquema de demostración

Para ilustrar cada uno de estos pasos, proponemos una serie de enunciados o proposiciones que serán discutidos detalladamente a lo largo del capítulo 3.

$\mathbf{P_1}$: Si n es un entero impar entonces $3n+7$ es entero par

$\mathbf{P_2}$: Un triángulo rectángulo XYZ con hipotenusa z tiene área $z^2/4$ si y solo si es isósceles

$\mathbf{P_3}$: Sea $n \in \mathbb{N}$. Si n^2 es par entonces n es par

$\mathbf{P_4}$: $\sqrt{2}$ es irracional

$\mathbf{P_5}$: $1+2+\ldots+n = \dfrac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbf{P_6}$: Existen $a, b \in \mathbb{I}$ tal que $a^b \in \mathbb{Q}$.

$\mathbf{P_7}$: Sea $k > 0$, entonces $|x| \leq k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$

$\mathbf{P_8}$: Sea $\{a_n = cr^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión (progresión) geométrica de razón $r > 0$.

Determinar la suma de los n primeros términos.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n.$$

A continuación, analizamos y clasificamos la proposición que se quiere demostrar. Para ello, se deben responder tres cuestiones:

- ¿A qué tipo de proposición nos enfrentamos (*implicación/doble implicación; universal/existencial*)?
- ¿Qué resultados se están asumiendo (*hipótesis*)?
- ¿Qué se debe demostrar (*tesis*)?

La primera cuestión hace referencia a la clasificación del enunciado o proposición. Existen diferentes criterios para clasificar proposiciones (Ibañes y Ortega (1997)), aunque en este momento solo nos interesa la relación del enunciado con respecto a la implicación y al cuantificador. En relación a la implicación distinguimos:

- **Implicación simple (condición necesaria o suficiente)**. Se trata de resultados que pueden ser reescritos de la siguiente forma:

  Si se asume . . . **entonces** . . .

  La estructura lógica asociada es $\boxed{p \Rightarrow q}$. La expresión anterior también puede leerse diciendo que p es condición suficiente para q o que q es condición necesaria de p.

- **Doble implicación (condición necesaria y suficiente)**. En este caso el enunciado establece una equivalencia entre dos resultados. Podrían ser reescritos de la siguiente forma:

  Bajo ciertos supuestos.
  Se tiene . . . . **si y solo si** se tiene . . .

La estructura lógica asociada es $\boxed{p \Leftrightarrow q}$. La expresión anterior también se lee diciendo que p es condición necesaria y suficiente para q. Puesto que todo problema con esta estructura siempre podría ser descompuesto en dos implicaciones simples ($p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$), suele ser habitual abordar la demostración de una doble implicación demostrando las dos implicaciones simples correspondientes.

Por otro lado, con respecto al cuantificador distinguimos:

- **Cuantificador universal**. Se trata de proposiciones que se enuncian para todos los *objetos* de un determinado dominio (digamos aquellos que satisfacen determinadas condiciones). A menudo el cuantificador viene expresado en forma implícita, no obstante, el enunciado siempre se podría reescribir de la siguiente forma:

  Para todo ... que satisface ... se verifica ...

- **Cuantificador existencial**. En este tipo de proposiciones se **busca** un elemento particular dentro del dominio que satisface determinada propiedad. En general, siempre podrán ser reescritas de la siguiente forma:

  Bajo ciertos supuestos
  Existe ... que verifica ...

  Este tipo de proposiciones, a su vez pueden ser de existencia simple, existencia y unicidad o de imposibilidad (niegan la existencia).

Toda proposición expresada en términos del cuantificador universal puede expresarse en términos del cuantificador existencial utilizando la negación, y recíprocamente.

Una vez clasificada la proposición, se debe establecer qué enunciados se asumen como ciertos, es decir, aceptamos como **hipótesis** y qué resultados se deben demostrar, es decir constituyen la **tesis**. En ocasiones las hipótesis pueden aparecer de forma implícita y las tesis formar parte del problema. Corresponden a este segundo tipo los enunciados o problemas que plantean una cuestión. La solución del problema es la tesis (o parte de ella), y obviamente desconocida.

Tras clasificar y analizar las proposiciones $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_8}$, en la siguiente sección recordamos la conveniencia de relacionar el enunciado que se quiere demostrar con alguno de los campos matemáticos (geometría, álgebra, análisis, probabilidad, etc.) y buscar (o recordar) información relevante relacionada. Esta etapa está ligada a los conocimientos adquiridos y asimilados (lo que habitualmente solemos denominar *base*). Evidentemente, una buena formación será una garantía de éxito, de forma análoga, disponer de más y mejores herramientas contribuyen a la resolución eficiente de un problema (en sentido amplio).

En la siguiente sección presentamos algunas de las técnicas de demostración más usuales y proporcionamos algunas pautas que pueden permitir seleccionar la más adecuada en cada caso. Se trata de una serie de recomendaciones o sugerencias que deben servir de guía para iniciar el proceso de demostración, pero que **no pueden** ser tomadas de forma categórica y que son difícilmente generalizables. Es decir, no existe un algoritmo, procedimiento o receta que permita demostrar.

Agrupamos las técnicas de demostración en tres grandes grupos:

- **Grupo 1**: Trabajan sobre la implicación. Tras identificar la proposición $p \Rightarrow q$, estos métodos *manipulan* las hipótesis hasta obtener la tesis. Existen dos subgrupos: los que trabajan directamente con la proposición $p \Rightarrow q$ (prueba directa y proceso progresivo-regresivo) y los que modifican la proposición para su tratamiento (paso al contrarecíproco y reducción al absurdo o demostración por contradicción).

  La prueba directa es la estrategia básica y más sencilla, parte de las hipótesis y las manipula convenientemente con las correspondientes herramientas para obtener la tesis. El proceso progresivo regresivo supone una generalización del método anterior. En este caso se trabaja de forma bidireccional, tanto con la hipótesis p como con la tesis q con el objetivo de obtener enunciados equivalentes que permitan concluir:

$$\boxed{p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \ldots\ldots \Leftrightarrow p_n \quad \Rightarrow \quad q_n \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow q_2 \Leftrightarrow q_1 \Leftrightarrow q}$$

El paso entre enunciados se realiza a través de la denominada pregunta de abstracción (ver Solow (1993)). Las proposiciones $\mathbf{P_1}$ y $\mathbf{P_2}$ serán respectivamente demostradas con estos procedimientos.

El método de paso al contrarecíproco demuestra $\neg\, q \Rightarrow \neg\, p$ (en lugar de la equivalente $p \Rightarrow q$). La proposición $\mathbf{P_3}$ será analizada con este procedimiento, es decir, se reescribirá como: "Sea $n \in \mathbb{N}$, si no es impar entonces n^2 es impar".

Por último, la demostración por reducción al absurdo asume p y $\neg q$ y trata de obtener una contradicción (o absurdo), desde el que se concluye que $\neg q$ no es posible y por lo tanto debe serlo q. Se trata de un método indirecto y de gran potencia. La demostración de la proposición $\mathbf{P_4}$ ilustra este método: se asumirá que $\sqrt{2}$ es racional, y por tanto se puede escribir como fracción irreducible. Tras un razonamiento lógico (y correcto) se probará que la fracción no puede ser irreducible.

- **Grupo 2**: Aplican un método de *reducción*. Este tipo de procedimientos tratan de reducir la complejidad del problema. Bien porque el problema puede dividirse en casos o bien porque depende de un parámetro (dimensión, grado de polinomio, $n \in \mathbb{N}$) que hace que para valores bajos del mismo el resultado sea sencillo de demostrar.

  En el primer subgrupo estaríamos hablando de la demostración por casos. El problema se divide en diferentes casos que deben ser más fáciles de tratar.

Este procedimiento debe después combinarse con otras estrategias (Grupo 1 o Grupo 3). La demostración de la proposición $\mathbf{P_7}$ ilustra este procedimiento.

En el segundo subgrupo nos referimos a la denominada *inducción matemática*. Básicamente se demuestra la proposición para un primer número natural, y después se debe demostrar que si la proposición es verdadera para cierto número también los será para el siguiente. La concatenación de ambos resultados permite concluir que el resultado es cierto para cualquier valor de parámetro. La proposición $\mathbf{P_5}$ utiliza esta técnica.

- **Grupo 3**: Otros métodos. Pertenecen a este grupo procedimientos como el método constructivo, o el denominado *idea feliz*. El método constructivo es apropiado en proposiciones en las que interviene el cuantificador existencial, consiste en *fabricar* un objeto que resuelva el problema, por ejemplo, en la demostración del enunciado $\mathbf{P_6}$.

  Por último, el procedimiento catalogado como *idea feliz*, tal y como su nombre indica es una idea, un concepto, un artificio que simplifica el problema o cambia el punto de vista del mismo, de modo que facilita drásticamente su resolución. Sin duda se trata del método más difícil de *enseñar*, pues es fruto del ingenio, creatividad o imaginación del individuo. Utilizamos este procedimiento para demostrar $\mathbf{P_8}$.

Para finalizar proponemos una serie de pautas que pueden servir de ayuda para decidir la estrategia más apropiada para acometer una demostración, aunque dichas indicaciones no deben ser tomadas como un *algoritmo*, pues es muy complicado *empaquetar* toda la casuística a la que nos enfrentamos en una simple *receta*.

1. Si la proposición utiliza el cuantificador existencial, el método constructivo debe ser considerado.

2. Si el enunciado permite una clasificación por casos o depende de un parámetro, se debe analizar la viabilidad de los procedimientos del grupo 2 (demostración por casos, inducción).
3. Para trabajar con la implicación, primero se explorarán los métodos que analizan la implicación directa (prueba directa, proceso progresivo-regresivo). Si este tratamiento no es viable o resulta complejo, se abordará primero el método de paso al contrarecíproco y por último la demostración por contradicción.

La figura 1 presenta el esquema de cómo seleccionar el método de demostración.

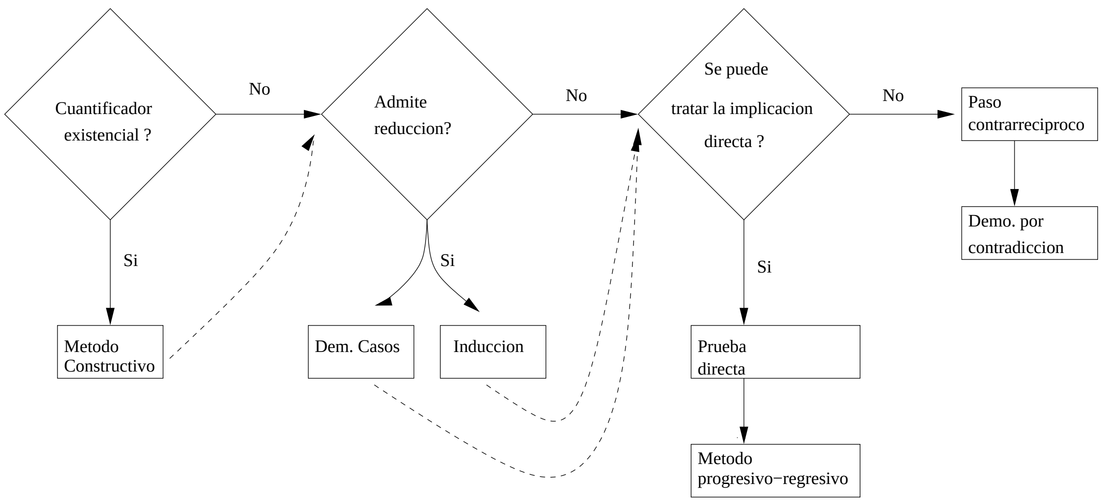

Figura 1: Esquema de selección del método de demostración

2.2 Ejemplo

A modo de ilustración, presentamos detalladamente la proposición $\mathbf{P_5}$

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esta fórmula permite calcular la suma de los n primeros números naturales.

Es muy conocida la anécdota en la que el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) resolvió de forma brillante el cálculo que su maestro, J. B. Büttner les había propuesto: hallar la suma de los 100 primeros números naturales. Gauss respondió casi de inmediato que la suma es igual a 5050. La historia cuenta que Gauss se dio cuenta de que $1+100$, $2+99$, $3+98$ y así sucesivamente es igual a 101 y hay 50 pares por lo que la suma es igual a $50 \cdot 101 = 5050$.

Siguiendo el esquema previamente descrito, la información relevante sobre $\mathbf{P_5}$ es:

- <u>Clasificación</u>: Implicación simple ($p \Rightarrow q$), cuantificador universal.
- <u>Hipótesis</u>: Sea $n \in \mathbb{N}$.
- <u>Tesis</u>: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- <u>Resultados/conocimientos previos</u>: Aritmética básica de números racionales: suma, producto, propiedad distributiva, factor común.
- <u>Estrategia de demostración</u>: En primer lugar, aplicamos la inducción matemática y después, utilizaremos una *idea feliz*.

<u>*Demostración por inducción*</u>

Podemos pensar en que la inducción consiste en ir subiendo peldaños en una escalera con infinitos escalones, por lo que no nos basta con subir un número determinado de escalones (por ejemplo, los 10 primeros). Si subimos el primer escalón y sabemos cómo pasar de un escalón al siguiente (es decir, cómo deducir la tesis a partir de la hipótesis de inducción), habremos subido todos los peldaños porque del primero pasamos al segundo, del segundo al tercero y así sucesivamente.

En este caso, para subir el primer escalón sustituimos n por 1 en la expresión dada, para subir el segundo escalón n por 2, y así sucesivamente hasta el final. Para resolver el problema planteado por el profesor de Gauss, sustituiríamos n por 50.

Escrito con rigor, la demostración por inducción consistiría en las siguientes etapas:

1.- Verificar que la proposición es cierta para $n = 1$.

En efecto, sustituyendo n por 1 en $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, se obtiene

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

que es cierto.

2.- Formular la hipótesis de inducción $\mathrm{H_{ind}}$:

Suponemos que

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

es cierta para un número natural k con $k \geqslant 1$.

3.- A partir de $\mathrm{H_{ind}}$, probar que

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

es cierta.

En efecto, aplicando propiedades básicas de aritmética, obtenemos

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \underset{\mathrm{H_{ind}}}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

con lo que la proposición $\mathbf{P_5}$ queda demostrada por inducción.

<u>*Idea feliz*</u>

Cuando nos enfrentamos a un problema es conveniente realizar algún esquema que nos ayude a entenderlo y nos sugiera como continuar. Optamos por representar gráficamente la suma en la siguiente figura:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \qquad \Leftrightarrow$$

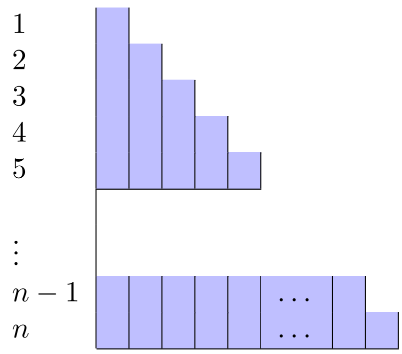

Figura 2: Representación gráfica de la suma de los n primeros naturales.

El resultado de la suma es equivalente a *contar* cada una de las celdas coloreadas en azul. La suma que estamos buscando es el área de ese *cuasi-triángulo* en la unidad celda. El cálculo del área es más sencillo, si procedemos a completar el cuasi-triángulo a un cuadrado de lado n como observamos en la figura 3, izquierda. Sin embargo, este cuadrado de lado n tiene mayor número de celdas azules que blancas. Si añadimos una columna más, como se ha dibujado en la figura 3, derecha, es evidente deducir que existen el mismo número de celdas azules y blancas, por tanto, un simple cálculo revela:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Celdas azules} + \text{Celdas blancas} = n \times (n+1) \\ \text{Celdas azules} = \text{Celdas blancas} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Celdas azules} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En realidad, también prodríamos haber razonado con el cuasi-triángulo de la figura 2, que puede dividirse en un triángulo de área $\frac{n^2}{2}$ y n triángulos de área $\frac{1}{2}$ todo ello considerando a la celda como unidad de área (se dejan los detalles al lector), por lo tanto:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + n\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

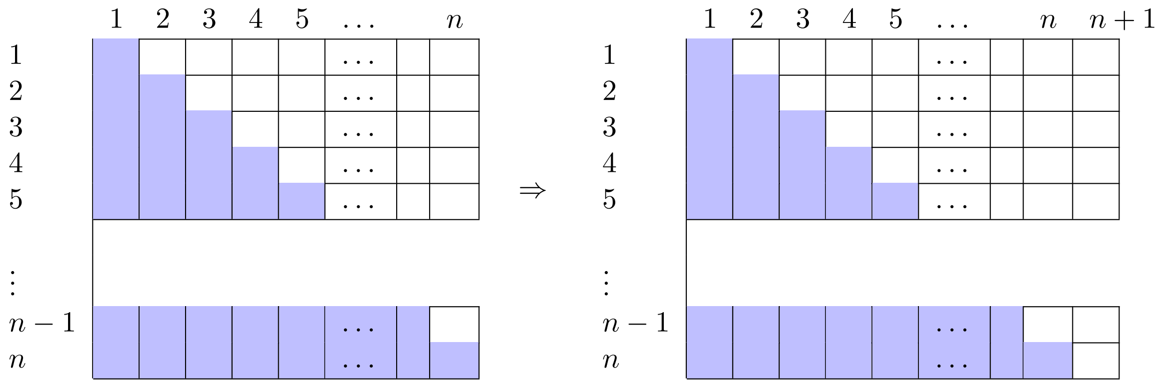

Figura 3: El área en azul corresponde con la suma de los n primeros naturales.
En la figura de la derecha, el aŕea en azul y blanco es la misma.

Tras esta explicación, nos atrevemos a aventurar que cualquier lector percibirá la identidad anterior como algo elemental y su percepción sobre la proposición $\mathbf{P_5}$ habrá cambiado drásticamente.

3 CONCLUSIONES

En este trabajo se han descrito las principales características de un material dirigido a introducir al lenguaje formal y a las técnicas de demostración a los estudiantes de Economía y Empresa. Este material complementa el Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de Economía y Empresa de la Universidad de Salamanca desarrollado en cursos anteriores siguiendo las sugerencias recibidas por alumnos y profesores de Enseñanza y Secundaria.

Nuestro objetivo no es demostrar los resultado clásicos, demostraciones que pueden encontrarse en cualquier manual, sino describir de dónde surgen y cuáles son los razonamientos lógicos que nos permiten llevar a cabo dichas demostraciones. En nuestra opinión, este objetivo va más allá de la mejora docente en el aula y en unas asignaturas particulares, dada su evidente proyección a diversas disciplinas.

El material elaborado estará a disposición de nuestros estudiantes en Studium el próximo curso académico. En la siguiente convocatoria de ayudas de la Universidad de Salamanca a Proyectos de Innovación y Mejora Docente, el equipo de trabajo solicitará un nuevo proyecto con el fin de analizar detalladamente la aceptación de este contenido por parte de los alumnos, su grado de asimilación y el impacto en su rendimiento académico.

4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cascón Barbero, J.M.; Campo Esteban, R.; Cesteros Muñoz, F.; García Sanz, M.D.; García-Bernalt Alonso, B.; Manrique García, M.A:; Sánchez León, J.G. y Santos García, G. (2017a). "Elaboración de materiales didácticos virtuales para un Curso Cero de Matemáticas para las titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa". Repositorio Documental de la Universidad de Salamanca (GREDOS). http://hdl.handle.net/10366/133328.
- Cascón Barbero, J.M.; Campo Esteban, R.; Cesteros Muñoz, F.; García Sanz, M.D.; García-Bernalt Alonso, B.; Manrique García, M.A.; Sánchez León, J.G. y Santos García, G. (2017b). "Nuevos materiales didácticos virtuales para un Curso Cero de Matemáticas en las titulaciones de Economía y Empresa". Anales de Asepuma, 25.
- Cascón Barbero, J.M:; Cesteros Muñoz, F.; García Sanz, M.D.; García-Bernalt Alonso, B.; Manrique García, M.A. y Santos García, G. (2018a). "Estudio de adecuación e idoneidad de materiales didáctivos virtuales para las Titulaciones de la Facultad de Economía y Empresa". Repositorio Documental de la Universidad de Salamanca (GREDOS). http://hdl.handle.net/10366/138557.
- Cascón Barbero, J.M:; Cesteros Muñoz, F.; García Sanz, M.D.;

García-Bernalt Alonso, B.; Manrique García, M.A. y Santos García, G. (2018b). “Valoración de un Curso Cero de Matemáticas para una Facultad de Economía y Empresa”. Anales de Asepuma, 26.

- Chartand, G; Polimeri, A.D. y Zhang, P. (2018). “Mathematical proofs: A transition to Advanced Mathematics”, 4th Ed., Pearson.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). “La demostración en Matemáticas. Clasificación y Ejemplos en el Marco de la Educación Secundaria”. Educación Matemática. Vol. 9, no. 2.
- Halmos, P.R. (1970). “How to write Mathematics”, L’enseignement Mathématique, vol. 16, pp. 123-152..
- Monterde García-Pozuelo, J.L. y García Monera, M. (20/11/2018). “Quod erat demostrandum, “lo que se quería demostrar””, (Archivo de video) Servei de Formació Permanent iInnovació Educativa, Universitat de València. Recuperado de `https://www.youtube.com/watch?v=5Fk9s6fq7lY&list=PLiPJNI1xCP1s2SppRoj` `index=1`
- Solow, D. (1993). “Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas”, Limusa, 1993.

5 AGRADECIMIENTOS

Este proyecto ha sido parcialmente financiado por el Programa “Convocatoria de ayudas de la Universidad de Salamanca a Proyectos de Innovación y Mejora Docente Curso 2018-2019” y por la Facultad de Economía y Empresa de la Universidad de Salamanca.