Juegos y Rarezas Matemáticas

Números poligonales como suma de números combinatorios

Polygonal numbers as sum of combinatorial numbers

Alfredo Olmos Hernández

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen IX, Número 1, pp. 177–182, ISSN 2174-0410
Recepción: 1 Nov'18; Aceptación: 15 Feb'19

1 de abril de 2019

Resumen

En este artículo se estudian algunas características de los números poligonales, los cuales son los números enteros positivos que pueden ordenarse, para formar un polígono regular.

Se cierra el artículo, mostrando la relación de los números poligonales, con los números combinatorios al expresar cualquier número poligonal, como suma de números combinatorios.

Palabras Clave: Número poligonal, número combinatorio.

Abstract

In this article we study some characteristics of polygonal numbers, which are the positive integers that can be ordered to form a regular polygon.

The article ends, showing the relation of the polygonal numbers, with the combinatorial numbers when expressing any polygonal number, as a sum of combinatorial numbers.

Keywords: Polygonal numbers, combinatorial numbers.

1. Introducción

Los números figurados son aquellos números enteros que se pueden representar por un conjunto de puntos equidistantes, formando una figura geométrica. Si la representación es un polígono regular se denominan números poligonales.

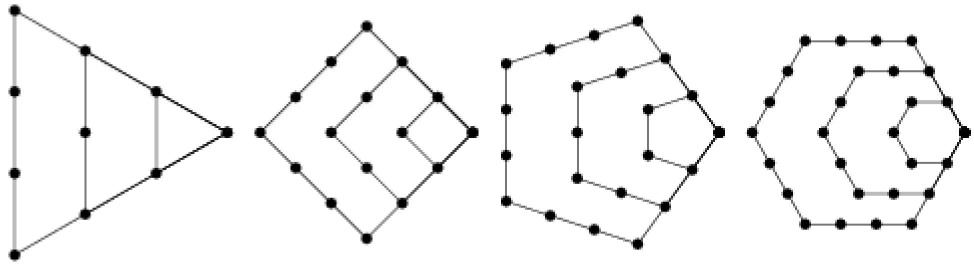

Figura 1. Números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales.

Los números poligonales fueron descubiertos en la antigüedad por los Pitagóricos entre los siglos VI y V a.c.

Definición 1:

Si l es el número de lados de un polígono, entonces la fórmula para el n-ésimo número poligonal de l lados es

$$p(l, n) = \frac{n((l-2)n - (l-4))}{2}$$

Ejemplo:

Triangulares l=3

$$p(3, n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cuadrados l=4

$$p(4, n) = \frac{n(2n)}{2} = n^2$$

Pentagonales l=5

$$p(5, n) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

2. Algunos resultados en números poligonales.

2.1 Teorema 1

Vemos una expresión recursiva de los números poligonales:

Teorema 1:

$$p(l, n) = p(l-1, n) + p(3, n-1)$$

Prueba:

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n((l-3)n-(l-5))}{2}+\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n(nl-3n-l+5+n-1)}{2}$$

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}$$

Q.E.D.

2.2 Teorema 2

Vemos una expresión de los números poligonales como suma de números triangulares:

Teorema 2:

$$p(l,n)=p(3,n)+(l-3)p(3,n-1)$$

Prueba:

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+(l-3)\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n(n+1)+(l-3)(n-1)n}{2}$$

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n(n+1+nl-l-3n+3)}{2}$$

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n(nl-2n-l+4)}{2}$$

$$\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}=\frac{n((l-2)n-(l-4))}{2}$$

Q.E.D.

De esta forma queda demostrado que todo número poligonal puede ser expresado como suma de números triangulares.

2.3 Teorema 3

Vemos una expresión de los números triangulares como números combinatorios:

Teorema 3:

$$p(3,n) = \binom{n+1}{2}$$

Prueba:

Utilizando la fórmula de números combinatorios.

$$\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)!}{(2)!\,(n+1-2)!}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{2(n-1)!}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Q.E.D.

2.4 Teorema 4

Vemos una expresión de los números poligonales como suma de números combinatorios:

Teorema 4:

Todo número poligonal, puede ser expresado como suma de números combinatorios:

$$p(l,n) = \binom{n+1}{2} + (l-3)\binom{n}{2}$$

Prueba:

Por el teorema 2 se tiene

$$p(l,n) = p(3,n) + (l-3)p(3,n-1)$$

Evaluando $p(3,n)$ y $p(3,n-1)$ como números combinatorios (teorema 3)

$$p(l,n) = \binom{n+1}{2} + (l-3)\binom{n}{2}$$

Q.E.D.

3. Conclusiones

En este artículo se mostró la relación que existe entre los números poligonales, y los números combinatorios al expresar los números poligonales como suma de estos últimos.

Referencias

[1] WEISSTEIN, Eric MathWorld. *Número poligonal*, http://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html

[2] ABRAMOVICH, Sergei; FUJII, Toshiakira; WILSON, James Universidad de Georgia. *Medio de aplicaciones múltiples para el estudio de números poligonales*, http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/AFW/AFWarticle.html.

Sobre el autor:
Nombre: Alfredo Olmos Hernández
Correo Electrónico: alfredooh16@gmail.com
Institución: Colegio de Bachilleres del Estado de Hidalgo, Hidalgo, México.