Lecturas Matemáticas
Volumen **40** (1) (2019), páginas 73-101
ISSN 0120-1980

Una demostración del teorema fundamental del álgebra por Julio Garavito

A proof of the Fundamental Theorem of Algebra by Julio Garavito

Fabio Ortiz Guzman

Universidad Externado de Colombia, Colombia
Universidad de los Andes, Colombia

Resumen. El presente artículo trata sobre la demostración del teorema fundamental del álgebra –teorema de D'Alembert– dada por Julio Garavito, que según sus Cuadernos de anotaciones data de entre 1898 y 1903. Estos Cuadernos se encuentran en el antiguo Observatorio Astronómico de Bogotá. Trataremos de mostrar evidencias de que el artículo, al parecer inédito, es una demostración original de Garavito. Se darán comentarios a las anotaciones del autor que llevan a su demostración y se hará la comparación por la similitud de ésta con la demostración de Courant y Robbins de 1941 y con la de Fine y Rosenberger de 1997.

***Palabras clave*:** Teorema fundamental del álgebra, Julio Garavito, Courant-Robbins..

Abstract. The present document deals with the proof of the Fundamental Theorem of Algebra, or D'Alembert's Theorem, given by Julio Garavito, which according to his notebooks should be dated somewhere between 1898 and the earliest 1900's. These notebooks are kept at the old National Astronomical Observatory in Bogota, Colombia. We will try to give some evidence that the document, presumably unpublished, contains an original proof by Garavito. We will give some comments to the authors' notes leading to the proof, and also a comparative step by step review of the proofs presented by Courant & Robbins in 1941 and Fine & Roseberger in 1997, given their resemblance with Garavito's.

***Key words*:** Fundamental Theorem of Algebra, Julio Garavito, Courant-Robbins. .

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 0102; 01A60; 3003; 2603.

1. Introducción

El presente escrito trata sobre algunos de los apuntes que el ingeniero colombiano Julio Garavito (1865-1920) realizó sobre funciones de variable compleja y sobre una demostración del teorema fundamental del álgebra (TFA), escrita entre 1898 y 1902 que se encuentran en sus *Cuadernos,* los cuales se conservan en el antiguo Observatorio Astronómico Nacional en Bogotá y tienen fechas aproximadas entre 1898 y 1903. Su tema, según Lleras Codazzi, fue objeto de estudio entre 1898 y 1902, años de guerra en los cuales la actividad académica formal en la Universidad Nacional de Colombia fue suspendida (Lleras (1920) p. 2–3). La clasificación de los *Cuadernos* se encuentra en el Catálogo Documental del Observatorio Astronómico (1803-1930) y se ha tratado de manera general en *Los Cuadernos de Julio Garavito. Una antología comentada* (Sánchez (2007)). Hay que precisar que el Catálogo contiene un índice analítico de los artículos de los *Cuadernos* o de temas que se encuentran en hojas sueltas, sin embargo el tema puntual teorema de D'Alembert o TFA no alcanza a figurar en dicho índice debido a que, a pesar de la importancia del tema, Garavito no colocó esto como título del artículo sino dentro de unos párrafos de otros artículos con otros títulos (ver secs. 2 y 4). Tengamos también en cuenta que el nombre mismo del teorema que nos ocupará ha cambiado a través del tiempo (ver sec. 3).

Julio Garavito fue una figura central en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia y, más precisamente, de la ciencia en Colombia durante el período 1890 a 1920 (Sánchez (2018)). Sus aportes más importantes están en astronomía (Quintero (2005)). Su trabajo *Explicación de algunos fenómenos ópticos que se relacionan con la astronomía: aberración y refracción* aparece reseñado en Bulletin Astronomique Tomo XXX1, 1914 p. 352. Además, su interés y capacidad le permitieron dedicarse a abordar otros temas como la matemática actuarial, en donde realizó un cálculo de primas y reservas de seguros de vida para un grupo de asegurados de la Sociedad Nacional de Seguros basándose en la obra del francés E. Dormoy (Ortiz (2014)). Por medio del presente escrito trataremos de exponer lo que sería un trabajo original y meritorio, un logro a destacarse, el cual podrá el lector juzgar a la luz de los referentes que trataremos de dar y que estaría en contraste con otros temas en que su intervención fue desafortunada y por los cuales ha recibido duros juicios (Sánchez (2018), p.6. y Martínez-Chavans (2004)).

Como profesor de la Facultad de Ingeniería tuvo a cargo cursos de matemáticas, aunque un curso sobre variables complejas no existía entonces y fue mucho después de 1950, con el advenimiento de profesores europeos a la Universidad Nacional, que estos cursos se empezaron a dictar (Catálogo de la biblioteca de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería (1921), p. 99–168; p. 169–212; Datos sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas en Colombia (1898), p. 13–15; Sánchez (1999)).

La ley 128 del 31 de diciembre de 1919 dispuso que el gobierno nacional asumiera la publicación de sus trabajos: "(Artículo 2) *La nación editará a costa del tesoro público las obras inéditas del doctor Julio Garavito Armero...*" Diario Oficial de Colombia. Año LVI. Bogotá Jueves 08 de enero de 1920, nro. 17016 p. 17. Sin embargo, el propósito de dicha ley no se ha llevado a cabo y no todos los trabajos manuscritos se han divulgado.

Algo que es inevitable agregar, y no sin estupor, es que por ironía del destino cuando, por disposición del Banco de la República, la imagen de Garavito empezó a aparecer en billetes colombianos, se originó una especie de mitología popular urbana en la que cierta clase de personajes acuden alrededor de su tumba en el Cementerio Central de Bogotá, manifestándose en un peregrinar y simbolismo para buscar su ayuda terrena.

En este trabajo transcribimos algunos de los escritos de Garavito que tratan sobre polinomios en variable compleja y sobre el TFA a partir de los mencionados *Cuadernos* y paralelamente hacemos algunos comentarios de los temas allí tratados.

En la sección 2 se comenta sobre temas y notación que utiliza Garavito en sus notas sobre variable compleja y sobre los textos franceses de los cuales transcribió, teniendo en cuenta las referencias históricas que se han hecho sobre la época en Colombia y sobre las pocas referencias de autores, más no de obras ni ediciones, que da Garavito en sus notas, particularmente: Meray, Jordan y Sturm.

En la sección 3 se darán algunos datos históricos sobre los números imaginarios y las demostraciones del TFA, comentando algunas dificultades que se presentan cuando se revisan a la luz del rigor de épocas distintas para compararlo con el caso particular del contexto de la época de Garavito. En la sección 4 se expone un tema que es recurrente en varios cuadernos: se trata de la idea de Garavito para la representación de polinomios de una variable compleja mediante líneas poligonales y la aplicación de esto para dar una demostración del teorema de D'Alembert (TFA), con algunos comentarios.

En la sección 5 se hace la comparación de la prueba de Garavito con la de Courant y Robbins de 1941 por la similitud que guardan, y en la sección 6 se compara con la de Fine y Rosenberger de 1997, la cual es sorprendentemente más parecida. Aquí es importante advertir que la comparación surge de manera natural al observar las demostraciones, aunque algunos conceptos o marcos conceptuales varían por tratarse de épocas distantes. En la sección 7 se presentan algunas conclusiones y se comentan otros contenidos relacionados en los *Cuadernos* para posterior estudio.

Es importante agregar que según Lleras Codazzi en su nota posterior a la muerte de Garavito, entre sus amigos cercanos fue conocido el trabajo que presentaremos en este artículo y que fue en los años de la "gran revolución 1899 a 1902" (es decir la Guerra de los Mil Días [1]) cuando se dedicó a estos estudios (Lleras (1920), p. 2–3). Al referirse a los trabajos de Garavito sobre ecuaciones dijo:

> *"abordó el análisis del más arduo de los problemas de Álgebra: la solución de las ecuaciones de grado superior. Apartóse del camino más conocido en la ciencia que consiste en averiguar el número de raíces reales e imaginarias que admite la ecuación, los límites dentro de las cuales están comprendidas y sus propiedades generales, para entrar a determinar por aproximaciones sucesivas, y prefirió relacionar las propiedades de las raíces con ciertas líneas de los polígonos estrellados que venían a ser la clave de las ansiadas soluciones,*

[1] Ver: Obregon, D. (2001) Julio Garavito Armero. A propósito de una biografía. Boletín Cultural y Bibliográfico Banco de la República.v.38 (58). Bogotá.

> *[...método que podría llamarse] Poligonometría. Establecidos estos cimientos fundó sobre ellos su análisis de las ecuaciones, llegó a la solución de las ecuaciones binomias, trinomias, recíprocas, etc. y avanzó muchísimo en la ecuación general de grado m por métodos rigurosos y de un ingenio admirable. Este trabajo [...] es conocido apenas de un corto número de sus amigos. Algún día se publicará y se verá entonces hasta dónde llegó ..." (Lleras, op.cit p.2).*

Otros resultados conocidos como teorema de D'Alembert, y particularmente uno de la misma época y de la Universidad Nacional, no deben confundirse con el TFA tratado por Garavito. Se trata de un teorema de física sobre dinámica de fluidos que fue analizado en 1895 por un compañero de Garavito, Jorge Páez, con el título *Teorema de D'Alembert*, como una tesis de grado para ser profesor de matemáticas (Sánchez (2007), p. 91), y adicionalmente hay otro trabajo de Tomás Acevedo del año 1893 titulado *Cuadros gráficos para la resolución de la ecuaciones de segundo y tercer grado* en la que hace uso de la representación de superficies topográficas según un método llamado de Lalanne, donde demuestra que la cúbica general se reduce a la forma $z^3 + pz + q = 0$ pero el material faltante no permite hacer un análisis fidenigno (Sánchez (2007), p. 78).

El autor desea agradecer al doctor Luis Carlos Arboleda por la revisión que hizo del artículo y sus valiosos comentarios y al doctor Regino Martínez-Chavanz por la revisión previa a la versión final del artículo, ya que siendo él tal vez el mejor conocedor de la obra de Garavito en el campo de la física y conocedor de los manuscritos, ofreció valiosos aportes y referencias para el trabajo del autor. Incidentalmente Martínez-Chavanz, al referirse a la divulgación de la física matemática por medio de la mecánica en Colombia, ubica a Garavito como "el primer físico colombiano en el sentido propio de la palabra, no sólo por sus estudios, formación y profesión sino por su actividad de investigador" (Martínez-Chavanz (2004), p.47). Él también ha analizado el trabajo de Garavito en cuanto a las geometrías no euclidianas y su relación con los modelos físicos, (Martínez-Chavanz *op cit p.56*, ver también Bateman (1954)).

2. Álgebra de imaginarias en los cuadernos de Garavito

Las notas de Garavito sobre los temas tratados en este artículo provienen de los siguientes *Cuadernos*: Cuaderno 3. (1903) Titulo: Álgebra imaginarias, Titulo: Apuntes diversos p. 24 a 37. Cuaderno 5 (1901-1902) Título: cuestiones diversas referidas a matemáticas puras y aplicadas. Funciones simples especiales. Cuaderno 30 (1897) Título: Funciones elípticas. Cantidades imaginarias. Cuaderno 31 (1897) Título: Análisis infinitesimal. Polígonos. Cuaderno 29 (1898) Título: Nota sobre las ecuaciones algebraicas. Carpeta 8, Caja 4, Título: Operaciones con complejos. Ecuaciones algebraicas enteras de una sola variable. Carpeta 7, Caja 4, Título: Álgebra de imaginarias.

Debido a la limitación de espacio no se transcriben todos los artículos, sino que nos limitaremos a los artículos sobre el teorema en cuestión los cuales aparecen en forma reiterada en los *Cuadernos*.

Aunque Garavito ofrece escasas referencias precisas de los textos que usó, se podría inferir que recurrió a los textos de Meray, Sturm y Jordan. No refiere haber usado el de Cauchy, si bien éste ya figura en los textos de la biblioteca de la Universidad Nacional en 1920. Cuando menciona autores solo se refiere a Meray, Sturm, Jordan sin más datos. Respecto a Meray, la referencia que da Garavito –Meray p. 40– coincide con la 1897 sobre las cantidades imaginarias (Meray (1897) p. 17 a 56). En cuanto a Sturm y Jordan, los temas tratados en los *Cuadernos* coinciden con los de Sturm (1901) y la tercera edición del Curso de Jordan, por ejemplo en conceptos como los tratados en Jordan t. 2 p. 260, 574, 578, 557, 561; t. 1 p. 177, 178, entre otras (Jordan (1893)).

En los *Cuadernos* se encuentran conceptos como función monógena, función meromorfa, condiciones de Cauchy-Riemann (no usa este nombre), función multivaluada, raíz m-ésima de un complejo, teorema del residuo de Cauchy (aunque no lo utiliza con este nombre), polos, hoja de Riemann, punto de ramificación (branchement), integración compleja, teorema de Laurent y uno de los artículos se titula "Funciones Elípticas", aunque realmente no llega a tratarlas, al menos en las notas existentes. Sin embargo, con relación a esto, podemos decir que uno de sus artículos publicado póstumamente en la Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, se refiere a la generalización de exponenciales complejas y de éstas obtiene versiones seno y coseno referidas a una espiral, aunque en estas notas presenta algunas diferencias con el artículo.

Garavito inicia su introducción de las cantidades imaginarias diciendo: *"Las cantidades imaginarias habían quedado relegadas al adjetivo y su principal objeto era simplemente hacer descomponible en factores binomios de grado* 1 *todos los polinomios enteros de una variable.*

Últimamente se han introducido en el análisis matemático produciendo fecundos resultados. Con su ayuda se han hallado conexiones sorprendentes entre funciones circulares y exponenciales, en el estudio de las funciones elípticas y el comienzo del estudio de las trascendentes más elevadas".

Garavito no usa el término *número complejo* sino *cantidades imaginarias* $a + bi$. Debemos tener en cuenta que en los textos de la época, ni en el de Cauchy, ver tabla 1, usan esta denominación, aunque se dice que fue Gauss, en 1831, quien empezó a usarla en el contexto de $a, b \in \mathbb{Z}$ seguido también por Hamilton hacia 1835, y que Riemann la incorporó en los títulos de sus artículos de 1851 (ver Remmert et al [1991] p. 64).

Ahora bien, de acuerdo a la afirmación de Garavito según la cual estos temas son recientes, se podría inferir que en los textos mediante los cuales él había estudiado la materia, como el de Meray, Sturm y Jordan, no se explica el desarrollo histórico de estas funciones, el que ya llevaba varias décadas para la época de Garavito.

En la presentación de los números imaginarios Garavito inicia explicando la forma de introducir la unidad imaginaria i, y en general las cantidades $a + bi$ y las operaciones de suma, producto y cociente entre estos, de la manera usada en los textos actuales, por lo tanto no la incluiremos en este escrito. Sin embargo hay algo respecto a la suma que llama la atención y es, según Garavito, otra forma de introducirla es de la siguiente manera:

Considera las ecuaciones en x

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0; \quad x^2 + p_2x + q_2 = 0; \quad \ldots ; x^2 + p_nx + q_n = 0$$

con coeficientes reales y se suponen conocidas las respectivas raíces $\alpha_1 + \beta_1 i, \alpha_2 + \beta_2 i, \ldots, \alpha_n + \beta_n i$. En seguida considera la ecuación

$$x^2 + Px + Q = 0, \tag{*}$$

en donde $P = \sum p_i$ y

$$Q = \frac{P^2}{4} - \left[\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{p_i^2}{4} - q_i}\right]^2 .$$

Se tendrán las soluciones de (*):

$$\begin{aligned} X' &= -\frac{P}{2} + \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q} \\ &= -\frac{1}{2}\sum p_i + \sum \sqrt{\frac{p_i^2}{4} - q_i} \\ X'' &= -\frac{P}{2} - \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q} = -\frac{1}{2}\sum p_i - \sum \sqrt{\frac{p_i^2}{4} - q_i} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} X' &= \sum \alpha_i + \beta_i \\ X'' &= \sum \alpha_i - \beta_i \end{aligned}$$

La ecuación (*) tiene por soluciones la suma de las soluciones de las ecuaciones iniciales. Supongamos que las ecuaciones tiene todas sus raíces imaginarias. En este caso,

$$Q = \frac{P^2}{4} - \left(\sum_j \sqrt{q_j - \frac{p_j^2}{4}} \quad i\right)^2 ; \quad i = \sqrt{-1}.$$

Por lo tanto $\frac{P^2}{4} - Q < 0$, las raíces de (*) serán imaginarias y $X' = -\dfrac{P}{2} \pm \sqrt{Q - \dfrac{P^2}{4}} i$. Diremos que ellas serán las sumas de las raíces de las ecuaciones iniciales,

$$\sum \left(-\frac{p_j}{2} + \sqrt{q_j - \frac{p_j^2}{4}} i\right) = \sum -\frac{p_j}{2} + i \sum \sqrt{q_j - \frac{p_j^2}{4}}.$$

Concluye Garavito: *de allí que podamos definir:*

$$\sum \alpha_j + \beta_j i = \sum \alpha_j + \left(\sum \beta_j\right) i.$$

Es este punto conviene hacer una breve reseña de cómo estos números se incorporaron a las matemáticas en los siglos XVIII y XIX.

3. Datos históricos sobre uso de los números complejos y el TFA

Una reflexión sobre el título del presente artículo puede conducir al lector a cuestionar que para la época del escrito de Garavito, alrededor de 1898, el teorema ya estaba consolidado con varias pruebas conocidas. Sin embargo el teorema ha tendido cierto carácter elusivo, aun para destacados matemáticos. Más adelante veremos que, por ejemplo, Euler en principio admitió la prueba de D'Alembert pero luego expresó reservas; Gauss cuestionó a D'Alembert, Euler y Lagrange, entre otros. A su vez Feliz Klein cuestionaba la primera prueba de Gauss y, aunque no encontraba que tal prueba fuera errónea, si urgía la necesidad de aclaración de puntos que si bien en apariencia obvios, no podían ser admitidos a priori. También veremos que, ya en época reciente, H. Arnold e I. Niven publicaron pruebas que resultaron ser erróneas, como comentaremos un poco más adelante. La prueba de Garavito, distinta a las dadas en los textos de la época que tomamos como la bibliografía que pudo haber conocido según referencias de la época, es similar a la de Courant y Robinson de 1941 y aún más similar a la de Fine y Rosenberger en 1997. El punto en el que puede encontrarse un argumento discutible, aunque no incorrecto, es el mismo que en la prueba de Garavito (ver sec. 6).

El hecho de que las cantidades llamadas a ser los números imaginarios fueran por mucho tiempo conocidas como objetos inevitables pero incómodos por carecer de una conceptualizacion suficiente entre los matemáticos, pude ilustrarse con el hecho de que, cuando comenzaron a aparecer en escritos de Cardano y Bombelli del siglo XV, se les denominaba cantidades *sofísticas* y la designación *di meno* para lo que hoy llamamos i, indica la intención de admitir un resultado que por ser inusual o un caso degenerado es de menor importancia. Esta es la misma cantidad a la cual llamó Descartes *imaginario* y a la que luego Euler designó como i (Reich (1977) p. 59), notación que se ha conservado hasta la época actual.

La interpretación de $\sqrt{-1} = i$ como una media geométrica de 1 y -1 (Dunnington (1955) p. 40) se debe a Gauss, quien también impuso el término y designacion *número complejo* $a + bi$, aunque más en el contexto de a y b enteros (Wussing, H. (1979) p. 207). Sin embargo fue Euler quien durante el período que estuvo en Rusia, entre 1726 y 1735, usó los complejos en cálculos de distinta índole (Robson y Stedall (2008), p. 369).

La terminología evoluciona casi imperceptiblemente, por ejemplo, según Kline, las condiciones actualmente llamadas *de Cauchy-Riemann* ya eran conocidas para D'Alembert, Euler y Laplace, pero no se designaban así en las obras de Cauchy, ni aún en la obra más reciente de Jordan, de la cual Garavito transcribe. Poisson, hacia el año 1815, fue el primero en realizar integración en el plano, aunque no escribió una monografía sobre el tema (Kline (1972), p. 633, p. 655). Gauss, sin consolidarlo en una monografía, ya en 1811 anunció que la integral en el plano complejo era independiente del camino de integración (Kline (1972) p. 632).

La fundamentación para la teoría de funciones complejas la realizó A. Cauchy en su *Memoire sur la theorie des integrales defines* en 1814 citando los trabajos de Euler de 1759 y de Laplace de 1782.

Ahora bien, tendríamos que tener en cuenta la forma en que se difundía el conocimiento para la época de Garavito y el tiempo que tomaban en llegar los conocimientos matemáticos desde Europa a Colombia, básicamente a través de las obras en francés. Entonces también habría lugar a pensar que hay temas que pueden considerarse recientes para su época, por ejemplo la otra memoria de Cauchy de 1825 pero publicada hasta 1876, *Memoire sur las les integrales defines prices entre des limites imaginaires* en el Boletín des Sciencies mathematiques. Aunque es improbable que Garavito conociera estas memorias, los textos de Meray y de Jordan ya incluían estos temas; de hecho la consolidación y divulgación de la teoría de funciones complejas tuvo en la obra de Jordan un referente importante (Gispert-Chambaiz (1982)). Se podría decir que para Garavito sería reciente la obra de Jordan desde el tomo 1 en 1882 hasta el tomo 3 en 1887 y la segunda edición en 1893, pues según esa autora la obra de Jordan marca un punto determinante en la década de 1890, no solo en Francia sino en Europa para el desarrollo del análisis real y para su difusión.

En cuanto a Laurent, quien es mencionado por Garavito en una nota de 1897 al decir: *"...como lo indica Laurent la función* $\sqrt{z-a}$ *no es monódrona"*, posiblemente se trate del mismo que en 1843 expuso la representación en serie de potencias en torno a un punto aislado sobre una región anular (Kline *op. cit* p. 638).

Hacia 1850 Puissseux distinguió polos y puntos de ramificación, punto singular esencial o polo de orden infinito, los cuales pasaron desapercibidos en la teoría de Cauchy aunque éste si notó la variación de funciones simples multivaluadas a lo largo de caminos que encierran puntos de ramificación, (Kline op. cit p. 641).

Continuando con la somera referencia que hace Garavito a las *hojas de Riemann*, éstas fueron expuestas en 1851, (Kline op. cit p. 648).

Respecto al TFA se sabe que la primera demostración correcta, aunque con pasos que requerían una justificación, fue dada en 1746 y publicada hacia 1748 por Jean le Rond D'Alembert (ver Pla I Carrera (1992) p. 16), aunque obras como la de Bezout de 1779 sobre ecuaciones algebraicas no presentan aún una demostración del teorema (Bezout(2006)). Según Felix Klein el teorema fue llamado por los franceses *teorema de D'Alembert*[2] aunque ya había sido enunciado por Girard en Holanda hacia 1629 y aún antes por Roth en 1608 (Smith, D. (1958) p. 474, v.2.). Bourbaki lo llama *teorema de D'Alembert-Gauss* y Courant y Robbins señalan que debería llamarse *teorema fundamental del sistema de los números complejos* (Courant & Robbins (1955), p. 248).

Cauchy en su *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* trata el TFA y Sturm incluye la misma demostración de Cauchy, distinta a la de Garavito (Sturm, (1901)). En la obra de Cauchy el autor explica que su demostración *aunque se basa en el mismo principio que la de Legendre es diferente en varios puntos*, (Bradley (2009), p. 223). Además Cauchy, refiriéndose al TFA, no lo designa así sino que lo enuncia y agrega en el subtítulo: *Solución de esta clase de ecuaciones [polinomios en una variable] por álgebra o por trigonometría;* (Bradley (2009) p. 217).

[2]Aunque hay que tener en cuenta que resultados distintos en matemáticas también se denominan de este mismo modo, ver Weisstein (1998) pp. 397, 687.

En la obra de Sturm *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytecnique*, se menciona la tesis de Gauss de 1799 (Sturm (1901), p. 376 n) haciendo referencia a propiedades de las curvas algebraicas dadas por las partes real e imaginaria del polinomio $P(z)$ que aparecen en dicha demostración, y se explica la demostración de Cauchy. Adicionalmente, destacaremos cómo al indagar sobre distintas pruebas del teorema fundamental del álgebra nos encontramos con que la prueba de Garavito es muy similar a la dada por Courant y Robbins en 1941, pero llamó aún más nuestra atención la gran similitud con la prueba dada por Fine & Rosenberger en 1997. Más adelante daremos algunos detalles al respecto, pero antes debemos decir que este teorema, en cuanto se refiere a su demostración, ha resultado ser muy elusivo, incluso para los más destacados matemáticos. En efecto, Gauss en su tesis doctoral *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secondi gradus resolvi posse* (Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica racional de una variable puede ser descompuesta en factores de primer y segundo grado) (Suzuki, (2006) p. 705, Colette vol 2 p. 293), demostró el teorema en una de las varias formas que encontró luego. En la introducción de su tesis manifestaba con cierto tono irónico:

> *...solo una tercera parte del ensayo está dedicada a lo que indica el título, la parte restante contiene la historia y una crítica de los trabajos hechos por...D'Alembert, Bougainville, Euler, de Foncenex, Lagrange y los enciclopedistas, de los cuales estos últimos probablemente no estarán muy complacidos.*(Dunnington (1955) p. 36.

Del mismo modo en que Euler en principio pareció conforme con la demostración de D'Alembert pero luego encontró reparos (Katz (2014) p. 287), también Gauss en su tesis doctoral afirmaba: *"si bien se ha de reconocer en justa medida el ingenio que expresan aquellos trabajos, no se puede negar sin embargo que todos ellos presentan lagunas [que no se pueden absolver] por las que la demostración pierde consistencia"*. Se refería Gauss principalmente a que se asumía siempre que las raíces complejas existen, sin embargo a la luz de las ideas modernas, dado que el campo de descomposición del polinomio siempre existe, dicha objeción de Gauss, aunque razonable, no representa una negación de las demostraciones anteriores a la suya, en particular la de Lagrange (Suzuki (2006) p. 705).

Ahora, si se mira a otro tipo de objeción a la primera demostración de Gauss también ésta pierde consistencia[3]. En efecto, según lo indicaba F. Klein, también Gauss tuvo imprecisiones que, aunque no dejan la demostración sin sustento, deben aclarase: *"Gauss aplica ingenuamente el concepto de curva. Que una curva no pueda interrumpirse bruscamente es algo que se dice cierto, pero no se indaga*[4]*. Tampoco se analizan suficientemente las posibilidades combinatorias que existen respecto a intersecciones de las diferentes ramas de [la parte real y la imaginaria del polinomio igualadas a cero]. Pero sobre todo se mira*

[3]En la cuarta demostración que dio en 1848 usó coeficientes complejos en el polinomio y la teoría de funciones complejas ya estaba más desarrollada (Katz (2014), p. 285).

[4]Aquí se refiere al ejemplo de Gauss de la curva $y = \frac{1}{Log x}$ la cual se termina en un punto, cosa que ilustra algo que no puede pasar en un polinomio o una función racional.

como algo comprensible teoremas fundamentales de continuidad del dominio bidimensional, por ejemplo que dos curvas que se cruzan se cortan en alguna parte" (Klein (2006), p. 79-80). Es decir, nos podríamos referir ahora a unas objeciones más de carácter topológico.

En época más reciente encontramos que un matemático americano, hacia 1900, se refería a los vacíos que había en las pruebas de los tres textos de álgebra ingleses que se usaban entonces en su país, en todas con relación a la prueba de que el módulo del polinomio debería tener mínimo cero (Moritz, R. *On certain proofs of the FTA*, American Mathematical Montly, v. 10 (1903) p. 159–160). Aún más reciente es el caso de los destacados matemáticos H. Arnold e I. Niven, quienes también publicaron pruebas que resultaron tener errores insalvables: *A topological proof of the FTA* (Arnold (1949)) y *Extension of the topological proof of the FTA* (Niven (1950), (1951)). En ésta, Arnold afirma que la demostración de Courant & Robbins, (aquella que consideramos semejante a la de Garavito) recae sobre el concepto de grado de Brower (ver secs. 5-6) pero que no hay una demostración basada en el teorema del punto fijo de Brower, que es la que se propone dar en este artículo. Pero en un número siguiente los editores aclaran que hay un error en el ya publicado artículo y explican en qué consiste, afirmando: "Lamentamos que [el artículo] contiene un error y no hay remedio fácil para evitarlo" (American Math. Monthly v. 58 (1951) p. 104). Más aún, el editor aclara que el artículo de Niven *Extension of a topological proof of the fundamental theorem of algebra* también está afectado por el mismo error (American Math. Monthly v. 57 (1951) p. 246–248). Esperamos con estas notas sobre las vicisitudes históricas del teorema, que el lector pueda encontrar puntos para juzgar la forma de la demostración propuesta por Garavito y podrá seguramente discernir sobre la condición y pertinencia de dicha demostración y el porqué deliberadamente no la hemos llamado "demostración". Esto es para indicar que, si bien con los criterios actuales faltaría consolidar un aspecto, el mismo que requeriría aclaración en la prueba de Fine y Rosenberger, también podría decirse que el teorema conlleva dificultades que han requerido un esfuerzo colectivo y tiempo para cristalizarse. Adicionalmente, debe mirarse también que el ambiente académico de su época y su medio eran limitados, por lo cual fue una realización que ni siquiera difundió, salvo a unos cercanos amigos, como lo afirmaba Lleras (Lleras (1920)), quien seguramente se refería al asunto del TFA estudiado con líneas poligonales (aunque posiblemente no se refiera a los métodos de solución de las ecuaciones tratados como en el libro de Cirodde y en los *Cuadernos*). No obstante trataremos de mostrar un punto al que podría conducirnos la exposición, sin entrar en la precisión de los expertos, y es que el esfuerzo de Garavito adolece de un marco conceptual de tipo topológico. Finalmente, también es bueno recordar que la demostración del teorema ha continuado su evolución de tal manera que se presenta dentro de distintos ambientes, por ejemplo en las tres demostraciones propuestas por Spivak en el contexto de la geometría diferencial, Spivak (1999), *A comprehensive introduction to Differential Geometry. v. 1 , p. 284 ejercicio 3, p. 285 ejercicio 4 y p. 292 ej. 22.*

4. Teorema fundamental del álgebra (Teorema de D'Alembert) en los Cuadernos de J. Garavito

La demostración de J. Garavito sobre el teorema de D'Alembert aparece en el Cuaderno 3, Anexo 4 (1903-1907) bajo el titulo *Apuntes diversos. Representación gráfica de polinomios enteros de una sola variable y las ecuaciones de una sola incógnita*, aunque en varios de los cuadernos mencionados hay notas sobre el mismo (sec. 2). La intención de demostrar el teorema mencionado aparece, digámoslo así, entre líneas, pues es después de demostrar dos lemas que anuncia que de ellos va a deducir el teorema de Alembert (*sic*), el cual no enuncia, pero el desarrollo de su explicación permite colegir sin dificultad que se está refiriendo al teorema de D'Alembert o TFA.

La exposición de Garavito no es ordenada y trataremos de dar una versión de lo que él expone. Finalmente debemos agregar que no parece probable que Garavito haya tomado la prueba de otro texto, de acuerdo a las referencias dadas en el *Catálogo de la biblioteca de la Universidad Nacional* y en las referencias relacionadas de Sánchez (1999, 2007), Anacona (2004) y Arbelaez (2012), entre otros, los textos a los que pudo tener acceso como los de Jordan, Meray, Sturm, Bergeron, Humbert, Cauchy, Lacroix, Lefebvre, Serret, Cirodde no contienen la demostración que propone Garavito, si bien textos como los de Sturm, Meray, Jordan citados por Garavito tratan temas de variable compleja (que por cierto aún no designan de ese modo sino como números o cantidades imaginarios) en forma similar a la que contienen los *Cuadernos*. También, el texto de Cirodde contiene una muy completa exposición de la teoría de ecuaciones, incluyendo la demostración de Cauchy, la solución numérica con el método de Newton (la cual llama solución gráfica) y el de Sturm, la solución usando derivación sucesiva y la solución de ecuaciones binomias y de grado 3, el método de diferencias finitas, entre otros (Cirodde (1861), p. 315–318, p. 335–483). Hay temas como la solución de algunas ecuaciones (ver figuras 2–5) en los *Cuadernos* iguales que en Cirodde o Sturm, pero definitivamente la exposición del teorema de D'Alembert es diferente a las otras en cuanto a la idea de línea poligonal y contorno que se modifica. La siguiente tabla resume la información sobre el teorema en cuestión tratado en estas obras, donde también hay que aclarar que, al referirnos a Jordan, se trata de su curso de análisis más no a su Curso de Álgebra, obra destacada que tampoco contiene esta demostración; nótese que en ninguna se designó el teorema aún como se conoce.

Adicionalmente podemos decir que un trabajo de grado de 1907 de un estudiante del M.I.T. presenta varias demostraciones conocidas en la época, pero ninguna coincide tampoco con la de Garavito, (Mac Gregor (1907)) y hacia 1903 un matemático americano hace reparos a demostraciones de tres textos ingleses usados en Norte América, las cuales, por cierto, son también distintas a la que nos referimos (Moritz, R. *On certain proofs of the FTA*, American Mathematical Monthly, vol. 10 (1903), p. 159–160).

Tabla 1.

Texto; pág. (ver referencias)	Teorema fundamental del algebra.
Cauchy- Bradley (2009), 223	Anuncia que es similar a la prueba de Legendre. Titula solución de polinomios por álgebra o trigonometria
Sturm (1864,1901), 375	Cita la tesis de Gauss. Misma demostración de Cauchy.
Lefebvre (1897), XLVII, 15, 122, t. 1, 46 n. 1, t. 2	Teorema del álgebra superior, relación de las raíces y los coeficientes, menciona resultado de Abel sobre imposibilidad de la solución general
Comberousse (1890), t. 4, 180-190	Principio fundamental de las ecuaciones enteras de una variable. Demostración de Cauchy
Humbert (1904), 153	Teorema de D'Alembert. Demostración usando que toda funcion entera y acotada es constante
Serret (1877), 99	Enuncia Principio fundamental de la teoría de ecuaciones
Lacroix (1804), 248	Demostración de D'Alembert (ver Baltus (2004))
Cirodde (1861), 318-409	Demostración de Cauchy
Jordan (1893) t. 1, 199.	Supone $\|P(z)\| \neq 0$ y usa derivadas sucesivas para expresar $P(z+h)$ similar a Cauchy
Meray (1897), Meray (1872)	No la incluyen
Loomis (1886), 306	Ecuación general de grado n se asume que tiene una raíz

4.1. Línea poligonal y polinomio en variable compleja

En las notas de Garavito a las que nos referimos está presente su interés por la representación de polinomios mediante líneas poligonales, y de estas notas se puede ver que la idea de una demostración del TFA, está asociada, en términos generales, al caso en que dicha línea poligonal es cerrada.

Garavito muestra su preferencia por representar el polinomio (1) en variable compleja z, inicialmente asumiendo coeficientes reales y $b_i \neq 0$, como la resultante de sumar los términos consecutivos, es decir los monomios, como segmentos sucesivos, los cuales forman una línea poligonal que tiene punto inicial en el origen del plano complejo y $b_0 \neq 0$ está sobre el eje real (ver figura 1).

Con cada valor de z se obtiene una poligonal y una resultante $P(z)$. Cuando la línea poligonal es cerrada para algún valor de z, se puede decir que z es una raíz del polinomio $P(z)$. En cuanto a los ángulos entre los segmentos, en unas partes de la exposición asume que los coeficientes del polinomio son reales, en cuyo caso el término $b_i z^i$ tiene argumento $arg(z^i)$, y en otros casos los coeficientes son complejos, en cuyo caso el argumento de aquel término es $arg(b_i) + arg(z^i)$ pero es predominante la suposición sobre coeficientes reales. En su exposición Garavito aclara que los segmentos de la poligonal se pueden referir a una unidad. A este respecto afirma[5]:

[5]En realidad Garavito usa $f(z)$ pero debido a que vamos a comparar más adelante la demostración de Garavito con otras dos, queremos unificar la notación con $P(z)$.

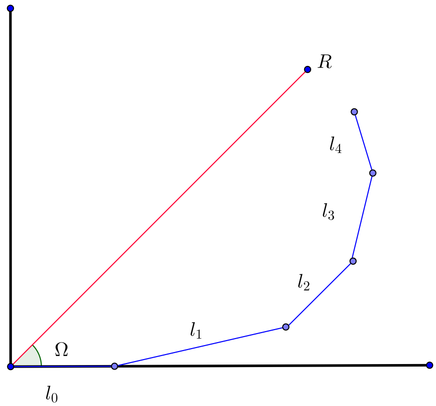

Figura 1. Linea poligonal del polinomio

“Sea

$$P(z) = b_m z^m + \ldots + b_0. \tag{1}$$

Hagamos

$$z = re^{i\theta}, \qquad r = \frac{p}{\lambda}, \tag{2}$$

siendo λ la unidad de longitud y consideremos $b_m, \ldots b_0$ como longitudes referidas a una misma unidad. De (1) *tenemos:*

$$P\left(re^{i\theta}\right) = b_m r^m e^{im\theta} + \ldots + b_0. \tag{3}$$

Situamos 2 ejes rectangulares o_X y o_Y y convenimos con representar la imaginaria $z = x + iy$ de cierto módulo r y ángulo polar θ. La suma de imaginarios representa la resultante R de los segmentos orientados según el valor del argumento de la imaginaria, cada segmento compuesto con una longitud igual a su módulo (figura 1). Pongamos

$$\begin{aligned} l_0 &= b_0 \\ l_1 &= b_1 r \\ l_2 &= b_2 r^2 \\ &\vdots \\ l_{m-1} &= b_{m-1} r^{m-1} \\ l_m &= b_m r^m \end{aligned} \tag{4}$$

y la función (3) tomará la forma:

$$P(z) = l_0 + l_1 e^{i\theta} + l_2 e^{2\theta i} + \ldots + l_{m-1} e^{(m-1)i\theta} + l_m e^{m\theta i}.$$

Los números $l_0, l_1, l_2 \ldots . l_m$ se podrán representar por longitudes referidas a una unidad de longitud λ. Esto supuesto, podemos dibujar el polígono de lados $l_0, l_1, \ldots, l_m$ que *forman los ángulos* $0, \theta, 2\theta, \ldots, (m-1)\,\theta, m\theta$ *con* o_X *y la línea de cierre de longitud* R *y que forma con* o_x *el ángulo* Ω *corresponderá a la función* $P(z)$*, ó más bien el valor de dicha función para* $z = re^{i\theta}$.

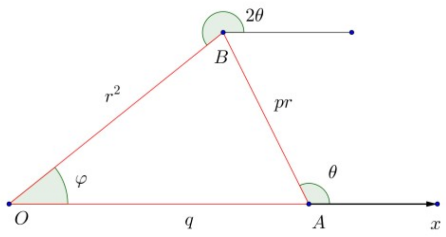

Figura 2. Polígono para la ecuación $z^2 + pz + q = 0$, $z = re^{i\theta}$

Si el polinomio es completo, es decir, si no le falta ningún término de grado inferior al m-avo (sic), la línea poligonal O a b c $\ldots d \ldots R$ *tendrá* $m+1$ *lados sin contar la línea de cierre* OR *y sus* m*-ángulos* $a, b, c, \ldots,$ *serán todos iguales y valdrán* $\pi - \theta$ *pero los ángulos de empalme en* O *y* R *con la resultante serán diferentes de* $\pi - \theta$ *por lo general.*

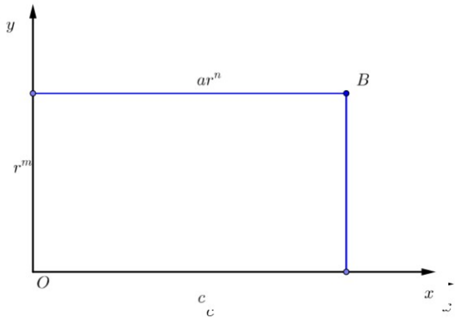

Figura 3. Línea poligonal del cuatrinomio $z^m + az^n + bz^p + c = 0$

Las relaciones (4) *entre los lados* $l_0, l_1, \ldots, l_m$ *de la línea poligonal y los coeficientes* $b_0, b_1, \ldots, b_m$ *del polinomio podrán escribirse así:*

$$\frac{l_j}{b_j} = \left(\frac{l_1}{b_1}\right)^j, \tag{5}$$

en la cual j *puede tomar todos los valores de* 0 *a* m.

Hagamos pues $P(z) = Re^{\Omega i}$ *y* $z = re^{i\theta}$*, tendremos (ver figura 1)*

$$Re^{\Omega i} = b_0 + b_1 re^{i\theta} + b_2 r^2 e^{2\theta i} + \ldots + b_m r^m e^{m\theta i}. \tag{6}$$

Luego realiza también los polígonos asociados a casos particulares y algunos de estos van acompañados de métodos de solución (figuras 3-5) como los del texto de Cirodde (Cirodde (1861)), p. 336).

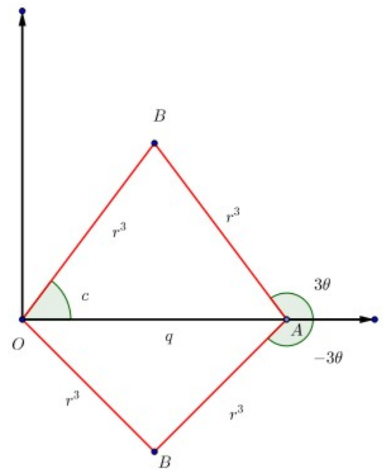

Figura 4. Línea poligonal del polinomio $z^3 + z + q = 0$

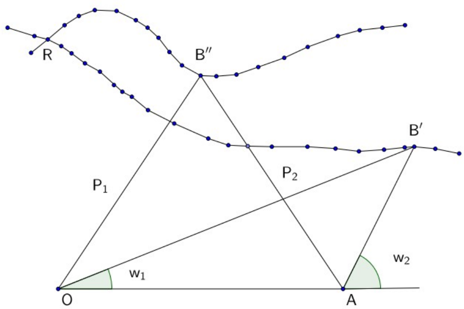

Figura 5. En el punto R se satisfacen las condiciones para la ecuación trinomia $z^a+pz^b+q = 0$, $(a, b) = 1$, $z = re^{i\theta}$

4.2. Demostración del teorema de D'Alembert en los apuntes de J. Garavito

Para facilitar la exposición se explican los apuntes en una notación que, pretendemos, sea más clara, aunque nos ceñimos a cada idea o afirmación dada por su autor.

A partir de la representación del polinomio mediante la línea poligonal (refiriéndose siempre a la línea poligonal asociada a $P(z)$ para cada valor z), Garavito considera evaluar el polinomio $P(z)$ sobre círculos de radio $r > 0$ para cada $r \in [0, \infty)$, para observar qué sucede con la que ha llamado antes la *resultante* R, es decir $P(z)$, y aunque la ilustración de la línea poligonal dada antes se refiere al polinomio que él llama completo, es decir aquel en el que todos los $b_i \neq 0$, los siguientes lemas tienen validez para el polinomio general en cuestión. También asume que $\Gamma = P(C_r)$ es una curva cerrada continua, lo cual se deduce de que $P(z)$ es continua.

Lema 1. *Sea* $C_r := \{z \in C : |z] = r\}$, $r \geq 0$. *Sea* $P(z)$ *definido en (1) con* $b_0 \neq 0$, *entonces si* r *es suficientemente pequeño,* $\Gamma = P(C_r)$ *no encierra a O, el origen del plano complejo.*

Demostración. “Saquemos a b_0 en (1) por factor y tendremos:

$$Re^{\Omega i} = b_0 \left(1 + \frac{b_1}{b_0} re^{i\theta} + \frac{b_2}{b_0} r^2 e^{2\theta i} + \ldots + \frac{b_m}{b_0} r^m e^{m\theta i}\right) \qquad (1a)$$

Demos a r en z un valor supremamente pequeño tal que la mayor de las cantidades o módulos

$$\frac{b_1}{b_0} r, \frac{b_2}{b_0} r^2, \ldots, \frac{b_{m-1}}{b_0} r^{m-1}, \frac{b_m}{b_0} r^m$$

sea menor que $\frac{1}{m}$. Es claro que la resultante de la línea poligonal figurativa del polinomio

$$\frac{b_1}{b_0} re^{i\theta} + \frac{b_2}{b_0} r^2 e^{2\theta i} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{b_0} r^{m-1} e^{(m-1)\theta i} + \frac{b_m}{b_0} r^m e^{m\theta i} \qquad (1b)$$

tendrá magnitud menor que 1. Al dejar pues en $z = re^{i\theta}$ a $r \neq 0$ constante y hacer variar a θ en 2π, el punto extremo σ volverá a su primitiva posición pues todos los lados de la poligonal son periódicos y admiten períodos respectivos:

$$2\pi, \frac{2\pi}{2}, \ldots, \frac{2\pi}{m-1}, \frac{2\pi}{m}. \qquad (1c)$$

Entonces cada resultante así obtenida tendrá magnitud (línea poligonal de cierre) $\alpha\sigma < 1$ (figura 6).

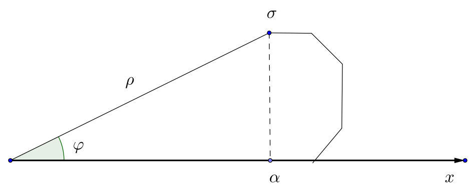

Figura 6. Linea poligonal del polinomio

Ahora, como $\alpha\sigma$ es constante menor que $1 = ox$, el punto σ describirá una curva externa a O y el ángulo $\phi = \sigma O x$ variará con θ y volverá a su primitivo valor. Cuando θ crezca en 2π sin que ϕ crezca en 2π ni en ningún múltiplo positivo o negativo de dicha cantidad, el polinomio

$$1 + \frac{b_1}{b_0} re^{i\theta} + \frac{b_2}{b_0} r^2 e^{2\theta i} + \ldots + \frac{b_m}{b_0} r^m e^{mi\theta} = \rho e^{\phi i}$$

tendrá, para ese valor de r y para todos los valores inferiores, un argumento ϕ que oscila entre dos límites ϕ_0 y ϕ_1 cuya diferencia es $< 2\pi$. Tendremos pues $Re^{\Omega i} = b_0 \rho e^{\phi i}$, de donde

$$R = b_0 \rho \quad \text{y} \quad \Omega = \phi$$

y las variaciones que sufre Ω son las mismas que sufre ϕ. Por tanto hay un valor ϵ de r tal que, dando al módulo r de $z = re^{i\theta}$ ese valor y todos los menores hasta cero, el extremo de la línea poligonal representativa de $P(z)$ describa cuando θ crece en 2π una curva cerrada externa al origen. Para ese valor ϵ de r y todos los menores el argumento Ω de $P(z) = Re^{i\Omega}$ oscila entre los límite [estrechos] sin pasar por 2π ni por ningún múltiplo positivo o negativo de esa cantidad, cuando se hace crecer a θ en 2π. Ese valor ϵ es el que apropiadamente para r en los valores $\frac{b_1}{b_0}r, \frac{b_2}{b_0}r^2, \ldots, \frac{b_{m-1}}{b_0}r^{m-1}, \frac{b_m}{b_0}r^m$ dé al mayor de ellos el valor $\frac{1}{m}$". □

Enseguida Garavito demuestra el siguiente lema:

Lema 2. *Sea $C_r := \{z \in C : |z| = r\}$, $r \geq 0$. Sea $P(z)$ definido en (1) con $b_0 \neq 0$, entonces si r es suficientemente grande, $\Gamma = P(C_r)$ encierra a O, el origen del plano complejo, m veces.*

Demostración. "Tomando en (1) al último término por factor se tendrá, invirtiendo el orden de los sumandos:

$$Re^{\Omega i} = b_m r^m e^{m\theta i}\left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m r}e^{-\theta i} + \ldots + \frac{b_0}{b_m r^m}e^{-m\theta i}\right) \qquad (1d)$$

Eligiendo ahora un valor de r tal que haga la mayor de las relaciones $\frac{b_{m-1}}{b_m r}, \frac{b_{m-2}}{b_m r^2}, \ldots \frac{b_1}{b_m r^{m-1}}, \frac{b_0}{b_m r^m}$, menor que $\frac{1}{m}$, la poligonal formada por los m últimos términos del polígono; dicha poligonal tendrá una línea de cierre $\alpha\sigma$ menor que 1 y cuya extremidad σ volverá al mismo punto de partida cuando θ crece en 2π después de describir una línea cerrada que no envuelve al origen O pues $\alpha\sigma < o\alpha$. La poligonal formada por los $m + 1$ términos del paréntesis tendrá un modulo ρ y un argumento ϕ que vuelve a su posición primitiva cuando θ crece en 2π sin haber variado en ningún múltiplo de 2π positivo ni negativo. Sustituyendo en (1d) tendremos:

$$\begin{aligned} Re^{\Omega i} &= b_m r^m \rho e^{(m\theta+\phi)i} \\ R &= b_m r^m \rho \\ \Omega &= m\theta + \phi. \end{aligned}$$

Esto supuesto, dejamos fijo r con un valor que cumpla la condición anterior y hagamos $\theta = \theta_0$ tendremos:

$$\begin{aligned} Re^{\Omega_0 i} &= b_m r^m \rho e^{(m\theta_0+\phi_0)i} \\ \Omega_0 &= m\theta + \phi_0. \end{aligned}$$

Hagamos ahora crecer θ en 2π dejando intacto a r. Como todos los términos del polinomio $P(z)$ admiten por período a 2π, el extremo del polinomio vendrá al mismo punto, pero no podemos asegurar que llegue con el mismo argumento Ω_0, como sucede con el polinomio colocado dentro del paréntesis en (1d).

Llamemos pues Ω_1 el argumento final y tendremos:

$$Re^{\Omega_1 i} = b_m r_1^m e^{[m(\theta_0+2\pi)+\phi_0]i}.$$

De donde:

$$\Omega_1 = m\theta_0 + 2\pi m + \phi_0 = \Omega_0 + 2\pi m.$$

O bien cuando z gira en 2π, $P(z)$ gira en $2\pi m$ alrededor de O. En consecuencia el extremo libre del polígono para ese valor de r y para todos los valores mayores dará m vueltas alrededor de su origen". □

Continúa para concluir:

"En resumen:

1. *Hay un valor de r suficientemente pequeño para el cual así como para todos los valores menores hasta 0, el extremo libre del polígono describe una curva cerrada externa al origen fijo, es decir, que no gira alrededor de dicho origen.*
2. *Hay también un valor finito de r pero suficientemente grande para el cual así como para todos los mayores el extremo libre describe una curva cerrada que envuelve m veces al origen fijo, es decir, que da m vueltas alrededor de dicho origen".*

Observaciones:

1. Las afirmaciones dadas en ambos lemas son correctas. En cuanto al lema 1 podríamos aclarar que, según la explicación de Garavito, la expresión en paréntesis en (1a) puede considerarse como una traslación en $+1$ de una expresión (1b) que tiene módulo (ó como él la designa, *poligonal figurativa ó línea de cierre*) $\alpha\sigma < 1$, es decir, si imaginamos un círculo centrado en O y radio $r < 1$ el cual se traslada $+1$, entonces este círculo ya no contiene a O (a menos que la expresión(1b) valga -1, en cuyo caso se encontraría la raíz buscada). Además un análisis similar al dado en (1c) permite concluir que al obtener el contorno cerrado haciendo variar a $z \in C_r$, éste no encierra a O.
2. En cuanto al segundo lema, el argumento de Garavito en términos usados actualmente puede enunciarse también así: sea C_r como se indicó antes, y designemos $\Delta_{C_r} Arg(P(z)$ el cambio en el argumento de $P(z)$ cuando z recorre C_r en sentido positivo, entonces según (1d),

$$\begin{aligned}\Delta_{C_r} Arg(P(z)) &= \Delta_{C_r} Arg(Re^{\Omega i}) \\ &= \Delta_{C_r} Arg(b_m r^m e^{m\theta i}) \\ &+ \Delta_{C_r} Arg\left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m r} e^{-\theta i} + \ldots + \frac{b_0}{b_m r^m} e^{-m\theta i}\right) \\ &= 2\pi m + 0.\end{aligned}$$

El cambio del argumento de el segundo sumando es 0 debido a que el término en paréntesis corresponde a la expresión de un contorno que no encierra al origen cuando

$z \in C_r$ para el valor de r escogido apropiadamente grande, mientras que el primer factor en (1d) tiene variación $2\pi m$ a partir del argumento inicial θ_0, suponiendo el sentido positivo.

3. El argumento de descomponer $P(z)$ como en (1d) es usado en pruebas como la de Cauchy (Cirodde (1861), p. 315) y en pruebas como las de Mac Gregor para analizar la relación del número de vueltas y m (Mac Gregor (1907), p. 3–36), pero la finalidad dentro de la demostración es distinta. Para el caso de Garavito veremos enseguida cómo será usado el lema 2. Dicho argumento también es usado para analizar integrales sobre contornos como en (Jordan (1863), p. 161). Es decir que podría haber influencia de al menos alguno de los autores como Jordan o Cirodde, pero en los varios escritos de Garavito hay un uso particular del lenguaje de los argumentos distinto a los anteriores; sobre tal punto es difícil precisar.
4. Puede decirse que el lema 2 corresponde a un caso particular del Principio del Argumento: *El número de ceros del polinomio $P(z)$ dado en (1) dentro de un contorno cerrado suave C es igual a $\Delta_C ArgP(z)$ cuando z recorre una vuelta alrededor de C en sentido positivo* (ver Markushevich (1985) p. 48 v. II). Esta conclusión también la deduce Garavito pero como nota posterior a su demostración.
5. Respecto a la argumentación sobre continuidad del polinomio $P(z)$, se sabe que Garavito usó en sus escritos la noción dinámica de infinitesimal de acuerdo a la dada en los textos de Sturm y Cauchy (Arbelaez *et al.* (2004), p. 66).

Luego pasa Garavito a un punto que se puede resumir así:

Afirmación A1: "Dados los contornos $\Gamma_R = P(C_R)$ y $\Gamma_r = P(C_r)$ tales que Γ_r no encierra el origen y Γ_R encierra a O y a Γ_r entonces se puede deformar continuamente un contorno en el otro. Y agrega: *"Si hacemos crecer por continuidad a r desde [un valor] r_0 hasta $[otro]r_m$ la curva o contorno descrito c_m por el extremo libre del polígono se irá modificando por continuidad. . . "*

Para Garavito esto se justifica de este modo: *"Sea L una recta por el origen en el plano complejo tal que Γ_r intersecta a L, entonces fijando el ángulo θ correspondiente a L tomemos $z = re^{i\theta}$, haciendo variar r . Diferenciando para la función $P(z)$ que es sinéctica en toda la extensión del plano tendremos:*

$$dPdz = P'(z)dz.$$

Hagamos $dP(z) = P'(z)e^{i\theta}dr$". Enseguida concluye: "*Ahora, como $P'(z)$ es finita, la distancia entre los puntos homólogos de dos cuerdas será infinitesimal. Llamamos puntos homólogos de las dos curvas los que corresponden al mismo valor θ del argumento de la variable z.*"

Enseguida, en un renglón que está inconcluso, afirma: *"Vamos a demostrar que las curvas correspondientes a r y a $r + dr$ . . . "*. Podríamos decir que la nota incompleta parecería referirse a lo siguiente: Sean z y z' sobre L con correspondientes r y $r' = r+\Delta r$, es decir, $z \in C_r \cap L$ y el correspondiente $z' \in C_{r+\Delta r} \cap L$, se tendrá $|P(z) - P(z')| \to 0$ cuando $\Delta r \to 0$.

Obviamente Garavito está usando la diferenciabilidad de $P(z)$ para concluir la continuidad de la misma, lo cual para el caso no afecta el proceso, pero luego usa la continuidad de $P(z)$ a lo largo de L para sustentar la *Afirmación A1* mencionada arriba. Esta afirmación, aunque correcta (ver secs. 5, 6), conceptualmente es más difícil de probar, como puede verse en las demostraciones que mencionaremos en la siguiente sección.

Continúa así: *"De estos dos lemas vamos a deducir el teorema de Alambert* [*sic*].

Sea ahora r_0 un valor de r tal que dando a z el valor $z_0 = r_0 e^{i\theta}$ y haciendo variar a θ en 2π, el extremo libre del polígono describa una curva cerrada que no envuelva al extremo fijo O y sea r_m otro valor de r tal que al dar a z el valor $z_m = r_m e^{i\theta}$, la curva descrita por el extremo libre del polígono envuelva m veces a O. Si hacemos crecer por continuidad a r desde r_0 hasta r_m la curva o contorno descrito c_m por el extremo libre del polígono se irá modificando por continuidad y habrá un valor r_1 de r tal que para todo valor mayor la cuerda envuelve a O. Es claro que la curva c_m para ese valor r_1 de r pasará por O. Sea θ_1 el valor de θ correspondiente, se tendrá llamando $z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$:

$$f(z_1) = 0.$$

Hemos hecho los razonamientos sobre un polinomio de coeficientes reales $b_0, b_1, \ldots, b_m$, esta condición solo acarrea la igualdad de los ángulos de la línea poligonal pero tiene influencia en la demostración de los ***lemas*** *en que hemos fundado la existencia de la raíz z_1 de $f(z) = 0$.*

Por tanto; toda ecuación formada por la anulación de un polinomio entero de coeficientes reales o imaginarios admite por lo menos una raíz real o imaginaria. Queda entonces demostrado el teorema de Alambert(sic)". También nota que m coincide con el número de vueltas para C_R y adicionalmente dice: *"No nos detendremos a demostrar que toda ecuación del grado m admite m raíces. Solo hacemos notar de paso que a cada vuelta del extremo libre que abraza al origen corresponde una raíz de módulo inferior al valor de z que hace girar al extremo (volveremos adelante sobre este asunto). Supongamos a $P(z)$ de coeficientes reales y sea $z_1 = r_1 e^{-\theta i}$ una raíz. Al trazar con este valor de z el polígono, este polígono cierra, si describimos otro polígono con $z_2 = r_1 e_1^{-\theta} i$ se obtendrá otro polígono simétrico del primero y que en consecuencia deberá cerrar como aquel. Así: en toda ecuación de coeficientes reales $f(z) = 0$; si $z = r_1 e^{\theta_1 i}$ es raíz de este el valor conjugado $z_2 = r_1 e^{-\theta_1 i}$ lo será igualmente."*

Enseguida veremos cómo la demostración de Garavito se asemeja mucho a la dada por Courant y Robbins y a la de Fine y Rosenberger.

5. Comparación de la prueba de Garavito y la de Courant & Robbins

A continuación comentaremos aspectos similares de las demostraciones de Garavito y de Courant & Robbins dada en *What is mathematics*? (Courant& Robbins (1941), (1996) p. 270–271). Más que una comparación buscamos hacer un paralelo entre éstas, teniendo en cuenta que si bien hay diferencias en los referentes conceptuales, también surgen similitudes evidentes que se pueden resumir de la siguiente manera:

- Se supone por contradicción que (1) no tiene solución, $b_0 \neq 0$ y el grado m del polinomio es mayor que cero.
- Se define $C_r := \{z \in C : |z] = r\}, r \geq 0$.
- $\Gamma = P(C_r)$ es una curva cerrada en el plano complejo.
- Sea O (el punto $(0, 0)$) y C_r, para algún $r \geq 0$, Courant & Robbins define el orden de O respecto al polinomio $P(z)$ para la curva C_r como el número de vueltas que dá $P(z)$ alrededor de O cuando $z \in C_r$ gira una vuelta en torno a O. Se representa este número como $\phi(r)$. Garavito identifica el número de vueltas que da $P(z) \in \Gamma$ en torno a O cuando $z \in C_r$ gira una vuelta en torno a O.

Se observan estos pasos en las demostraciones de Garavito y de Courant & Robbins.

	Garavito	Courant & Robbins
1.	$P(z)$ es continua	$P(z)$ es continua
2.	$P(C_r)$ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$.	$P(C_r)$ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$.
3.	Existe algún $r > 0$ suficientemente pequeño tal que si $z \in C_r$ recorre una vuelta sobre C_r. $P(z) \in P(C_r)$ recorre una vuelta y no encierra a O.	$P(C_0) = b_0 \neq 0$, luego $\phi(0) = 0$, respecto a $P(z)$.
4.	Si r es suficientemente grande y $z \in C_r$ da una vuelta alrededor de O, $P(z)$ da m vueltas alrededor de O.	Si r es suficientemente grande $\phi(r) = m$ respecto a $P(z)$.

En cuanto a la demostración de Courant & Robbins, el punto crucial es que al suponer $P(z) \neq 0$, entonces $\phi(r)$ pasa de un valor 0 a un entero positivo, se obtiene una contradicción y esto, aunque puede sorprendernos, es suficiente para concluir según Courant y Robbins: *puesto que $\phi(t)$ depende continuamente de $P(z)$ la "cual es continua...tomando r suficientemente grande... [y]... deformando continuamente [vemos que]...el orden de $P(z)$ es el mismo que el de z^n", (ibid p. 271)* (habría lugar a recordar que su libro es una obra clásica de divulgación general más que de texto). Es decir, para el polinomio $P(z)$, que es continuo el suponer, que $P(z) \neq 0$ implica que $\phi(r) = 0$ y también $\phi(r) = m \geq 1$, lo cual es una contradicción, siendo ϕ continua y constante. Pero en el fondo es ésta la misma argumentación que da Garavito, basado en la continuidad de $P(z)$. En otras palabras: no se puede deformar continuamente $\Gamma = P(C_r)$ en $\Gamma = P(C_R)$ sin pasar por O. Esta prueba que aparece como una ilustración de la topología, en particular del grado de Brower y sus alcances en la sección de ese nombre, viene precedida en el libro de Courant y Robbins de una ilustración de lo que es tal grado y que para el caso del polinomio es constante: *"La conclusión que una cantidad que varía continuamente y solo toma valores enteros debe ser constante es un típico método de argumentación matemática que interviene en varias demostraciones* " (Courant & Robbins, (1996) p. 254, ver la siguiente sección).[6] Entonces esto puede dar luz acerca de que la idea en la Afirmación A1

[6]H. Arnold afirmaba que la demostración de Courant & Robbins recaía sobre el concepto de grado de Brower pero que no había una demostración basada en el teorema del punto fijo de Brower y pretendió darla sin éxito (Arnold (1949)).

de la prueba de Garavito tiene un componente que no se puede vislumbrar fácilmente y que requiere del uso de herramientas que entonces no estaban disponibles y menos aún en el nivel académico de Bogotá hacia 1900. Como veremos enseguida, un paralelo con otra demostración aún más reciente y que tiene una semejanza más sorprendente con la prueba de Garavito, como juzgará el lector, hará surgir de nuevo la necesidad de justificar el último paso.

6. Comparación de la prueba de Garavito y la de Fine & Rosenberger (1997)

En su libro los autores muestran diferentes tipos de demostraciones del TFA, entre estas la que esquematizamos a continuación (Fine & Rosenberger(1997) p. 135–136). Nuevamente la comparación debe tomarse como paralelo dentro de los contextos correspondientes de tiempo y conceptualizaciones.

	Garavito	Fine & Rosenberger
1	$P(z)$ es continua	$P(z)$ es continua
2	$P(C_r)$ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$	$P(C_r)$ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$
3	Existe algún $r > 0$ suficientemente pequeño tal que si $z \in C_r$ recorre una vuelta sobre C_r. $P(z) \in P(C_r)$ recorre una vuelta y no encierra a O	Para r pequeño $P(C_r)$ no encierra a O, $P(0) \neq 0$, (winding number = 0, definido como integral).
4	Si r es suficientemente grande, entonces si $z \in C_r$ da una vuelta alrededor de O, $P(z)$ da m vueltas alrededor de O	Si r es suficientemente grande, winding number de z^n y de $P(z)$ coinciden.
5	$P(C_r)$ no contiene a O para r pequeño y $P(C_r)$ gira m veces en torno a O para m grande. Como $P(z)$ es continua existe algún r_1 tal que $P(C_{r_1})$ pasa por O.	$P(C_r)$ no contiene a O para r pequeño y $P(C_r)$ gira m veces en torno a O para r suficientemente grande. Como $P(z)$ es continua existe algún r_1 talque $P(C_{r_1})$ pasa por O.

Entonces se puede apreciar que el esquema de la prueba es, conservando los conceptos particulares, muy similar en ambas. En cuanto al argumento dado en el paso 5 dan la misma justificación, pero Fine y Rosenberger concluyen esta prueba y advierten: *"en el siguiente capítulo generalizamos esta demostración a una prueba topológica [del mismo teorema]"* (ibid p. 136), aunque realmente en nuestra opinión lo que hacen en dicha prueba es sustentar en el ámbito de la topología este paso 5, ya que los pasos anteriores son los mismos. Es decir, si tomamos en el sentido estricto la demostración de Rosenberger en cuanto a su paso 5 en tal caso el uso del *winding number* realmente no marca diferencia. O lo que es lo mismo, la de Garavito podríamos decir que es imprecisa, o que aunque sea intuitivamente clara requeriría mas justificación. De hecho Fine & Rosenberger no explican nada más y pasan a una sección de pruebas que clasifican como topológicas, en las cuales usan la noción de homotopía. Entonces, en nuestra opinión, más que extender la prueba anterior lo que van a hacer será precisarla: demuestran que $P(z)$ es homotópico a z^m, $(m \geq 1)$ por lo tanto tiene el mismo grado de Brower (*intuitivamente el número de veces que $P(S^2)$ se envuelve alrededor de S^2, ibid p. 176–180*) y de allí deduce que $P(z)$

es sobre $\mathbb{C}$ y se infiere la conclusión. Finalmente mencionamos pruebas que en un contexto diferente también ayudarían a precisar la Afirmación A1: son las de Spivak (Spivak (1999)), p. 284 ejercicio 3, p. 285 ejercicio 4 y p. 292 ej. 22.

7. Conclusiones

1. Las notas de Garavito sobre variable compleja son transcripciones de los textos de Jordan, Meray y Sturm, los cuales cita con el nombre de estos autores en escuetas referencias y contienen temas variados. Al parecer no dictó un curso de la materia en su época sino que hizo transcripciones de los textos. Las notas de cálculo diferencial e integral recopiladas por sus estudiantes A. Muñoz y E. Merchán contienen algunos temas de números complejos.

   Aunque la teoría de funciones de variable compleja se desarrolló desde finales del siglo XVIII y con gran auge a mediados del XIX, la difusión en Colombia fue escasa, aunque los textos mencionados figuran en catálogos de la Universidad Nacional hasta 1920 y el de Jordan es considerado un texto de gran influencia en su época (Gispert (1982)).
2. El libro de Cauchy figura en el Catálogo de 1921 pero no es mencionado por Garavito, aunque sí menciona algunos resultados como los residuos. La demostración de Cauchy del TFA, la cual a su vez es basada en la de Legendre (Bradley (2009) p. 217), aparece en varios textos de la época como el de Sturm (1901), el de Cirodde y es muy similar a la de Jordan.
3. Una exploración de los textos citados en los estudios de esa época indican que la demostración de Garavito del TFA es distinta a las que allí figuran. La idea de expresar $P(z)$ como en el lema 2 aparece en distintas otras demostraciones con el propósito, por ejemplo, de concluir que $P(z)$ y z^n tiene la misma variación de argumento. El lugar de esta idea en la demostración es diferente. Por ejemplo, en la prueba número 6 de Mac Gregor es para concluir que $P(z) = 0$ y $P(z) + \phi(z) = 0$ tienen el mismo número de raíces, siendo $\phi(z)$ el factor en (1d) (Mac Gregor (1907) p. 36), o también aparece con la idea de minimizar $|P(z)|$ (Cirodde (1861), p. 315). También se usa para facilitar el cálculo de integrales de contorno (Jordan (1893), t. 2, p. 161). Sin embargo la finalidad de conectarlo con la Afirmación 1 no la encontramos en las referencias revisadas anteriores a Garavito, solo hasta la de Fine & Rosenberger de 1997. El lema 1 no aparece en la prueba de Cauchy, en donde se analiza más el módulo de $P(z)$ y su valor mínimo. La idea subyacente a la Afirmación A1 que Garavito resume como *"Si hacemos crecer por continuidad a r desde r_0 hasta r_m la curva o contorno descrito c_m por el extremo libre del polígono se irá modificando por continuidad..."*, que luego le permite concluir que uno de los contornos debe intersectar a O, es la que no puede justificar bien por requerir precisar un concepto inexistente como el de homotopía. Garavito aplica incorrectamente la continuidad de $P(z)$ sobre una línea por el origen para justificar la deformación continua dada en la Afirmación 1.
4. La demostración de Garavito es correcta, siendo un punto particular el que requiere mas precisión: la Afirmación A1. Incidentalmente, la demostración es similar a la de

Courant y Robbins y al hacer el paralelo, el punto 4 requiere más precisión. La idea de Garavito de considerar la línea poligonal asociada al polinomio permite que al hacer variar z en círculos C_r, $P(z)$ varíe de manera que se puede argumentar que algún contorno cerrado $P(C_{r_1})$ pasará por el origen O.

5. En cuanto a la situación histórica particular de la demostración, puede decirse que Garavito tomó una idea original para su prueba pero esta permaneció inédita y, en la misma forma en que en otras épocas hubo destacados matemáticos que en el transcurso de su argumentación omitieron detalles, algunos más difíciles de justificar que otros, podría decirse que la parte faltante de la demostración de Garavito era en su momento difícil de solventar. Las demostraciones de Garavito y la primera parte de la de Fine y Rosenberger (Fine y Rosenberger (1997) p. 135–136) contienen un vacío en común que se deberían precisar, pero éste es alcanzable más fácilmente para Fine y Rosenberger con el concepto de homotopía (*ibid* p. 176–180). De forma análoga, la de Courant y Robbins puede sortear esta dificultad a la luz del grado de Brower. De forma similar, la primera prueba de Gauss tuvo imprecisiones como el concepto de curva continua (Klein (2006) p. 79–80), y podríamos decir que en medida menos grave sucedió con las objeciones de Gauss a la demostración de Lagrange, en el sentido que se puede superar fácilmente a la luz de la existencia del campo de descomposición del polinomio, lo cual Lagrange no conocía (Suzuki (2006) p. 705). De igual modo una referencia de 1903 indica que las pruebas de TFA de tres textos ingleses usados en Estados Unidos recibieron objeciones (Moritz (1903)) y hacia 1950 pruebas como la de Arnold y otra de Niven fueron desvirtuadas (ver sec. 3). Por lo anterior puede decirse que hay limitaciones inevitables y conceptos interpuestos que se hacen manifiestos en el desarrollo histórico de la prueba.

6. De acuerdo a las notas en los *Cuadernos*, puede decirse que Garavito pudo llegar a su demostración como resultado de sus ideas sobre la relación entre líneas poligonales en el plano complejo y polinomios en variable compleja, tal como lo habría divulgado a algunos de sus amigos (Lleras(1920)). Desde este punto de vista se puede decir que el teorema de D'Alembert es una consecuencia lógica de la cuestión concerniente a preguntarnos en qué caso la línea poligonal correspondiente a un polígono se cierra, de ahí que el teorema sea de existencia más que un teorema constructivo, como sí sucede en la prueba de Lagrange (ver Suzuki (2006)). Luego de su demostración agrega otras cuestiones, como por ejemplo: *"habrá infinidad de ecuaciones que representan al mismo polígono y se ocurre ahora preguntar qué clase de polígonos pueden representar las ecuaciones, y si dado un polígono convexo se puede encontrar la ecuación polinomial correspondiente a éste"*.

7. Aunque Courant & Robbins dicen que la prueba se basa en el argumento de que el índice de Brower de $P(z)$ es constante, no dan referencias acerca de si su prueba tiene otra fuente. Tampoco la prueba de Fine y Rosenberger trae una fuente, sin embargo a la luz de un trabajo como el de Mac Gregor (Mac Gregor (1907)), podría decirse que las pruebas no usan los argumentos de éstas, es decir, a la manera de Garavito, y aunque al parecer la noción de lo que hoy se conoce como *winding number* proviene de Cauchy quien la usó para integrales, no es fácil precisar desde cuándo se

usó en este tipo de demostraciones, que por lo menos en las más conocidas según Mac Gregor, las del estilo de D'Alembert, primera de Gauss y Cauchy, no aparece (ibid p. 4–9).

8. La idea de comparar los puntos en común de las demostraciones de distintas épocas surge de manera natural al observar las similitudes de éstas. Dos hechos surgen entonces: la no identificación clara con las pruebas dadas en otros textos de la época y la similitud con las pruebas dadas en 1941 y 1997, las cuales no indican una réplica de las pruebas clásicas del siglo XIX sino que están más ligadas a conceptos más modernos como grado de Brower y homotopía. Encontramos una dificultad, y es que estas pruebas no dan referencia de su fuente; podríamos asumir que son originales. Las pruebas propuestas por Spivak permiten aclarar la Afirmación 1 con otras ideas. Probablemente se requiere conocimiento especializado para aclarar estos conceptos y su evolución dentro de la prueba, sin embargo se ofrece al lector la consideración de estos elementos con relación a la prueba de Garavito.
9. Varias de las proposiciones tratadas por Garavito con transcripciones de los temas de variable compleja pueden ser objeto de a una próxima exposición, junto con otro resultado que apareció parcialmente publicado en la Revista de la Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales póstumamente con la autoría de Garavito, por Jorge Alvarez, pero que en los apuntes presenta una extensión al parecer no publicada. Se trata de un escrito sobre una generalización de las funciones trigonométricas referidas a una espiral.
10. En varios de los apuntes Garavito desarrolla casos particulares para polinomios de grado 2, 3, 4 para analizar el polígono asociado. En las figuras 2-5 aparecen algunas ilustraciones, aunque algunos de ellos se ilustran con métodos diferentes la solución de la ecuación polinomial, aclarando que los correspondientes a la idea de línea poligonal cerrada los ilustra con las figuras 3 y 4; pero para otros usa métodos trigonométricos, sustituciones, reducción de orden y derivadas para encontrar raíces tal como se ve en los libros de Sturm, Cirodde y oros de la época.
11. Esperamos que este trabajo sea un aporte a la recuperación de una parte olvidada de la obra de Garavito y a su valor histórico, pues coincidiendo con las palabras de del profesor J. Arias de Greiff, de pronto en Colombia ha habido más historia de la ciencia que ciencia propiamente dicha.[7]

Referencias

[1] Aleksandrov, A. & Kolmogorov, A. *(et. al.)*, *La matemática: su contenido, método y significado*. Alianza Editorial. 2 vol., Madrid, 1985.

[2] Anacona, M. *et al.*, *Formación de cultura científica en Colombia. Ensayos sobre matemáticas y física*. Instituto de Educación y Pedagogía, U. del Valle, Colciencias, 2004.

[3] Arbelaez, G. & Recalde, L., *El desarrollo del análisis matemático en Colombia 1850-1950*. Quipú, vol. 14, (**3**) (2012), 363–394.

[7] La ciencia de ser maestro. Entrevista en Revista Bocas. Edición 31, p. 61–64, Junio de 2014.

[4] Arnold, H., *A topological proof of the FTA.* American Mathematical Monthly, vol. 56, (1949) 465–466.

[5] Baltus, C., *D'Alembert's proof of the FTA*. Historia Mathematica. vol. 31, (**4**), (2004), 414–428.

[6] Bateman, A., *Homenaje a Julio Garavito*. Anales de Ingeniería, vol. 54, (1954), 464–468.

[7] Bertrand, J., *Traité Elementaire D'Algébre.* Librairie de L. Hachette, París, 1851.

[8] Bezout, E., *Theorie Générale des équations algébriques.* París. General Theory of Algebraic Equations. Traducción Eric Feron. Princeton U. Press. Book 2 (2006), 1779.

[9] Bourbaky, N., *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza Universidad, Madrid, 1976.

[10] Bradley, R. & Sandiffer, E., *Cauchy's course d'Analyse. An annotated translation.* Sources and Studies in the History of Mathematical and Physical Sciences. Springer, New York, 2009.

[11] Bühler, W., *Gauss: a biographical study.* Springer Verlag, New York, 1981.

[12] Cajori, F., *A history of mathematical notations.* Dover, New York, 1993.

[13] *Catálogo Documental del Archivo Histórico del Observatorio Astronómico Nacional. Primera parte (1803–1930).* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2007.

[14] *Catálogo de la biblioteca de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería.* Anales de Ingeniería. Sociedad Colombiana de Ingenieros, vol. 29, (**342**), (1921) 99–168; 169–212.

[15] Cirodde, P. L., *Lecciones de álgebra.* 3 ed.Traducción Peregrin, B. Librería extranjera y nacional, científica y literaria. Madrid, 1861.

[16] Collette, J. P. *Historia de las Matemáticas.* Siglo XXI editores s.a. 4a. ed. México, 2000.

[17] Courant, R. & Robbins, H., *What is Mathematics?.* Oxford University Press, Segunda edición, 1996. (Primera edición. Oxford U. Press. London, 1941. Primera edición español, Aguilar, Ed. Madrid. 1955)

[18] Comberousse, Ch., *Cours des mathematiques.* Tomo 4, Libro 7, 2 ed. Gauthier Villars et fills, Paris, 1890.

[19] *Datos sobre la historia de la enseñanza de las matemáticas en Colombia.* Anales de Ingeniería, Sociedad Colombiana de Ingenieros, vol. 10. (**113-114**), (1898), 13–15.

[20] Dunnington, G., *Karl Friederich Gauss: titan of Science.* Hafner. The Mathematical Association of America, 2004.

[21] Fine, B. & Rosenberger, G., *The fundamental theorem of Algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1997.

[22] Garavito, J., Cuaderno 3 [sic], *Título: Álgebra imaginarias, Título Apuntes diversos* (1903). Cuaderno 5 *Título: cuestiones diversas referidas a matemáticas puras y aplicadas. Funciones simples especiales,* (1901-1902). Cuaderno 30 *Título: Funciones elípticas. Cantidades imaginarias,* (1897). Cuaderno 31 *Título: Análisis infinitesimal. Polígonos,*(1897). Cuaderno 29 *Título: Nota sobre las ecuaciones algebraicas,* (1898). Carpeta 8, Caja 4. *Título: Operaciones con complejos. Ecuaciones algebraicas enteras de una sola variable.*(s. f.) Carpeta 7, Caja 4, *Título: Álgebra de imaginarias,* (1908). Cuaderno 20 (s. f.) Cuaderno 22 (s. f.) *Apuntes varios.* Observatorio Astronómico Nacional. Bogotá.

[23] Gispert-Chambaz, H., *Camile Jordan et les fundaments de l'analyse (Comparaison de la première édition (1882-1887) et de la deuxieme (1893) de son cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique).* Departament de mathematiques, Universite París sud. These presentee pour obtenir le titre de Docteur 3º cycle, París, 1982.

[24] Grattan-Guinness, I., (editor) *Enciclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences,* 2 vol., Routledge Inc. New York, 1994.

[25] Harel, C., *C. F. Gauss' proofs of the fundamental theorem of Algebra.* En: http://math.huji.ac.il/ ehud/MH/Gauss-HarelCain.pdf, Marzo 11 2019.

[26] Humbert, G., *Cours d'Analyse professé a L'Ecole Polytechnique.* T. 2. Gauthier-Villars, París, 1904.

[27] Jordan, C., *Cours d'Analyse de L'Ecole Polytechnique.* 3 ed. T1, Calcul Differentiel. T2, Calcul Integral Gauthier Villars Bourbakiet fills, París, 1893.

[28] Katz, V., *From Analytic Geometry to the fundamental theorem of algebra.* En: *Taming the unknown: a history of Algebra from antiquity to the early twentieth century.* Princeton University Press, New Jersey, 2014.

[29] Klein, F., *Lecciones sobre el desarrollo de la matemática en el siglo XIX.* Editorial Crítica. Fundación Iberdrola, Barcelona, 2006.

[30] Kline, M., *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Vol. 3. OUP USA, 1990.

[31] Nota Editorial. *Reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de ingeniería.* Anales de Ingeniería , 39(459), 401-403, 1931, Bogotá.

[32] Lacroix, S., *Elémens D'Algébre.* Bachelier-Imprimeur Libraire, París, 1836.

[33] Lefebvre, B. (S. J.), *Cours de Algébre Elémentaire précédé d'un apercu historique sur les origenes des Mathematiques élémentaires et suivi d'un recueil d'exercises et de problemes.* T. I, Namur. Librairie classiqué de Ad Wesmael Charlier Editeur, París, 1897.

[34] Lefebvre, B. (S. J.), *Cours développé d'Algébre Elémentaire précédé d'un apercu historique sur les origenes des Mathematiques élémentaires et suivi d'un recueil d'exercises et de problemes.* T. II, Namur. Librairie classiqué de Ad Wesmael Charlier Editeur, París, 1898.

[35] Liévano, I., *Tratado de Aljebra (sic).* Imprenta M. Rivas. Bogotá, 1875.

[36] LLeras, R., *Julio Garavito Armero: Notas íntimas.* Bisemanario El Catolicismo, año 11 (**138**) marzo 20 de 1920, Bogotá, 1–3.

[37] Loomis, E., *A treatise on Algebra.* Harpers and Brothers, New York, 1886.

[38] Mac Gregor, M., *Proofs of the fundamental theorem of Algebra.* Thesis Master of Arts. MIT, Boston, 1907. (Nota: de acuerdo a sus referencias, el año en la portada debe ser posterior.).

[39] Markushevich, A., *Theory of functions of a complex variable.* 3 vol. Chelsea Publishing Company, New York, 1985.

[40] Martínez-Chavans, R., *El pensamiento físico y epistemológico de Garavito.* Revista Naturaleza (**4**). Fondo Colombiano de Investigaciones Científicas y Programas Especiales, Francisco Jose de Caldas (1986), 15–25.

[41] Martínez-Chavans, R., *La recepción de la física moderna en Colombia.* Saber y Tiempo (**18**), Buenos Aires (2004), 41–69.

[42] Mèray, Ch., *Noveau prècis d'analyse infinitès.* F. Savy, Paris, 1872.

[43] Mèray, Ch., *Lecons nouvelles sur l'analyse infinitesimale et ses applications gèomètriques.* Gauthier Villars et fills, Paris, 1897.

[44] Niven, I., *Extension of the topological proof of the fundamental theorem of Algebra*, American Mathematical Monthly, vol. 57 (1950), 246-248; ver también vol. 58 (1951), 104.

[45] Ortiz, F., *Cálculo de primas y reservas de seguros de vida por Julio Garavito según el texto de E. Dormoy.* Lecturas Matemáticas, vol. 35 **(1)** (2014), 59–85.

[46] Pla I Carrera, J., *The fundamental theorem of Algebra before Gauss.* Publicacions Mathematiques, vol. 66 (1992), 879–911.

[47] *Pensum para la facultad de matemáticas e ingeniería presentado a la consideración de la Sociedad Colombiana de Ingenieros.* Anales de Ingeniería vol. 28 **(333)** (1920), 181–185.

[48] Quintero, C., *Bajando las estrellas a la tierra: la astronomía colombiana entre lo global y lo local, 1868-1920*. En: Argentina Saber y Tiempo: Revista Argentina de Historia de La Ciencia. **5** fasc. 19 (2005), 51–71.

[49] Reich, K. *K.F. Gauss 1777-1977*, Munchen Moos, Berlín, 1977. En: www.archive.org.

[50] Remmert, R., *The fundamental theorem of algebra.* En *Numbers*. Graduate texts in Mathematics 123. Springer, New York, 1991.

[51] Ribnikov, K., *Historia de las matemáticas.* Mir, Moscu, 1987.

[52] Robson, E. & Stedall, J. *The Oxford Handbook of the History of Mathematics.* Oxford U. Press, 2008.

[53] Sánchez, C., *Las matemáticas en Colombia en el siglo XIX*, LLULL, vol. 22 (1999), 687–705.

[54] Sánchez, C., *Los ingeniero-matemáticos colombianos del siglo XIX y comienzos del XX. Las tesis para ser profesor en ciencias matemáticas.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2007.

[55] Sánchez, C., *Los cuadernos de Julio Garavito. Una antología comentada.* Revista Academia Colombianas de Ciencias Exactas, Físicas Nat. **31** (119) (2007), 253–266.

[56] Sánchez, C., *Julio Garavito Armero y el desarrollo de la ciencia en Colombia.* En: La hegemonía conservadora, p. 291–322. Ruben Sierra. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2018.

[57] Serret, J., *Course d'Algebre Superieure.* 3 ed. Gauthier Villars, Paris, 1866.

[58] Smith, D. *A source book in Mathematics.* Mc. Graw Hill. London, 1929.

[59] Smith, D., *History of Mathematics.* vol. 2, Dover, New York, 1958.

[60] Spivak, M., *A comprehensive introduction to Differential Geometry*. vol. 1, 3 Ed., Publish or Perish Inc. New York, 1999.

[61] Sturm, Ch., *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytecnique.* t.II segunda edición, Primera edición 1864; Gauthier-Villars, París, 1901.

[62] Suzuki, J., *Lagrange's proof of the fundamental theorem of Algebra.* American mMathematical Monthly,, 113 (2006), 705–714.

[63] Weisstein, E., *Concise encyclopedia of Mathematics.* CRC Press. New York, 1998.

[64] Wussing, H., *Lecciones de historia de las matemáticas.* Siglo XXI Editores, Madrid, 1979.

Recibido en marzo de 2018. Aceptado para publicación en abril de 2019.

FABIO ORTIZ GUZMAN
UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA, BOGOTÁ
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES, BOGOTÁ
e-mail: fabio.ortiz@uexternado.edu.co
fortiz@uniandes.edu.co