Lecturas Matemáticas
Volumen **40** (1) (2019), páginas 51-69
ISSN 0120-1980

Sobre la tabla de Kimura y la ecuación de Riemann

Some remarks about Kimura's Table and Riemann's Equation

Primitivo B. Acosta-Humánez[1] y Henock Venegas-Gómez[2]

[1]Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña - ISFODOSU, República Dominicana
[2]Universidad Nacional de Colombia, Colombia

Resumen. La ecuación de Riemann es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con 3 singularidades de tipo regular. En este trabajo realizaremos un estudio de esta ecuación y veremos bajo qué condiciones sus soluciones pueden ser expresadas en términos de funciones elementales y sus integrales, basándonos en el teorema de Kimura, el cual establece una relación entre la integrabilidad de la ecuación de Riemann en el sentido de Liouville y la diferencia de los exponentes locales de cada una de sus singularidades. En particular, se estudiarán la ecuación de Chebyshev y un caso particular de una ecuación hipergeométrica. Se mostrará que las respectivas extensiones de Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(x)$ para ambas ecuaciones es una extensión Liouvilliana.

***Palabras clave*:** Ecuación de Riemann, exponentes, integrabilidad, Liouville, teorema de Kimura.

Abstract. The Riemann Equation is a second order lineal differential equation with 3 singularities of regular type. In this work we will study the Riemann Equation and we will see under which conditions their solutions can be written as elementary functions and integrals of elementary functions. This will be based on Kimura's theorem, which establishes a link between the integrability of the Riemann Equation in Liouville's sense and the difference of the local exponents of each of their singularities. In particular, we will study the Chebyshev Equation and a special case of a hypergeometric equation. It will be shown that, in both cases, the Picard-Vessiot extension of $\mathbb{C}(x)$ is a Liouvillian extension.

***Key words*:** Riemann Equation, exponents, integrability, Liouville, Kimura theorem.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. Primary 12H05; Secondary 34M15, Third 35A24.

1. Introducción

Análogo a la teoría de Galois clásica para polinomios, Picard y Vessiot [30, 46] iniciaron una teoría de Galois para ecuaciones diferenciales, conocida hoy como teoría de Galois diferencial [16]. La filosofía galoisiana es la misma: resolver ecuaciones de forma explícita usando los coeficientes de las ecuaciones. Usando la teoría de Galois diferencial, Kimura logró ampliar la tabla de Schwarz para determinar la integrabilidad de una de las ecuaciones diferenciales más importantes: la ecuación hipergeométrica, ver [31, 32]. La tabla de Kimura sigue siendo una herramienta muy importante en la actualidad, ver [11, 20, 25, 26, 28, 29, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 48, 51]. Este artículo pretende ser un abrebocas para aquellos que desean iniciar un estudio de la teoría de Galois diferencial, en particular a quienes solo les interesa saber sobre la integrabilidad de la ecuación de Riemann. Existen referencias en castellano sobre la teoría de Galois diferencial tales como [3, 4, 16, 17, 24]. Sin embargo, algunas de las referencias clásicas de esta teoría están en inglés [43, 46, 50], pero también se recomiendan las referencias recientes [1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 52], las cuales contienen ejemplos y detalles en esta teoría.

Por otra parte, para el estudio de la ecuación de Riemann se recomiendan las referencias [21, 23, 34, 35, 49], las cuales pueden ser de gran ayuda para ampliar el material presentado aquí.

2. Algunas Definiciones de la Teoria de Picard-Vessiot

Esta sección la basaremos en las referencias [22, 30].

Definición 1. Sea $L(y) = 0$ una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes en un cuerpo diferencial $< K, \partial_z >$. Decimos que M/K es una extensión de Picard-Vessiot para $L(y)$ si:

1. M es generado sobre K como cuerpo diferencial por las soluciones linealmente independientes de $L(y) = 0$ y sus derivadas.
2. M tiene el mismo cuerpo de constantes que K.

Ejemplo 1. Considere $\mathbb{C}(x)$ como nuestro cuerpo diferencial con la derivada usual. Podemos determinar la extensión de Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(x)$ para $L(y) = y\prime\prime + (1 - x^2)y = 0$ por la adjunción de las soluciones de $L(y) = 0$. Como el operador lineal $L = \partial_x^2 + (1 - x^2)$ puede ser factorizado como $(-\partial_x + x)(-\partial_x - x)$, una solución de $L(y) = 0$ se obtiene a partir de la solución de $(-\partial_x - x)(y) = -y\prime - xy = 0$, luego $y_1 = c_1 e^{\frac{-x^2}{2}}$, donde $c_1 \in \mathbb{C}$, es una solución. La otra solución (y_2) se puede hallar por medio de reducción de orden, por tanto la extensión Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(x)$ para $L(y)$ es $\mathbb{C}(x, e^{\frac{-x^2}{2}}, \int e^{x^2} dx)$.

Definición 2. Sea $< K, \partial_z >$ un cuerpo diferencial y M su extensión de Picard-Vessiot para una ecuación diferencial lineal homogénea $L(y) = 0$. Un K-automorfismo diferencial σ de K, es un K-automorfismo tal que

$$\sigma(\partial_z(a)) = \partial_z(\sigma(a)), \quad \forall a \in L.$$

El grupo de todos los K-automorfismos diferenciales de M sobre K, es llamado *el grupo de Galois diferencial* de M sobre K y lo notamos $DGal(L/K)$.

Definición 3. Sea $< K, \partial_z >$ un cuerpo diferencial y M una extensión diferencial de K. decimos que M es una extensión liouvilliana de K si M admite una sucesión de cuerpos diferenciales

$$K = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$$

tal que $M_i = M_{i-1}(\alpha)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, donde:

1. α es algebraico sobre L_{i-1}, o
2. α es primitiva sobre L_{i-1}, es decir, $\partial_x(\alpha) \in L_{i-1}$, o
3. α es exponencial sobre L_{i-1}, es decir, $\frac{\partial_x(\alpha)}{\alpha} \in L_{i-1}$.

Ejemplo 2. $\mathbb{C}(x, e^{x^2}, \int e^{x^2 dx})$ es una extensión liouvilliana de $\mathbb{C}(x)$ ya que existe la cadena de cuerpos diferenciales

$$\mathbb{C}(x) \subset \mathbb{C}(x, e^{x^2}) \subset \mathbb{C}(x, e^{x^2}, \textstyle\int e^{x^2 dx}),$$

donde cada extensión ha sido construida a partir de la anterior por la adjunción de exponenciales de funciones algebraicas y exponenciales de integrales de funciones algebraicas.

Nota 1. Una función se dice liouvilliana sobre K, si está contenida en una extensión liouvilliana de un cuerpo diferencial K.

Definición 4. Un conjunto algebraico es reducible si es la unión de dos subconjuntos propios cerrados; es disconexo si es la unión de dos subconjuntos disjuntos propios cerrados. Un grupo algebraico se dice irreducible si y solo si es conexo.

Definición 5. Sea G un grupo algebraico lineal. La componente identidad G°, es la única componente irreducible que contiene el elemento identidad de G.

Nota 2. Si G es reducible, la única de sus componentes que es un grupo es G°.

3. Función hipergeométrica

Esta sección se basa en las referencias [27, 33, 49].

Sea $z \in \mathbb{C}$. Se define la función hipergeométrica para $|z| < 1$ mediante la serie de potencias

$$_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

donde

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a(a+1)\cdots(a+n-1) & n > 0 \end{cases} \tag{2}$$

De la anterior definición, se puede ver que

$${}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z). \tag{3}$$

3.1. Casos Especiales

Algunas funciones pueden ser expresadas en términos de la función hipergeométrica.

Polinomios. Si a o b es cero o un entero negativo, la serie se convierte en una suma finita

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a,0;c;z) &= 1, \\ {}_2F_1(a,-k;c;z) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{(a)_n(-k)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Logaritmos.

$$\begin{aligned} z\,{}_2F_1(1,1;2;-z) &= log(1+z), \\ 2z\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},1;\tfrac{3}{2};z^2\right) &= log\frac{1+z}{1-z}. \end{aligned}$$

Funciones racionales.

$${}_2F_1(a,b;b;z) = \frac{1}{(1-z)^a}.$$

Funciones trigonométricas inversas.

$$z\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};z^2\right) = \arcsin(z).$$

3.2. Singularidades

Considere la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y'' + P(z)y' + Q(z)y = 0. \tag{4}$$

Por lo tanto:

1. Si $P(z)$ y $Q(z)$ son analíticas en $z = z_0$, entonces z_0 es un punto ordinario.
2. Si cualquiera $P(z)$ o $Q(z)$ diverge cuando $z \to z_0$, pero $(z-z_0)P(z)$ y $(z-z_0)^2Q(z)$ son finitas cuando $z \to z_0$, entonces z_0 es un punto singular regular.
3. Dada una función $f(z)$. Una singularidad $z = z_0$ es removible, si es posible asignar un número complejo de tal forma que $f(z)$ se convierta en una función analítica en z_0.

Teorema 1 (Fröbenius, [34, 49]). *Considere la ecuación* (4) *con* $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}(z)$. *Si* $z = z_0$ *es una singularidad regular o un punto no singular de* (4)*, entonces el espacio de soluciones de la ecuación* (4) *tiene la siguiente base de soluciones en una vecindad de* $z = z_0$,

$$y_1 = (z-z_0)^{r_1}\sum_{i=0}^{\infty} a_i(z-z_0)^i, \quad a_0 \neq 0 \quad y \tag{5}$$

$$y_2 = (z-z_0)^{r_2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i(z-z_0)^i + cy_1 log(z-z_0), \quad b_0 \neq 0 \tag{6}$$

donde $r_1, r_2, a_i, b_i, c \in \mathbb{C}$ *son tales que*

1. *Si* $r_1 = r_2$ *entonces* $c \neq 0$.
2. *Recíprocamente, si* $c \neq 0$*, entonces* $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$

Observación 1. En el teorema anterior podemos ver:

1. Si $c \neq 0$, entonces diremos que $z = z_0$ es una singularidad logarítmica.
2. Las singularidades logarítmicas son no removibles.
3. $z = z_0$ es una singularidad no removible si y solo si $c \neq 0$ o $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$.

Nota 3. Una base de soluciones de una ecuación diferencial, es una base del espacio de todas las soluciones de la ecuación diferencial.

3.3. Ecuación hipergeométrica

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden muy usual en problemas de valor en la frontera, es la llamada ecuación hipergeométrica

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0. \tag{7}$$

Esta ecuación posee tres singularidades en $z = 0, 1$ e ∞ de tipo regular. Cualquier ecuación diferencial de segundo orden con exactamente 3 singularidades todas de tipo regular puede ser transformada en la ecuación hipergeométrica mediante un cambio de variable adecuado

(Transformación de Möbius, ver [47]). Se puede obtener una solución alrededor del cero por medio del teorema de Fröbenius

$$A_2F_1(a, b; c; z) + Bx^{1-c}{}_2F_1(1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; z) \tag{8}$$

donde $1 - c$ no es cero o un entero negativo y A, B son constantes arbitrarias. En efecto, como

$$zP(z) = \frac{c - (a + b + 1)z}{1 - z}, \quad y \quad z^2Q(z) = \frac{-abz}{1 - z}$$

son ambas analíticas en $z = 0$, se concluye que $z = 0$ es un punto regular singular de 7. Por otra parte,

$$\lim_{z\to 0} zP(z) = \frac{c - (a + b + 1)z}{1 - z} = c, \quad y \quad \lim_{z\to 0} \quad z^2Q(z) = \frac{-abz}{1 - z} = 0$$

esto indica que la ecuación indicial es

$$r(r - 1 + c) = 0.$$

Por tanto los exponentes para $z = 0$ son $r = 0$ y $r = 1 - c$. Luego para $c \notin \mathbb{Z}_+$ tenemos dos soluciones linealmente independientes de la forma (Ver [49, pág. 195])

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad y \quad y_2 = z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Si se sustituye y_1, $\frac{dy_1}{dz}$ y $\frac{d^2y_1}{dz^2}$ en (7) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n + 1) + c(n + 1))a_{n+1} - (n(n - 1) + (a + b + 1)n + ab)a_n]z^n = 0.$$

Lo que nos lleva a la fórmula de recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{(n + a)(n + b)}{(n + 1)(n + c)} a_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

o escrita en términos de a_0

$$a_n = \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} a_0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Por tanto la solución puede ser escrita como

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_{0\,2}F_1(a, b, c, z).$$

Similarmente para

$$\begin{aligned} y_2 &= z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1-c}. \end{aligned}$$

Podemos sustituir y_2, $\frac{dy_2}{dz}$ y $\frac{d^2y_2}{dz^2}$ en (7) para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty}[((n+2-c)(n+1-c)+c(n+2-c))b_{n+1} \\ -((n+1-c)(n-c)+(a+b+1)(n+1-c)+ab)b_n]z^{n+1-c}=0$$

de donde obtenemos la siguiente fórmula de recurrencia para los coefficientes b_n

$$b_{n+1}=\frac{(n+a+1-c)(n+b+1-c)}{(n+1)(n+2-c)}b_n, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

o escrita en términos de b_0

$$b_n=\frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{n!(2-c)_n}b_0, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Por tanto la segunda solución de (7) puede ser escrita de la forma

$$y_2=z^{1-c}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0{}_2F_1(a+1-c,b+1-c,2-c,z).$$

4. Ecuación de Riemann

Esta sección está basada en las referencias [23, 31, 32, 35].

Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$y''+p(z)y'+q(z)y=0 \tag{9}$$

y suponga que posee exactamente 3 puntos singulares. Diremos que (9) es una ecuación de Riemann si todos sus puntos singulares son puntos singulares regulares.

Como (9) tiene 3 singularidades $z=a,b$ y c. Entonces $p(z)$ no puede tener singularidades en el plano excepto por los polos de orden uno en a,b y c, por tanto

$$p(z)=\frac{p_1(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)},$$

de igual forma $q(z)$ únicamente posee polos de orden dos en a,b y c, de donde

$$q(z) = \frac{q_1(z)}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2},$$

donde $p_1(z)$ y $q_1(z)$ son polinomios.

Por medio de fracciones parciales la ecuación

$$y'' + \frac{p_1(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)}y' + \frac{q_1(z)}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}y = 0$$

puede ser escrita en la forma

$$\begin{aligned} y'' + &\left[\frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{z-b} + \frac{A_3}{z-c}\right]y' \\ &+ \left[\frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{z-b} + \frac{B_3}{z-c}\right]\frac{y}{(z-a)(z-b)(z-c)} \end{aligned} \tag{10}$$

Denotemos por α, α' los exponentes de a, β, β' los de b y γ, γ' los de c. Como la ecuación indicial en a es

$$r^2 + (A_1 - 1)r + \frac{B_1}{(a-b)(a-c)},$$

tenemos que

$$\alpha + \alpha' = 1 - A_1 \quad y \quad \alpha\alpha' = \frac{B_1}{(a-b)(a-c)}.$$

Similarmente

$$\beta + \beta' = 1 - A_2 \quad y \quad \beta\beta' = \frac{B_2}{(b-a)(b-c)},$$

y

$$\gamma + \gamma' = 1 - A_3 \quad y \quad \gamma\gamma' = \frac{B_3}{(c-a)(c-b)}$$

Por tanto si escribimos la ecuación (10) en términos de sus exponentes, esta se convierte en la hoy bien conocida *Ecuación de Riemann.*

En 1857, la ecuación hipergeométrica fue generalizada por Riemann, permitiendo que los puntos singulares regulares pudiesen ocurrir en cualquier parte de la esfera de Riemann en vez de solamente en $0, 1$ e ∞, dando origen a la ecuación diferencial de Riemann.

$$\begin{aligned} y'' \quad &+ \quad \left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right]y' \\ &+ \quad \left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right] \\ &\times \quad \frac{y}{(z-a)(z-b)(z-c)} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

donde a, b y c son los puntos singulares regulares. Podemos ver el significado de $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ y γ' aproximando la ecuación en una vecindad de uno de sus puntos singulares. Para $z \approx a$, tenemos

$$y'' + \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}y' + \frac{\alpha\alpha'}{(z-a)^2}y \approx 0. \tag{12}$$

y de la ecuación indicial tenemos que

$$\begin{aligned} r(r-1) + (1-\alpha-\alpha')r + \alpha\alpha' &= 0 \\ r^2 - (\alpha+\alpha')r + \alpha\alpha' &= 0 \\ (r-\alpha)(r-\alpha') &= 0 \end{aligned}$$

Así α y α' son los exponentes locales de $z = a$. Similarmente β y β' son los exponentes locales de $z = b$ y γ, γ' los de $z = c$. Estos 6 exponentes satisfacen la relación de Fuchs. [35]

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

4.1. P-funciones

El conjunto de soluciones de (11) es denotado por el simbolo de Papperitz [23]

$$y(z) = P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} \tag{13}$$

y es llamada P-función de Riemann. En 1872 Schwartz [32] presentó un artículo en el *Journal für Mathematik* en el cual determinaba la clase de ecuación hipergeométrica que solo tenía soluciones algebraicas, este hecho llevó a determinar la clase de todas las ecuaciones de Riemann que tienen soluciones algebraicas. Por otro lado, en 1950 y 1956 M. Hakuhara y S. Ōhasi (ver [32]) obtienen una clase de ecuaciones de Riemann para la cual sus soluciones son todas expresables por el uso de funciones elementales y sus integrales. Lo peculiar es que aunque haya una gran similitud entre las 2 clases, no hay ninguna relación de contenencia entre ellas.

4.2. Propiedades de las P-funciones

1. Las primeras dos columnas pueden ser intercambiadas.
2. α puede ser intercambiada por α', β por β' y γ por γ'.
3. Si z es remplazada por una función racional z' , de modo que cuando

$$\begin{aligned} z = a, \quad z' = a' \\ z = b, \quad z' = b' \\ z = c, \quad z' = c' \end{aligned}$$

las dos funciones $P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$ y $P\begin{Bmatrix} a' & b' & c' & \\ \alpha & \beta & \gamma & z' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$ son iguales, esto es, toda P-función puede ser expresada en términos de otra cuyos puntos singulares sean $0, 1$ e ∞. De acuerdo a la transformación que se escoja en la variable, los puntos $0, 1$ e ∞, pueden aparecer de 6 formas distintas,

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}; P\begin{Bmatrix} \infty & 0 & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{1}{z} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

$$P\begin{Bmatrix} 1 & \infty & 0 & \\ \alpha & \beta & \gamma & 1-z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}; P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{z}{z-1} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

$$P\begin{Bmatrix} \infty & 1 & 0 & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{z-1}{z} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}; P\begin{Bmatrix} 1 & 0 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{1}{1-z} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$

4.

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 & \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)} \\ \alpha'-\alpha & \alpha+\beta'+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix}$$

4.3. Reducibilidad

Una solución no trivial de la ecuación de Riemann es degenerada si satisface una ecuación diferencial de la forma

$$y' + r(z)y = 0. \tag{14}$$

donde $r(z)$ es una función racional. Una ecuación de Riemann se dice reducible, si admite una solución degenerada, de otro modo, se dice que es irreducible.

Teorema 2. *Si una ecuación de Riemann es reducible, entonces es resoluble por cuadraturas.*

Teorema 3. *Si al menos una de las sumas $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha'+\beta+\gamma$, $\alpha+\beta'+\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma'$ es un entero, entonces la ecuación (11) es reducible.*

5. Tablas de ecuaciones hipergeométricas integrables

En esta sección, la cual está basada en la referencia [32], se presentarán algunos teoremas que relacionan la integrabilidad de la ecuación hipergeométrica con las diferencias de exponentes.

A efecto de facilitar cálculos, de aquí en adelante consideraremos las diferencias de los exponentes:

1. $\lambda = \alpha' - \alpha$,
2. $\mu = \beta' - \beta$,
3. $\nu = \gamma' - \gamma$.

5.1. La tabla de Schwarz

Teorema 4. *La ecuación (11) tiene soluciones solamente algebraicas si y solo si los exponentes de (11) son números racionales y se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Exactamente dos o cuatro de las sumas $\lambda+\mu+\nu$, $-\lambda+\mu+\nu$, $\lambda-\mu+\nu$, $\lambda+\mu-\nu$ son enteros impares y ninguna de las singularidades a, b y c es logarítmica, o*
2. *Los números λ o $-\lambda$, μ o $-\mu$ y ν o $-\nu$ toman valores (en cualquier orden) en la siguiente tabla*

1	1/2+l	1/2+m	Número racional arbitrario	
2	1/2+l	1/3+m	1/3+q	
3	2/3+l	1/3+m	1/3+q	l+m+q par
4	1/2+l	1/3+m	1/4+q	
5	2/3+l	1/4+m	1/4+q	l+m+q par
6	1/2+l	1/3+m	1/5+q	
7	2/5+l	1/3+m	1/3+q	l+m+q par
8	2/3+l	1/5+m	1/5+q	l+m+q par
9	1/2+l	2/5+m	1/5+q	l+m+q par
10	3/5+l	1/3+m	1/5+q	l+m+q par
11	2/5+l	2/5+m	2/5+q	l+m+q par
12	2/3+l	1/3+m	1/5+q	l+m+q par
13	4/5+l	1/5+m	1/5+q	l+m+q par
14	1/2+l	2/5+m	1/3+q	l+m+q par
15	3/5+l	2/5+m	1/3+q	l+m+q par

Donde l, m, q son enteros.

5.2. La tabla de Hukuhara-Ōhasi

Teorema 5. *La ecuación (11) puede ser transformada en una ecuación de Riemann reducible si y solo si*

1. *Por lo menos una de las sumas $\lambda+\mu+\nu$, $-\lambda+\mu+\nu$, $\lambda-\mu+\nu$, $\lambda+\mu-\nu$ es un entero impar, o*
2. *Los números λ o $-\lambda$, μ o $-\mu$ y ν o $-\nu$ toman valores (en cualquier orden) en la siguiente tabla*

1	1/2+l	1/2+m	Número complejo arbitrario	
2	1/2+l	1/3+m	1/3+q	
3	2/3+l	1/3+m	1/3+q	l+m+q par
4	1/2+l	1/3+m	1/4+q	
5	2/3+l	1/4+m	1/4+q	l+m+q par

Donde l, m, q son enteros

.

5.3. La tabla de Kimura

Teorema 6. *Sea M la extensión de Picard-Vessiot de K para la ecuación de Riemann (11). M es una extensión liouvilliana si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Por lo menos una de las sumas $\lambda+\mu+\nu$, $-\lambda+\mu+\nu$, $\lambda-\mu+\nu$, $\lambda+\mu-\nu$ es un entero impar, o*
2. *Los números λ o $-\lambda$, μ o $-\mu$ y ν o $-\nu$ toman valores (en cualquier orden) en la siguiente tabla*

1	1/2+l	1/2+m	Número complejo arbitrario	
2	1/2+l	1/3+m	1/3+q	
3	2/3+l	1/3+m	1/3+q	l+m+q par
4	1/2+l	1/3+m	1/4+q	
5	2/3+l	1/4+m	1/4+q	l+m+q par
6	1/2+l	1/3+m	1/5+q	
7	2/5+l	1/3+m	1/3+q	l+m+q par
8	2/3+l	1/5+m	1/5+q	l+m+q par
9	1/2+l	2/5+m	1/5+q	l+m+q par
10	3/5+l	1/3+m	1/5+q	l+m+q par
11	2/5+l	2/5+m	2/5+q	l+m+q par
12	2/3+l	1/3+m	1/5+q	l+m+q par
13	4/5+l	1/5+m	1/5+q	l+m+q par
14	1/2+l	2/5+m	1/3+q	l+m+q par
15	3/5+l	2/5+m	1/3+q	l+m+q par

Donde l, m, q son enteros.

Nota 4. Equivalentemente, se puede decir que la componente identidad del grupo de Galois de la ecuación (11) es resoluble si y solo si se cumple alguna de las condiciones establecidas en el teorema anterior.

6. Ejemplos

En esta sección consideramos varios ejemplos para ilustrar a los lectores.

6.1. La ecuación de Chebyshev

La ecuación de Chebyshev es una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - z\frac{dy}{dz} + p^2 y = 0 \tag{15}$$

donde p es un número real. Esta ecuación presenta tres singularidades de tipo regular en $1, -1$ y ∞. Reescribiendo (15) tenemos

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{z}{(1-z^2)}\frac{dy}{dz} + \frac{p^2}{(1-z^2)}y = 0.$$

Ahora como

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{-z}{1-z^2}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{1+z}=\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2\left(\frac{p^2}{1-z^2}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{p^2(1-z)}{1+z}=0$$

$z=1$, es un punto singular regular, similarmente $z=-1$, es un punto singular regular Para el punto $z=\infty$, transformemos la ecuación (15) por medio del cambio de variable $x=\frac{1}{z}$ y analicemos si el punto $x=0$, es un punto singular regular para la nueva ecuación. En efecto, (15) se transforma en

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x(x^2-1)}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{p^2}{x^2(x^2-1)}y=0. \tag{16}$$

Como

$$\lim_{x\to 0}x\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x(x^2-1)}\right)=\lim_{x\to 0}2+\frac{1}{x^2-1}=1$$

y

$$\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{p^2}{x^2(x^2-1)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{p^2}{x^2-1}=1$$

se sigue que $x=0$, es un punto singular regular para (16). Por tanto, $z=\infty$ es un punto singular regular para (15).

Ahora transformemos la ecuación de Chebyshev en una ecuación hipergeométrica y calculemos sus exponentes. Sea $t=\frac{1-z}{2}$, este cambio de variable mueve las singularidades de (15) de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & \infty \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & \infty \end{array}$$

Por otro lado,

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dz}=-\frac{1}{2}\frac{dy}{dt}, \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dt}{dz}=\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Entonces, (15) se transforma en

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{dy}{dt}+p^2y=t(1-t)y''+\left(\frac{1}{2}-t\right)y'-p(-p)y. \tag{17}$$

si $p\in\mathbb{Z}_+$, los parámetros a,b y c de la ecuación hipergeométrica son $p,-p,\frac{1}{2}$ respectivamente. Por lo tanto una solución alrededor de $z=1$ para la ecuación de chebyshev es

$$T_p={}_2F_1\left(p,-p;\frac{1}{2},\frac{1-z}{2}\right). \tag{18}$$

Los polinomios T_p son llamados polinomios de Chebyshev de primer tipo.

Calculo de Exponentes

Aplicando fracciones parciales tenemos lo siguiente

$$t(1-t)y'' + \left(\frac{1}{2} - t\right) y' - p(-p)y = y'' + \left(\frac{1/2}{t} + \frac{1/2}{t-1}\right) y' - \frac{p(-p)}{t(t-1)} y.$$

Calculemos los exponentes en una vecindad de la singularidad $t = 0$. De la ecuación indicial tenemos

$$r(r-1) + \frac{1}{2}r = 0$$
$$r(r - \frac{1}{2}) = 0$$

por lo tanto, los exponentes locales para $t = 0$ son $r = 0$ y $r = \frac{1}{2}$. Similarmente, los exponentes locales para $t = 1$ son $r = 0$ y $r = \frac{1}{2}$. Para el caso $t = \infty$, usamos el cambio de variable $t = \frac{1}{u}$ y analizamos el punto $u = 0$, así la ecuación (17) se transforma en

$$y'' + \left[\frac{2}{u} - \frac{1/2}{u} - \frac{1/2}{u(u-1)}\right] y' + \frac{1}{u^2} \frac{p(-p)}{(u-1)} y = 0.$$

Luego la ecuación indicial nos indica que

$$r(r-1) + \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) r - p^2 = 0$$
$$r^2 - p^2 = 0.$$

Por tanto, los exponentes locales para $t = \infty$ son $r = \pm p$ y la P-función asociada a la ecuación de Chebyshev es

$$P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & p & \frac{1-t}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -p & \end{Bmatrix}.$$

Consideremos ahora las diferencias de los exponentes

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{2} \\ \mu &= -\frac{1}{2} \\ \nu &= 2p \end{aligned}$$

y las siguientes sumas de las diferencias

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + \nu &= 2p - 1 \\ -\lambda + \mu + \nu &= 2p \\ \lambda - \mu + \nu &= 2p \\ \lambda + \mu - \nu &= -1 - 2p \end{aligned}$$

Notemos que $\lambda + \mu + \nu = 2p - 1$ es un entero impar, ademas $-\lambda = \frac{1}{2}$, $-\mu = \frac{1}{2}$ y $\nu = 2p$ toman valores en la tabla de Kimura para $l = 0$, $m = 0$. Por tanto, la extensión de Picard-Vessiot de $\mathbb{C}(x)$ para la ecuación de Riemann (15) es liouvilliana.

6.2. Ecuación Hipergeométrica con un parámetro libre

Inspirados en [7, §A], consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\xi}{dz^2}+\left(\frac{3/2}{z}+\frac{1/2}{z-1}\right)\frac{d\xi}{dz}+\frac{\kappa}{2}\left(\frac{1}{z(z-1)}-\frac{1}{(z-1)^2}\right)\xi=0. \tag{19}$$

Podemos hacer la siguiente elección de constantes:

$$\alpha'=\beta=0,\quad \alpha=-\frac{1}{2},\quad \beta'=1,$$
$$\gamma=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+8\kappa}\,\right),\qquad \gamma'=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1+8\kappa}\,\right)$$

Así, la ecuación (19), se convierte en la ecuación hipergeométrica:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2}+\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-1}\right)\frac{d\xi_j}{dz}$$
$$+\left(\frac{\alpha\alpha'}{z^2}+\frac{\gamma\gamma'}{(z-1)^2}+\frac{\beta\beta'-\alpha\alpha'-\gamma\gamma'}{z(z-1)}\right)\xi_j=0. \tag{20}$$

Para verificar el teorema de Kimura, se tienen las siguientes diferencias de exponentes:

$$\hat{\lambda}=\alpha-\alpha'=-1/2,\qquad \hat{\mu}=\beta-\beta'=-1,\qquad \hat{\nu}=\gamma-\gamma'=\frac{1}{2}\sqrt{1+8\kappa}\,.$$

Para verificar la condición (i) del teorema de Kimura, se calculan las combinaciones

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}+\hat{\mu}+\hat{\nu} &= \frac{1}{2}(-3+\sqrt{1+8\kappa})\\ -\hat{\lambda}+\hat{\mu}+\hat{\nu} &= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{1+8\kappa})\\ \hat{\lambda}-\hat{\mu}+\hat{\nu} &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+8\kappa})\\ \hat{\lambda}+\hat{\mu}-\hat{\nu} &= -\frac{1}{2}(3+8\sqrt{1+8\kappa})\end{aligned}$$

Para que cualquiera de las cantidades anteriores sea un entero impar, entonces κ debe ser de la forma

$$\kappa=(n+1)(2n+3),\ (n+1)(2n+1),\ n(2n+1),\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{21}$$

Para verificar la condición (ii), observemos que la única posibilidad es que el valor $\hat{\mu}$ ubicado en la columna *número complejo arbitrario* y que el valor $\hat{\lambda}$ de la forma $1/2+m$, siendo $m=-1$ un entero, hagan que κ deba satisfacer la condición $\sqrt{1+8\kappa}=1/2+\ell$, o

$$\kappa=\frac{1}{2}\ell(\ell+1). \tag{22}$$

Pero las condiciones (21) están contenidas en la condición (22): para ver esto, basta tomar $\ell=2(n+1),2n+1,2n$, respectivamente, para recuperar las condiciones (21). Mayores detalles sobre este ejemplo pueden verse en [7].

Un caso de una ecuación de Riemann no integrable, puede verse en [3, Ej. 2.7, Pág 43].

Referencias

[1] P. B. Acosta-Humánez, *Galoisian approach to supersymmetric Quantum Mechanics*, Barcelona (Ph.D. Thesis), Universitat Politècnica de Catalunya, (2009).

[2] P. B. Acosta-Humánez, *Galoisian approach to supersymmetric Quantum Mechanics: The integrability analysis of the Schrödinger Equation by means of Differential Galois Theory*, VDM Verlag, Berlín, (2010).

[3] P. B. Acosta-Humánez, *La teoría de Morales-Ramis y el algoritmo de Kovacic*, Lecturas Matemáticas, **27**(NE) (2006), 21–56.

[4] P. B. Acosta-Humánez, *Métodos algebraicos en sistemas dinámicos*. Ediciones Uniatlántico, Barranquilla, (2014).

[5] P. B. Acosta-Humánez, *Nonautonomous Hamiltonian systems and Morales-Ramis Theory I. The Case $\ddot{x} = f(x, t)$*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **8** (2009), 279–297.

[6] P. B. Acosta-Humánez, M. Álvarez-Ramírez, D. Blázquez-Sanz & J. Delgado, *Non-integrability criterium for normal variational equations around an integrable subsystem and an example: The Wilberforce spring-pendulum*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A), **33** (2013), 965–986.

[7] P. Acosta-Humánez, M. Álvarez-Ramírez & J. Delgado, *Non-Integrability of some few body problems in two degrees of freedom*, Qual. Theory Dyn. Syst. **8(2)** (2009), 209–239.

[8] P. Acosta-Humánez & D. Blázquez-Sanz, *Hamiltonian system and variational equations with polynomial coefficients*, Dynamic systems and Applications, **5** (2008) 6–10.

[9] P. Acosta-Humánez & D. Blázquez-Sanz, *Non-integrability of some Hamiltonians with rational potentials*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, **10** (2008), 265–293.

[10] P. B. Acosta-Humánez, D. Blázquez-Sanz & C. Vargas-Contreras, *On Hamiltonian potentials with quartic polynomial normal variational equations*, Nonlinear Studies. The International Journal, **16** (2009), 299–313.

[11] P. Acosta-Humánez, H. Giraldo, C. Piedrahita, *Differential Galois groups and representation of quivers for seismic models with constant hessian of square of slowness*, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), **102**(3) (2017), 599–623.

[12] P.B. Acosta-Humánez, S.I. Kryuchkov, A. Mahalov, E. Suazo & S.K. Suslov, *Degenerate parametric amplification of squeezed photons: explicit solutions, statistics, means and variances*, Preprint: arXiv:1311.2479 [quant-ph], (2013).

[13] P. B. Acosta-Humánez, J.T. Lázaro, J. Morales-Ruiz & Ch. Pantazi, *On the integrability of polynomial vector fields in the plane by means of Picard-Vessiot theory*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A), **35** (2015), 1767–1800.

[14] P. B. Acosta-Humánez, J.J Morales-Ruiz & J.-A. Weil, *Galoisian approach to integrability of Schrödinger equation*, Report on Mathematical Physics, **67** (2011), 305–374.

[15] P. B. Acosta-Humánez & Ch. Pantazi, *Darboux integrals for Schrödinger planar vector fields via Darboux transformations*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), **8** (2012), 043.

[16] P. Acosta-Humánez & J. H. Pérez, *Teoría de Galois diferencial: una aproximación*, Mat. Ensen. Univ. (N. S.), **15** (2007), 91–102.

[17] P. Acosta-Humánez & J. H. Pérez, *Una introducción a la teoría de Galois diferencial*, Bol. Mat. (N.S.), **11** (2004), 138–149.

[18] P. B. Acosta-Humánez & E. Suazo, *Liouvillian propagators and degenerate parametric amplification with time-dependent pump amplitude and phase*, Analysis, Modelling, Optimization, and Numerical Techniques, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **121** (2015).

[19] P. B. Acosta-Humánez & E. Suazo, *Liouvillian propagators, Riccati equation and differential Galois theory*, J. Phys. A: Math. Theor., **46** (2013), 455203.

[20] A. Arda, *Relativistic approximate solutions for a two-term potential: Riemann-type equation*, Journal of Physics: Conference Series, **766**(1) (2016), 012002.

[21] L. Bieberbach, *Theorie der Differentialgleichungen: Vorlesungen aus dem Gesamtgebiet der Gewöhnlichen und der Partiellen Differentialgleichungen*, Springer-Verlag OHG, Berlín, (1953).

[22] A. Borel, *Linear algebraic groups*, Springer, New York, (1991).

[23] C. Chapman, *Riemann's P-functions*, Baltimore (Ph.D. Thesis), Jhons Hopkins university, (1890).

[24] J. A. Charris, B. Aldana & P. B. Acosta-Humánez, *Algebra. Fundamentos, grupos, anillos, cuerpos y teoría de galois*, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, (2013).

[25] T. Combot & T. Waters, *Integrability conditions of geodesic flow on homogeneous Monge manifolds*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **35**(1) (2015), 111–127.

[26] V. Dragović, R. Gontsov & V. Shramchenko, *Triangular Schlesinger systems and superelliptic curves*, Preprint: arXiv:1812.09795 [math-ph], (2018).

[27] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, & F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions, Vol. I*, McGraw-Hill, Inc., New York, (1953).

[28] A. A. Elmandouh , *On the integrability of 2D Hamiltonian systems with variable Gaussian curvature*, Nonlinear Dynamics, **93**(2) (2018), 933–943.

[29] M. Eshghi & H. Mehraban , *Effective of the q-deformed pseudoscalar magnetic field on the charge carriers in graphene*, Journal of Mathematical Physics, **57** (2016), 082105.

[30] I. Kaplansky, *An introduction to differential algebra*, Hermann, Paris, (1957).

[31] T. Kimura, *On Fuchsian differential equations reducible to hypergeometric equations by linear transformations*, funkcialaj ekvacioj, **13** (1970), 213–232.

[32] T. Kimura, *On Riemann's equations which are solvable by quadratures*, funkcialaj ekvacioj, **12** (1969), 269–281.

[33] E. E. Kummer, *Über die Hypergeometrische Reihe*, J. reine angew. Math. **15** (1836), 39-83 & 127-172.

[34] V. Kunwar Jung, *Hypergeometric solutions of linear differentia equations with rational function coefficients*, Tallahassee (Ph.D. Thesis), Florida State University, (2014).

[35] L. Hall, *Special functions*. Recuperado de `http://web.mst.edu/~lmhall/SPFNS/spfns.pdf`, (1995).

[36] A. J. Maciejewski & M. Przybylska, *Dynamics of constrained many body problems in constant curvature two-dimensional manifolds*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematica, Physical and Engineering Sciences, **376**(2131) (2018), 20170425.

[37] A. J. Maciejewski & M. Przybylska, *Integrability of Hamiltonian systems with algebraic potentials*, Physics Letters A, **380(1–2)** (2017), 76–82.

[38] A. J. Maciejewski, M. Przybylska & W. Szumiński, *Anisotropic Kepler and anisotropic two fixed centres problems*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **127**(2) (2017), 163–184.

[39] A. J. Maciejewski, W. Szumiński & M. Przybylska, *Note on integrability of certain homogeneous Hamiltonian systems in 2D constant curvature spaces*, Physics Letters A, **381**(7) (2017), 725–732.

[40] R. S. Maier, *Algebraic generating functions for Gegenbauer polynomials*, en Frontiers in Orthogonal Polynomials and q-Series, M. Z. Nashed & X. Li (Ed.), World Scientific, Singapore (2018), 425–444.

[41] R. S. Maier, *Legendre functions of fractional degree: transformations and evaluations*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematica, Physical and Engineering Sciences, **472(2188)** (2016), 20160097.

[42] J. J. Morales-Ruiz, *Integrable systems and difierential Galois Theory*, en Geometry and Dynamics of Integrable Systems, E. Miranda & V. Matveev (Ed.), Birkhäuser, Barcelona (2016), 1–33.

[43] J. Morales-Ruiz, *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Birkhäuser Verlag, Switzerland, (1999).

[44] M. Orieux, *Some properties and applications of minimum time control*, Paris (PhD. Thesis), Université Paris Dauphine, (2018).

[45] M.Orieuxa, J.-B.Caillaub, T.Combot & J.Féjozad, *Non-integrability of the minimum-time Kepler problem*, Journal of Geometry and Physics, **132**(2018), 452–459.

[46] M. Van der Put & M. Singer, *Galois Theory in Linear Differential Equations*, Springer Verlag, New York, (2003).

[47] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, (1987).

[48] M. Shibayama, *Non-integrability of the spacial n-center problem*, Journal of Differential Equations, **265**(6) (2018), 2461–2469

[49] G. Simmons, *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-hill, Inc., U.S.A., (1991).

[50] M.F. Singer, *An outline of differential Galois Theory*, en Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier (Ed.), Academic Press, New York (1989), 3–57.

[51] W. Szumiński, A. J. Maciejewski & M. Przybylska, *Note on integrability of certain homogeneous Hamiltonian systems*, Physics Letters A, **379**(45–46) (2015), 2970–2976.

[52] H. Venegas, *Integrability of Schrödinger equation with polynomial potentials*, Barranquilla (B.S. Thesis), Universidad del Atlántico, (2015).

Recibido en agosto de 2018. Aceptado para publicación en febrero de 2019.

PRIMITIVO ACOSTA-HUMÁNEZ
INSTITUTO SUPERIOR DE FORMACIÓN DOCENTE SALOMÉ UREÑA - ISFODOSU
RECINTO EMILIO PRUD'HOMME
SANTIAGO DE LOS CABALLEROS, REPÚBLICA DOMINICANA
e-mail: primitivo.acosta-humanez@isfodosu.edu.do

HENOCK VENEGAS-GÓMEZ
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
MEDELLÍN, COLOMBIA
e-mail: hvenegasg@unal.edu.co