Lecturas Matemáticas
Volumen **40** (1) (2019), páginas 5-50
ISSN 0120-1980

Una introducción al “análisis real” en cuerpos ordenados y en cuerpos p-ádicos

An introduction to “Real Analysis” in ordered fields and p-adic fields

Josefina Alvarez

New Mexico State University, EEUU

Resumen. El conjunto de los números reales lo tiene todo: operaciones algebraicas, un orden natural, una topología asociada a ese orden, completitud expresada en varias formas, etc, etc. Es en esta riqueza de estructuras compatibles en la que se basa el análisis real, permitiendo el desarrollo de muchos resultados, entre ellos, el teorema del valor medio, el teorema del valor intermedio, la conectividad de todo intervalo, etc., etc. El objectivo de este artículo es el estudiar la validez de algunas de estas propiedades, y otras, en cuerpos ordenados y en cuerpos p-ádicos.

***Palabras clave*:** Cuerpos ordenados, cuerpos relacionados con sumas de cuadrados, cuerpos valuados no arquimedianos, teoría p-ádica, análisis no arquimediano.

Abstract. The set of real numbers has it all: algebraic operations, a natural order, a topology associated to that order, a completeness property that can be expressed in various ways, etc. Real Analysis is based on this richness of compatible structures, which affords the existence of many results, such as the mean value theorem, the connectedness of all intervals, etc. The aim of this article is to study the validity of some of these properties, and others, on ordered and p-adic fields.

***Key words*:** Ordered fields, non-archimedean-valued fields, p-adic theory, non-archimedean analysis.

2010 AMS Mathematics Subject Classification. 12J15, 12D15, 12J25, 11E95, 26E30

1. Introducción

Muchos libros clásicos de introducción al Análisis Real, presentan al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales en forma axiomática. Esto es, como un cuerpo ordenado, y completo en el sentido que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente, tiene supremo (ver, por ejemplo, [10], pág. 15; [12], pág. 15; [14], pág. 21; [16], pág. 7; [24], págs. 1 y 44; [28], pág. 29). Además, suponen que es posible construir modelos de tal estructura y que su axiomática es categórica, o sea, que dados dos cuerpos ordenados y completos, hay una biyección, que es un isomorfismo con respecto a las operaciones y al orden definidos en cada uno de ellos [39]. Esto último ya había sido observado por Richard Dedekind ([3], pág. 33).

Una de las excepciones al enfoque puramente axiomático de los números reales, es el libro de Rudin (ver [29], págs. 3 y 17), que construye $\mathbb{R}$ usando las cortaduras de Dedekind (ver también [38], pág. 4). En esta construcción, que Rudin llama larga y tediosa, los axiomas se tornan en proposiciones que hay que demostrar. Lo mismo ocurre con cada uno de los varios métodos de construcción que existen [39]. Por ejemplo, *Mathematical Reviews*, refiriéndose a un artículo que construye $\mathbb{R}$ usando fracciones continuas, dice "The details are all included, but as usual they are tedious and not too instructive" [39]. Sea como sea, hay un número de presentaciones, muy buenas, de la construcción de $\mathbb{R}$ (por ejemplo, [7], [18] y [19]). Algunas de ellas (por ejemplo [19]), prueban la unicidad módulo isomorfismos.

Aunque Dedekind definió la noción de cortadura de la recta real en 1858, sus resultados no fueron publicados hasta 1872 [9]. En ese año, Cantor publicó en *Math. Ann.*, volumen V, págs. 123-130, su construcción de los números reales como clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy (ver, por ejemplo, [15], sección 5; [35]; [34], capítulo 2).

La presentación axiomática de $\mathbb{R}$ como un cuerpo ordenado y completo, es suficiente para desarrollar el Análisis Real. A pesar de ello, hay instancias en las que este enfoque puede no ser satisfactorio. En las palabras de Bertrand Russell [30], "The method of postulating what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil." Es decir, todo está bien en tanto que el ladrón no sea pescado. En términos matemáticos, si consideramos, por ejemplo, la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, veremos que, en realidad, lo único que prueba es que $\sqrt{2}$ no puede ser racional, sin ninguna referencia a los números irracionales o a por qué tiene que existir un número cuyo cuadrado es dos. Ahora bien, si creemos que todo desarrollo matemático se inicia con algo intuitivo, es fácil aceptar que, hablando de sistemas de numeración, ese algo puede ser los números enteros o los números racionales. Tenemos una idea clara de ellos y podemos aceptarlos como algo básico. Sin embargo, ¿por qué tiene que haber números que no son racionales? Esto ya no parece ser intuitivo. En efecto, aunque no hay dificultad en imaginar un cuadrado de lado uno y su diagonal, costó mucho esfuerzo y mucho tiempo, el entender la longitud de esa diagonal como un número. Esto pone de manifiesto una dicotomía entre números y figuras, mostrando por qué muchos filósofos y matemáticos griegos del período clásico, asignaron a las figuras geométricas una gran importancia en sus investigaciones. Las páginas [32] y [33], tienen una discusión interesante sobre la importancia de construir el sistema de los números reales y sobre cómo pueden visualizarse los números irracionales.

A pesar de lo que acabamos de decir, para los propósitos, que en breve expondremos, de nuestro artículo, el enfoque axiomático bastará. Así, $\mathbb{R}$ será un cuerpo ordenado y completo, donde, repetimos, completo querrá decir que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente, tiene supremo. Esta es la completitud que, siguiendo algunos autores (ver, por ejemplo, [23], pág. 392), llamaremos de Dedekind. Otros autores (ver, por ejemplo, [11], pág. 262), reservan este nombre para la completitud en el sentido de las cortaduras. Es decir, que toda cortadura de $\mathbb{R}$ tiene un punto de corte en $\mathbb{R}$. Con la noción de distancia asociada al valor absoluto usual, $\mathbb{R}$ es también completo en el sentido de Cauchy, o sea, toda sucesión que es de Cauchy, converge. Otra formulación de esta completitud de Cauchy es el decir que si una serie converge absolutamente, es convergente. Este último enunciado es uno de los muchos criterios de convergencia de series conocidos. Otros resultados fundamentales en el desarrollo del Análisis Real, son el principio de Arquímedes, el teorema del valor intermedio, el teorema de Rolle, el teorema del valor medio, la conectividad de todo intervalo, la propiedad de los intervalos encajados, etc, etc. Desde el punto de vista lógico, todos estos enunciados y muchos otros, son equivalentes en el cuerpo real, porque dadas dos proposiciones verdaderas P y Q, las implicaciones $P \to Q$ y $Q \to P$ también tienen que ser ciertas. En otras palabras, aunque algunos enunciados parecen tener un “sabor” más analítico y otros más algebraico, todos ellos pueden considerarse como formulaciones equivalentes de la completitud de $\mathbb{R}$. Así, nos referiremos a ellos como “modos de completitud”. En términos imprecisos, lo que dicen, de una manera u otra, es que, en $\mathbb{R}$, “no hay agujeros”; en términos elementales, si pensamos en el modelo de la recta, podemos establecer una biyección entre los números reales y todos los puntos de la recta. ¿Qué pasaría si cambiamos la situación? Digamos que fijamos un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ y consideramos proposiciones que son ciertas en $\mathbb{R}$ y cuyos enunciados tienen sentido en $\mathbf{K}$. ¿Qué podemos decir sobre estas proposiciones, cuando las formulamos en $\mathbf{K}$? Observemos que en lugar de suponer que $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind, o en cualquier otro sentido, vemos la completitud como una proposición más. La idea es que al considerar, fuera de $\mathbb{R}$, enunciados que son equivalentes en $\mathbb{R}$, es posible que entendamos mejor cómo están, o no, relacionados. James Propp llama a esta forma de pensar “*Analysis in reverse*” [23] y observa su semejanza con la larga y fructífera búsqueda de axiomas, en geometría euclidiana, equivalentes al axioma de las paralelas o quinto postulado de Euclides. De esta búsqueda hemos aprendido que “anything that isn't Euclidean geometry is very different from Euclidean geometry” ([23], pág. 393). Propp continúa diciendo que “in a similar way, anything that isn't the real number system, must be different from the real number system in many ways. Speaking metaphorically, in the landscape of mathematical theories, Real Analysis is an isolated point; or, switching metaphors, we might say that the real number system is rigid in the sense that it cannot be subjected to slight deformations.”

Después de esta explicación introductoria, podemos decir que nuestro artículo tiene dos propósitos. Uno es el presentar varios ejemplos de este Análisis en reverso, incluyendo el material preliminario que sea necesario. El otro propósito es el estudiar las propiedades básicas del cuerpo racional $\mathbb{Q}$, dotado de un valor absoluto p-ádico. A medida que desarrollemos estos dos aspectos en paralelo, podremos ver conceptos similares en contextos muy diferentes, lo cual nos permitirá aquilatarlos mejor. Por cierto, los temas que aquí estudiaremos, están esparcidos a lo largo y a lo ancho de muchas referencias, que llegan a incluir más de cuarenta posibles enunciados del principio de Arquímedes y más de setenta posibles versiones de la completitud (ver, por ejemplo, [11]), y que prueban algunas de las relaciones entre algunas de las propiedades. Las definiciones y los enfoques pueden variar de una referencia a otra, dependiendo de los objetivos, unos más algebraicos, otros más analíticos. Para aquéllos versados en el idioma alemán, la referencia [26] incluye cerca de cuarenta enunciados. Los comentarios en otras referencias (ver, por ejemplo, [11] y [36]), indican que los enunciados en [26] están agrupados en varias categorías y que el autor prueba, en forma completa y detallada, la equivalencia dentro de cada categoría y la equivalencia entre categorías diferentes. Nuestra intención, que está muy lejos de producir una exposición enciclopédica, es mantenernos lo más cerca posible del Análisis, sin ir más allá del principio de buena ordenación, o equivalentemente, del principio de inducción. Motivaremos las definiciones y propiedades en forma rigurosa, dando abundantes ejemplos. Frecuentemente mencionaremos referencias que van más allá de nuestra exposición.

2. El concepto de orden en un cuerpo

En lo que sigue, supondremos conocidos los axiomas de cuerpo, que aparecen en las referencias mencionadas en la introducción. Aunque las unidades aditiva y multiplicativa, en general, no tienen por qué ser números en el sentido usual, para evitar complicaciones de notación, las indicaremos 0 y 1, respectivamente. Recordemos que se suponen distintas. Con $-x$ indicaremos la inversa aditiva de x, mientras que $\pm x$ y $\mp x$ indicarán x o $-x$. La notación $y - x$ es una forma abreviada de escribir $y + (-x)$. Con $x \pm y$ indicaremos $x + y$ o $x - y$. Si $x \neq 0$, $\frac{1}{x}$ o $1/x$ indicará la inversa multiplicativa de x. Finalmente, denotamos,

$$nx = \underbrace{x + \cdots + x}_{\text{n veces}} = (1 + \cdots + 1)\, x, \tag{1}$$

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{\text{n veces}}. \tag{2}$$

En el lema que sigue, reunimos propiedades que son consecuencia de los axiomas de adición y de multiplicación.

Lema 1. *([29], págs. 6 y 7) Dado un cuerpo* $\mathbf{K}$ *y dados* $x, y, z \in \mathbf{K}$,

1. *(Propiedad de cancelación) Si* $x + y = x + z$*, entonces* $y = z$.
2. *(Unicidad de la unidad aditiva) Si* $x + y = x$*, entonces* $y = 0$.
3. *(Unicidad de la inversa aditiva) Si* $x + y = 0$*, entonces* $y = -x$.
4. $-(-x) = x$.
5. *(Propiedad de cancelación) Si* $x \neq 0$ *y* $xy = xz$*, entonces* $y = z$.
6. *(Unicidad de la unidad multiplicativa) Si* $x \neq 0$ *y* $xy = x$*, entonces* $y = 1$.

7. *(Unicidad de la inversa multiplicativa) Si $x \neq 0$ y $xy = 1$, entonces $y = \frac{1}{x}$.*
8. *Si $x \neq 0$, entonces $1/\left(\frac{1}{x}\right) = x$.*
9. *$0x = 0$.*
10. *Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, entonces $xy \neq 0$.*
11. *$(-x)\, y = -(xy) = x\,(-y)$.*
12. *$(-x)\,(-y) = xy$.*

La demostración de este lema, que omitimos, puede verse en la referencia citada.

Definición 1. Un cuerpo $\mathbf{K}$ se dice ordenable si tiene un subconjunto no vacío $\mathbf{K}_+$ con las siguientes propiedades:

1. $0 \notin \mathbf{K}_+$.
2. $\mathbf{K}_+$ es cerrado con respecto a la adición y a la multiplicación. Es decir, si $x, y \in \mathbf{K}_+$, entonces $x + y$ y xy pertenecen a $\mathbf{K}_+$.
3. Si $x \in \mathbf{K}$, entonces una y sólo una de las siguientes opciones es cierta: $x \in \mathbf{K}_+$, $x = 0$, $-x \in \mathbf{K}_+$.

Si $\mathbf{K}$ es un cuerpo ordenable, un elemento $x \in \mathbf{K}$, $x \neq 0$, se llama positivo si $x \in \mathbf{K}_+$ y se llama negativo si $-x \in \mathbf{K}_+$.

Proposición 1. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\mathbf{K}$ es ordenable.
2. Es posible definir en $\mathbf{K}$ una relación, que indicaremos $<$, con las siguientes propiedades:
   a) Si $x < y$ entonces $x + z < y + z$ para todo $z \in \mathbf{K}$.
   b) Si $x < y$ y $0 < z$, entonces $xz < yz$.
   c) (Transitividad) Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.
   d) (Totalidad) Si $x, y \in \mathbf{K}$, una y sólo una de las siguientes opciones es cierta: $x < y$, $x = y$, $y < x$.

Demostración. Suponiendo que $\mathbf{K}$ es ordenable, definimos la relación $x < y$ si $y - x \in \mathbf{K}_+$. Veamos que esta relación verifica las cuatro condiciones en 2).

En primer lugar, de las propiedades de cuerpo, deducimos que $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbf{K}_+$. De la misma manera, $yz - xz = (y - x)\, z \in \mathbf{K}_+$. En cuanto a la transitividad, $z - x = z - y + y - x \in \mathbf{K}_+$. Finalmente, si $x, y \in \mathbf{K}_+$ y $x \neq y$, es decir $y - x \neq 0$, debe ser $y - x \in \mathbf{K}_+$ o $-(y - x) \in \mathbf{K}_+$. Como $(y - x) - y + x = 0$, debe ser $-(y - x) = -y + x$. O sea $x < y$ o $y < x$.

Recíprocamente, si hay definida en $\mathbf{K}$ una relación $<$ con las propiedades indicadas, consideramos el subconjunto $\mathbf{K}_+$ de $\mathbf{K}$ definido como

$$\mathbf{K}_+ = \{x \in \mathbf{K} : 0 < x\}\,.$$

Veamos que este subconjunto cumple las propiedades enumeradas en la definición 1. Por definición, $0 \notin \mathbf{K}_+$. Si $x, y \in \mathbf{K}_+$, entonces $0 < y < x + y$. Por la transitividad, deducimos que $0 < x + y$. En cuanto a la multiplicación, si $0 < x$ y $0 < y$, concluimos que $0 < xy$. Dado $x \in \mathbf{K}$, $x \neq 0$, por la totalidad del orden $<$, debe ser $0 < x$ o $0 < -x$. Es decir, x o $-x$ tienen que pertenecer a $\mathbf{K}_+$.

Esto completa la demostración de la proposición. □

Un orden total estricto en el cuerpo $\mathbf{K}$ es una relación que satisface las propiedades enumeradas en 2). Diremos entonces que $\mathbf{K}$ es un cuerpo ordenado. Observemos que un orden estricto es irreflexivo, es decir, ningún elemento del cuerpo es comparable con sí mismo, y asimétrico, queriendo decir que si $x < y$, entonces no puede ser cierto que $y < x$. En cambio, la relación $\leq$ definida como $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$, da un orden no estricto total, que es reflexivo, $x \leq x$ para todo $x \in \mathbf{K}$ y antisimétrico, $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$.

Un punto importante a observar es que, por definición, el orden, estricto o no, en un cuerpo, es total. Es decir, los elementos del cuerpo son siempre comparables. Por eso hablamos de cuerpos ordenados y no totalmente ordenados.

En general, en un cuerpo ordenable, quizá pueda definirse más de un orden.

A partir de ahora usaremos indistintamente $<$ o $\leq$ para indicar un orden total en un cuerpo. También usaremos la notación $x > y$ y $x \geq y$ cuando $y < x$ e $y \leq x$, respectivamente.

En el siguiente lema incluímos varias propiedades, que relacionan el orden con las operaciones en un cuerpo ordenado.

Lema 2. *([29], pág. 8; [14], pág. 22) Dado un cuerpo ordenado* $\mathbf{K}$ *y dados* $x, y, z \in \mathbf{K}$,

1. *Si* $x < y$, *entonces* $-y < -x$.
2. *Si* $x < y$ *y* $z < 0$, *entonces* $xz > yz$.
3. *Si* $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$. *En particular,* $1 > 0$.
4. *Si* $0 < x < y$, *entonces* $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

La demostración de este lema, que omitimos, puede verse en las referencias citadas.

Ejemplo 1.

1. Los números racionales y los números reales forman cuerpos ordenados, con el orden natural heredado de la identificación con puntos de la recta real.

2. En el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos no existe ningún orden compatible con el orden natural en $\mathbb{R}$. Si lo hubiera, de acuerdo con 3) en el lema 2, tendríamos $i^2 > 0$, o sea $-1 > 0$, lo cual no es cierto. La falta de un orden en $\mathbb{C}$, compatible con el orden natural de $\mathbb{R}$, también puede probarse directamente por reducción al absurdo. En efecto, si existiera tal orden en $\mathbb{C}$, una de las alternativas $i > 0$ o $i < 0$ tiene que ser cierta, puesto que $i \neq 0$. En el primer caso, $-1 = i^2 > 0$, lo cual es un absurdo, debido a 1) y 3) en el lema 2. Si $i < 0$, entonces $0 < -i$ de acuerdo con 1) en el lema 2. Usando 2), tendremos $(-i)i < 0$. De acuerdo con 11) en el lema 1,$-i^2 < 0$, o sea $1 < 0$, lo cual tampoco puede ser.

Dado un cuerpo $\mathbf{K}$, existe un homomorfismo de cuerpo, de $\mathbb{Q}$ en $\mathbf{K}$. En otras palabras, hay subconjuntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{K}$, que se identifican con los números naturales $\mathbb{N}$, los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$, respectivamente. Si $\mathbf{K}$ es un cuerpo ordenado, entonces el homomorfismo preserva el orden ([28], pág. 33, proposición 2).

Concluímos esta sección con otra caracterización de los cuerpos ordenables:

Proposición 2. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathbf{K}$ es ordenable.
2. $\mathbf{K}$ es formalmente real. Esto quiere decir que dados $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la igualdad
$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$
implica $x_1 = ... = x_n = 0$.

Demostración. Supongamos que 1) se cumple, es decir $\mathbf{K}$ es ordenable. El caso $n = 1$ en 2) resulta de 10) en el lema 1, sin ninguna referencia al orden. Cuando $n > 1$, de acuerdo con la proposición 1 y el lema 2, de la igualdad $x_1^2 = -x_2^2 - ... - x_n^2$ se concluye que $x_1 = 0$. Si $n = 2$, resulta que x_2 es también cero. Si no, se continúa de la misma manera, hasta concluir que $x_1 = ... = x_n = 0$. Esto prueba 2).

La implicación 2) $\Rightarrow$ 1) es el teorema de Artin-Schreier, cuya demostración, que aquí omitiremos, puede verse, por ejemplo, en ([17], capítulo 11) y en [4]. Si se quiere la existencia de un único orden en $\mathbf{K}$, el ser formalmente real no es suficiente. Los detalles pueden verse en ([37], pág. 249). □

3. Valores absolutos en un cuerpo

Comenzamos por dar la siguiente definición.

Definición 2. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$, una función $A : \mathbf{K} \to \mathbb{R}$ es un valor absoluto en $\mathbf{K}$, si cumple las siguientes condiciones:

1. $A(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbf{K}$.
2. $A(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

3. $A(x+y) \leq A(x) + A(y)$, para todo $x, y \in \mathbf{K}$.
4. $A(xy) = A(x)\,A(y)$, para todo $x, y \in \mathbf{K}$.

Ejemplo 2.

1. El valor absoluto usual, indicado $|\cdot|$, basado en el orden natural de $\mathbb{R}$,
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$
2. El valor absoluto trivial, también llamado discreto, definido como
$$x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$
3. Dado un valor absoluto A en un cuerpo $\mathbf{K}$ y dado $0 < \alpha < 1$, la función definida en $\mathbf{K}$ como
$$x \to [A(x)]^{\alpha}.$$
es un valor absoluto en $\mathbf{K}$.

Definición 3. Dos valores absolutos, A_1 y A_2, se dicen equivalentes, si existe $\alpha > 0$ tal que
$$A_1(x) = [A_2(x)]^{\alpha},$$
para todo $x \in \mathbf{K}$.

Observemos que en esta definición se fijan dos funciones que ya son valores absolutos. Por ello, el pedir solamente que el exponente sea positivo, no crea ninguna dificultad.

Definición 4. Un valor absoluto se dice no trivial si su imagen no se reduce a los valores 0 y 1.

Lema 3. *Dado un valor absoluto A en un cuerpo $\mathbf{K}$ y dados $x, y \in \mathbf{K}$,*

1. $A(\pm 1) = 1$.
2. $A(n) \leq n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, donde* $A(n)$ *quiere decir* $A(n1)$*, definido de acuerdo con (1).*
3. $A(x) = A(-x)$.
4. $A(x-y) \leq A(x) + A(y)$.
5. $A(x \pm y) \geq |A(x) - A(y)|$.
6. $A\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{A(x)}{A(y)}$*, si* $y \neq 0$.

Demostración. Todas estas afirmaciones se prueban fácilmente.

Para 1),
$$A(1) = A((1)(1)) = [A(1)]^2,$$
de donde $A(1) = 1$. Además, usando 11) en el lema 1,
$$1 = A(1) = A((-1)(-1)) = [A(-1)]^2,$$
de donde $A(-1) = 1$.

Para probar 2), usamos 1):
$$A(n) = A\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{n veces}}\right) \leq A(1) + \cdots + A(1) = n.$$

En cuanto a 3), usando 11) en el lema 1 con $y = 1$ y 1), tenemos
$$A(-x) = A((-1)x) = A(-1)A(x) = A(x).$$

En 4), usamos 3) para escribir
$$A(x - y) = A(x + (-y)) = A(x) + A(-y) = A(x) + A(y).$$

Por la definición del valor absoluto usual en $\mathbb{R}$, la prueba de la desigualdad 5) se reduce a probar las dos desigualdades
$$-A(x \pm y) \underset{\text{(i)}}{\leq} A(x) - A(y) \underset{\text{(ii)}}{\leq} A(x \pm y).$$
Para (i),
$$A(y) = A(\pm y + x - x) \leq A(x \pm y) + A(x),$$
mientras que para (ii),
$$A(x) = A(x \pm y \mp y) \leq A(x \pm y) + A(y).$$

Finalmente, si $y \neq 0$, o lo que es lo mismo, $A(y) \neq 0$,
$$A(x) = A\left(y\frac{x}{y}\right) = A(y)A\left(\frac{x}{y}\right),$$
lo cual prueba 6).

Esto completa la demostración del lema. $\square$

Definición 5. Si en lugar de 3) en la definición 2, la función A satisface la desigualdad, llamada desigualdad ultramétrica,
$$A(x + y) \leq \text{máx}\{A(x), A(y)\}, \tag{3}$$
se dice que el valor absoluto A no es arquimediano. En la sección 5, veremos el porqué de este nombre. Observemos que
$$\text{máx}\{A(x), A(y)\} \leq A(x) + A(y),$$
lo cual muestra que (3) implica 3) en la definición 2.

Proposición 3. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$ con un valor absoluto A, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El valor absoluto A no es arquimediano.
2. $A(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Demostración. Para probar 1) $\Rightarrow$ 2), usamos 1) en el lema 3 y el principio de inducción:

$$A(n) = A\left(1 + \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{\text{n-1 veces}}\right) \leq \text{máx}\left\{A(1), A\left(\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{\text{n-1 veces}}\right)\right\} \leq 1.$$

En cuanto a 2) $\Rightarrow$ 1), la demostración que presentamos es típica en la literatura.

Dados $a, b \in \mathbf{K}$ y dado $k \in \mathbb{N}$, el teorema del binomio nos permite escribir

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j},$$

donde, por convención, se define $a^0 = b^0 = 1$ y

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}.$$

Como $\binom{k}{j} \in \mathbb{N}$, usando 2), tenemos,

$$A\left(\binom{k}{j}\right) \leq 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(A(a+b))^k &= A\left((a+b)^k\right) \leq \sum_{j=0}^{k} (A(a))^j (A(b))^{k-j} \\ &\leq (k+1)(\text{máx}(A(a), A(b)))^k.\end{aligned}$$

Tomando la raíz k-ésima, resulta

$$A(a+b) \leq \sqrt[k]{k+1}\,\text{máx}(A(a), A(b)).$$

Finalmente, si tomamos el límite para $k \to \infty$,

$$A(a+b) \leq \text{máx}(A(a), A(b)),$$

que es la desigualdad ultramétrica. Es decir, se cumple 1).

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

La proposición 3 mejora considerablemente 2) en el lema 3, cuando A no es arquimediano.

En lo que sigue, prepararemos el terreno para definir en $\mathbb{Q}$ un valor absoluto, que, como veremos, es muy diferente del valor absoluto usual.

Dado un número racional $x \neq 0$, el teorema fundamental de la aritmética nos dice que

$$x = \pm \prod_{p \text{ primo}} p^{e_p}, \tag{4}$$

donde el exponente entero e_p es cero, excepto para un número finito de valores de p. Por ejemplo, si $x = -\frac{24}{135}$,

$$x = -2^3 \times 3^{-2} \times 5^{-1}. \tag{5}$$

Definición 6. Fijado p primo, el exponente e_p en (4) se llama la valuación p-ádica de x, que se denota $v_p(x)$.

Observemos que cuando $x \neq 0$, si $x \in \mathbb{Z}$ y p divide a x,

$$v_p(x) = \text{máx}\left\{k \in \mathbb{N} : p^k \text{ divide a } x\right\},$$

mientras que $v_p(x) = 0$ si p no divide a x. Si x es una fracción $\frac{a}{b}$,

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b). \tag{6}$$

Es claro que si x, y son enteros diferentes de cero,

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y). \tag{7}$$

Además, si $x + y$ es diferente de cero,

$$v_p(x + y) \geq \text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}, \tag{8}$$

porque si p divide a x y p divide a y, entonces p debe de dividir a $x + y$.

Si $v_p(x) \neq v_p(y)$, afirmamos que

$$v_p(x + y) = \text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

En efecto, si $x = p^\alpha u$, $y = p^\beta v$, p no divide ni a u ni a v y, digamos, $\alpha < \beta$, entonces $x + y = p^\alpha\left(u + p^{\alpha-\beta} v\right)$, de donde $v_p(x + y) = \alpha = v_p(x)$.

Definiendo

$$v_p(0) = +\infty,$$

(7) y (8) se extienden de inmediato a todo $\mathbb{Z}$.

El siguiente lema extiende (7) y (8) a valores racionales de x e y.

Lemma 1. *Dados $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ en $\mathbb{Q}$, la valuación p-ádica tiene las siguientes propiedades:*

1. $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.

2. $v_p(x+y) \geq \text{mín}\{v_p(x), v_p(y)\}$, *con igualdad cuando* $v_p(x) \neq v_p(y)$.

Demostración. Si x o y es cero, ambos miembros de la igualdad en 1) se reducen a $+\infty$. Si $x, y \neq 0$, usando (6) y (7),

$$\begin{aligned} v_p(xy) &= v_p(ac) - v_p(bd) = v_p(a) + v_p(c) - v_p(b) - v_p(d) \\ &= v_p(a) - v_p(b) + v_p(c) - v_p(d) \\ &= v_p(x) + v_p(y), \end{aligned}$$

lo cual prueba 1). En cuanto a 2), es claro que la desigualdad se cumple si x, y o $x+y$ es igual a cero. Si no, usando (8),

$$\begin{aligned} v_p(x+y) &= v_p\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = v_p(ad+bc) - v_p(bd) \\ &\geq \text{mín}\{v_p(ad), v_p(bc)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \text{mín}\{v_p(a) + v_p(d), v_p(b) + v_p(c)\} - v_p(b) - v_p(d) \\ &= \text{mín}\{v_p(a) - v_p(b), v_p(c) - v_p(d)\} \\ &= \text{mín}(v_p(x), v_p(y)). \end{aligned}$$

Para probar la igualdad cuando $v_p(x) \neq v_p(y)$, suponemos $v_p(x) < v_p(y)$ y escribimos

$$\begin{aligned} x &= p^{\alpha}\frac{a}{b}, \\ y &= p^{\beta}\frac{c}{d}, \end{aligned}$$

donde ninguno de los números a, b, c, d son divisibles por p y $\alpha < \beta$. Entonces,

$$x + y = p^{\alpha}\frac{a}{b} + p^{\beta}\frac{c}{d} = p^{\alpha}\frac{ad + p^{\beta-\alpha}bc}{bd}.$$

Como p no divide a ad ni a bd y $\beta - \alpha > 0$, concluímos que $v_p(x+y) = \alpha$.

Esto completa la prueba del lema. □

Definición 7. Dado un número primo p fijo, definimos en $\mathbb{Q}$ la función

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Por ejemplo, de (5),

$$\begin{aligned} \left|-\frac{24}{135}\right|_2 &= 2^{-3} = \frac{1}{8}, \\ \left|-\frac{24}{135}\right|_3 &= 3^2 = 9, \\ \left|-\frac{24}{135}\right|_5 &= 5^1 = 5, \end{aligned}$$

mientras que

$$|x|_p = 1,$$

para todo p primo diferente de $2, 3, 5$.

Dados $p, q \in \mathbb{N}$ primos, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |p^n|_p &= \lim_{n\to\infty} p^{-n} = 0, \\ |q^n|_p &= 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } q \neq p. \end{aligned}$$

Si $|\cdot|$ es el valor absoluto usual en $\mathbb{Q}$, $|q^n|$ siempre tiende a infinito cuando $n \to \infty$.

Si x es un número racional distinto de cero, de (4) se obtiene la fórmula

$$|x| \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(x)} = 1.$$

Proposición 4. La función $|\cdot|_p$ definida en el cuerpo $\mathbb{Q}$ como (9), es un valor absoluto.

Demostración. Es claro que $|\cdot|_p$ satisface las condiciones 1) y 2) en la definición 2. En cuanto a la desigualdad triangular 3), si $x, y \in \mathbb{Q}$, usando 2) en el lema 1,

$$\begin{aligned} |x+y|_p &= p^{-v_p(x+y)} \leq p^{-\min\{v_p(x),v_p(y)\}} \underset{\text{(i)}}{\leq} \max\left\{p^{-v_p(x)}, p^{-v_p(y)}\right\} \\ &= \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\} \leq |x|_p + |y|_p, \end{aligned}$$

donde la desigualdad (i) es una igualdad cuando $|x|_p \neq |y|_p$. Es decir, $|\cdot|_p$ satisface la desigualdad ultramétrica (3).

Finalmente, la propiedad multiplicativa 4) es consecuencia de 1) en el lema 1.

Esto completa la demostración de la proposición. □

Observemos que si hubiéramos definido $|\cdot|_p$ en (9) con un signo positivo en el exponente, la desigualdad 3) en la definición 2, no se cumpliría. Por ejemplo,

$$|2+5|_7 = \frac{1}{7},$$

mientras que

$$|2|_7 = |3|_7 = 1.$$

Fijado p primo, si $x \in \mathbb{Q}$, podemos escribir

$$x = p^{\alpha} u,$$

donde $\alpha \in \mathbb{Z}$ y p no divide ni al numerador ni al denominador de u. Entonces, siendo $|u|_p = 1$, es decir, siendo u una unidad con respecto a $|\cdot|_p$,

$$|x|_p = |p^{\alpha}|_p \, |u|_p = |p^{\alpha}|_p = p^{-\alpha}. \tag{10}$$

O sea que la imagen de la función $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es el conjunto

$$\{0\} \bigcup \{p^m : m \in \mathbb{Z}\}. \tag{11}$$

En particular,

$$|x|_p \leq 1, \tag{12}$$

para todo $x \in \mathbb{Z}$, mejorando 2) en el lema 3. De acuerdo con la proposición 3, esto corrobora que el valor absoluto p-ádico no es arquimediano. Es decir, que satisface la desigualdad (3).

Dado p primo fijo, $v_p\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ cuando a y b son números enteros coprimos con p. O sea que $\left|\frac{a}{b}\right|_p = 1$. En el caso del valor absoluto usual, sólo $|\pm 1| = 1$.

Reiteramos que en la proposición 4 hemos probado que el valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ satisface la desigualdad ultramétrica,

$$|x+y|_p \leq \text{máx}\left\{|x|_p, |y|_p\right\}, \tag{13}$$

que se torna en una igualdad cuando $|x|_p \neq |y|_p$.

Es decir, $|\cdot|_p$ constituye un ejemplo de un valor absoluto que no es arquimediano en el sentido de la definición 5.

La estimación (12) nos dice que en $\mathbb{Q}$, con el valor absoluto p-ádico, el subconjunto de los números enteros es acotado, en el sentido de $|\cdot|_p$.

Observemos que el valor absoluto $|\cdot|_p$ de un número entero es pequeño cuando el número es divisible por una potencia de p grande. En el orden usual de $\mathbb{Q}$, esto indicaría que el número es grande.

En otras palabras, el que dos números enteros x e y sean congruentes módulo una potencia positiva de p, se traduce en información sobre cuán cerca están uno del otro en el valor absoluto p-ádico: Si $x \equiv y \pmod{p^m}$ entonces $|x-y|_p \leq p^{-m}$.

En particular, todo esto muestra que, a diferencia del valor absoluto usual, el valor absoluto p-ádico no está asociado, en ninguna forma, con el orden usual en $\mathbb{Q}$.

Para concluir esta sección, mencionamos, sin demostrarlo, un teorema debido al matemático Alexander Ostrowski, publicado en 1916 en *Acta Mathematica*. Este teorema dice que todo valor absoluto no trivial definido en $\mathbb{Q}$, es equivalente, en el sentido de la definición 3, al valor absoluto usual $|\cdot|$, o a un valor absoluto p-ádico para un cierto primo p. La demostración puede verse, por ejemplo, en [35] y en [8].

Hay mucho más que decir sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto p-ádico (ver, por ejemplo [35] y las referencias allí mencionadas), pero aquí lo dejamos, por ahora.

4. El principio de Arquímedes en un cuerpo ordenado

Este principio es enunciado en $\mathbb{R}$, por ejemplo, en los siguientes términos ([29], pág. 9, teorema 1.20):

"Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y."$$

Aparece como axioma V en la obra *Sobre Esferas Y Cilindros* del matemático, ingeniero, físico, astrónomo, Arquímedes de Siracusa (ca. 287 AC - ca. 212 AC). También aparece, como definición 4, en el libro V de los *Elementos* de Euclides. Arquímedes lo adjudica al matemático y astrónomo Eudoxio de Cnido (ca. 390 AC- ca. 337 AC). El asociar el nombre de Arquímedes con este principio, parece deberse al matemático Otto Stolz, quien menciona a Arquímedes en relación con el principio, en un artículo publicado en 1882.

Como observamos hacia el final de la sección 2, dado un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$, existe un homomorfismo, que preserva el orden, de $\mathbb{Q}$ en $\mathbf{K}$. En otras palabras, hay subconjuntos $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ de $\mathbf{K}$, que se identifican con los números naturales $\mathbb{N}$, los números enteros $\mathbb{Z}$ y los números racionales $\mathbb{Q}$, respectivamente ([28], pág. 33, proposición 2).

Definición 8. Si $\mathbf{K}$ es un cuerpo ordenado,

1. $x \in \mathbf{K}$ es un infinitesimal si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbf{N}$.
2. $x \in \mathbf{K}$ es una infinitud si $x \geq n$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

Ejemplo 3.
1. Cero es un infinitesimal en todo cuerpo ordenado. La comprobación es inmediata.
2. Consideremos el cuerpo $\mathbb{R}(X)$ de las funciones racionales f con coeficientes reales,

$$f(X) = \frac{a_r X^r + \cdots + a_1 X + a_0}{b_s X^s + \cdots + b_1 X + b_0},$$

donde el numerador tiene grado r y el denominador tiene grado s. Es decir, $a_r, b_s \neq 0$. En este cuerpo definimos

$$\mathbb{R}(X)_+ = \left\{ f \in \mathbb{R}(X) : \frac{a_r}{b_s} > 0 \right\}.$$

El suconjunto $\mathbb{R}(X)_+$ satisface las condiciones de la definición 1. En efecto, es claro que $0 \notin \mathbb{R}(X)_+$. De la expresión

$$\begin{aligned} f(X) + g(X) &= \frac{a_r X^r + \cdots + a_1 X + a_0}{b_s X^s + \cdots + b_1 X + b_0} + \frac{a'_p X^p + \cdots + a'_1 X + a'_0}{b'_q X^q + \cdots + b'_1 X + b'_0} \\ &= \frac{a_r b'_q X^{r+q} + \cdots + b_s a'_p X^{s+p} + \cdots}{b_s b'_q X^{s+q} + \cdots}, \end{aligned}$$

si $r + q > s + p$, entonces

$$\frac{a_r b'_q}{b_s b'_q} = \frac{a_r}{b_s} > 0.$$

Análogamente, si $s + p > r + q$,

$$\frac{b_s a'_p}{b_s b'_q} = \frac{a'_p}{b'_q} > 0.$$

Si $r + q = s + p$, entonces

$$\frac{a_r b'_q + b_s a'_p}{b_s b'_q} = \frac{a_r}{b_s} + \frac{a'_p}{b'_q} > 0.$$

Es decir, $f + g \in \mathbb{R}(X)_+$. En cuanto a la multiplicación,

$$\begin{aligned} f(X)\, g(X) &= \frac{a_r X^r + \cdots + a_1 X + a_0}{b_s X^s + \cdots + b_1 X + b_0}\, \frac{a'_p X^p + \cdots + a'_1 X + a'_0}{b'_q X^q + \cdots + b'_1 X + b'_0} \\ &= \frac{a_r a'_p X^{r+p} + \cdots}{b_s b'_q X^{s+q} + \cdots}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{a_r a'_p}{b_s b'_q} > 0.$$

Por lo tanto, $\mathbb{R}(X)_+$ es cerrado con respecto a la suma y a la multiplicación en $\mathbb{R}(X)$. Finalmente, dado $f \in \mathbb{R}(X)$ distinto de cero, f o $-f$ pertenece a $\mathbb{R}(X)_+$. Es decir que $\mathbb{R}(X)$ es ordenable, de acuerdo con la proposición 3. El cuerpo $\mathbb{R}$ está inmerso de manera natural en $\mathbb{R}(X)$ y esta inmersión preserva el orden.

En el orden determinado por $\mathbb{R}(X)_+$,

$$0 < \frac{1}{X} < \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $1 > 0$ de acuerdo con 3) en el lema 2 y $\frac{1}{n} - \frac{1}{X} = \frac{X-n}{nX}$ es positivo. Es decir, $\frac{1}{X}$ es un infinitesimal. De la misma manera,

$$X > n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, porque $X - n$ es positivo. Es decir, X es una infinitud o, en otras palabras, $\mathbb{N}$ es acotado en $\mathbb{R}(X)$. Más aún, para todo $x \in \mathbb{R}$, es $X > x$, lo cual nos dice que el conjunto de los números reales no negativos está acotado en $\mathbb{R}(X)$.

Observemos que en algunas referencias (ver, por ejemplo, [11], pág. 265, definición 2.2), la noción de infinitesimal se define:

"$x \in \mathbf{K}$ es un infinitesimal si $|x| < \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbf{N}$."

En esta definición, $|\cdot|$ es el "valor absoluto" definido en $\mathbf{K}$ como en 1) de los ejemplos 2. Es decir, $|\cdot|$ está asociado al orden de $\mathbf{K}$, resultando en una función $|\cdot| : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$. Cuando $\mathbf{K}$ no es el cuerpo $\mathbb{R}$, esta función valor absoluto es diferente de la dada en la definición 2.

Proposición 5. Dado un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Si $x, y \in \mathbf{K}$ y $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$nx > y. \tag{14}$$
Observemos que nx, con $n \in \mathbb{N}$, se interpreta como $\underbrace{x + \cdots + x}_{\text{n veces}} = 1x + \cdots + 1x = nx$, donde, a la derecha, $n \in \mathbf{N}$ es la imagen del número $n \in \mathbb{N}$ que aparece a la izquierda. O sea, que no hay ambigüedad en decir $n \in \mathbb{N}$ o $n \in \mathbf{N}$ en (14). Es bueno mencionar esto, al menos una vez.
2. Si $x \in \mathbf{K}$, existe $n \in \mathbf{Z}$ tal que
$$n > x.$$
3. El conjunto $\mathbf{N}$ no es acotado en $\mathbf{K}$. Es decir, dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n > x$.
4. Dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que
$$\frac{1}{n} < x.$$
5. Si $x \in \mathbf{K}$ es un infinitesimal, entonces $x = 0$.
6. No hay infinitudes en $\mathbf{K}$.

Demostración. Aunque formalmente trabajaremos como si $\mathbf{K}$ fuera $\mathbb{R}$, hay que pensar con cuidado, en el caso general, en el significado de cada operación.

Comenzamos por probar que 1) $\Rightarrow$ 2). Si $x > 0$, usamos 1) con $\frac{1}{x}$ e $y = 1$. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$\frac{\overbrace{1 + \cdots + 1}^{\text{n veces}}}{x} = \frac{n}{x} > 1,$$
o
$$n > x.$$
Si $x \leq 0$, es claro que $n > x$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Así obtenemos 2).

Si negamos 3), es decir, si $\mathbf{N}$ fuera acotado en $\mathbf{K}$, existiría $x \in \mathbf{K}$, positivo, tal que
$$0 < n \leq x,$$
para todo $n \in \mathbf{N}$. O sea, para ese valor x, es $n \leq x$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, lo cual es la negación de 2).

Si suponemos que 3) se cumple, es decir $\mathbf{N}$ no es acotado en $\mathbf{K}$, dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, debe de existir $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{x}$$

o

$$\frac{1}{n} < x,$$

lo cual prueba 3) $\Rightarrow$ 4).

Si 5) no se cumple, existe $x \in \mathbf{K}$ que es un infinitesimal positivo en $\mathbf{K}$. O sea,

$$0 < x \leq \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Consecuentemente, no puede existir $n \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$. Es decir, 4) no se cumple.

Si x es una infinitud en $\mathbf{K}$, entonces $x \geq n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. O sea,

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Es decir, $\frac{1}{x}$ es un infinitesimal positivo en $\mathbf{K}$, lo cual prueba que 5) no se cumple.

Finalmente, dado $x \in \mathbf{K}$ positivo, si y es negativo o cero,

$$nx > y$$

para cada $n \in \mathbf{N}$. Si y es positivo, puesto que $\frac{y}{x}$ no puede ser una infinitud de acuerdo con 6), debe de existir $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$n > \frac{y}{x}.$$

Es decir, existe $n \in \mathbf{N}$, o $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$nx > y,$$

lo cual prueba que 6) $\Rightarrow$ 1).

Esto completa la prueba de la proposición. □

Definición 9. Un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ se llama arquimediano si satisface las propiedades, equivalentes, enunciadas en la proposición 5.

Proposición 6. Si $\mathbf{K}$ es un cuerpo ordenado y completo en el sentido de Dedekind, entonces $\mathbf{K}$ es arquimediano.

Demostración. Probaremos 2) en la proposición 5, es decir, que $\mathbf{Z}$ no es acotado superiormente en $\mathbf{K}$. La prueba es idéntica al caso euclidiano. Si $\mathbf{Z}$ fuera acotado superiormente en $\mathbf{K}$, no siendo vacío, tendría supremo, digamos α, en $\mathbf{K}$. Entonces $n + 1 \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, o $n \leq \alpha - 1$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, contradiciendo la afirmación que α es el supremo de $\mathbf{Z}$.

Esto completa la demostración de la proposición. □

Ejemplo 4.

1. De acuerdo con la proposición 6, el cuerpo $\mathbb{R}$ es arquimediano.
2. Que un cuerpo ordenado sea arquimediano, es estrictamente más débil que el ser completo en el sentido de Dedekind. En efecto, el cuerpo $\mathbb{Q}$ no es completo en el sentido de Dedekind porque, por ejemplo, el conjunto
$$\left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\right\},$$
está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$, pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $\mathbb{Q}$ es arquimediano, pues, por ejemplo, el subconjunto $\mathbb{N}$ no es acotado en $\mathbb{Q}$. Si lo fuera, existiría $\frac{p}{q}$ con $p, q \geq 1$, tal que $n \leq \frac{p}{q}$, o $nq \leq p$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $(p+1)\, q \leq p$, lo cual no es posible.
3. El cuerpo $\mathbb{R}\,(X)$, con el orden definido en 2) de los ejemplos 3, no es arquimediano puesto que, como mostramos allí, contiene infinitesimales o, equivalentemente, contiene infinitudes o, equivalentemente, $\mathbb{N}$ no es un subconjunto acotado.
4. Consideremos el conjunto $\mathbb{R}\,((X))$ de las series de Laurent formales. Es decir, series de la forma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ para las que existe $N \in \mathbb{Z}$, que depende de la serie, tal que $a_n = 0$ para $n < N$. Aunque no entraremos en los detalles, $\mathbb{R}\,((X))$ es un cuerpo con las operaciones habituales entre series formales. Dada $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n X^n$ en $\mathbb{R}\,((X))$ distinta de cero, definimos
$$v\,(f) = \operatorname{mín}\left\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\right\}.$$
Decimos que f es positiva si el coeficiente $a_{v(f)}$ es positivo. De la misma manera que en 2) de los ejemplos 3, se puede ver que el cuerpo $\mathbb{R}\,((X))$, con esta noción de positividad, resulta ordenado. Observemos que, en este orden,
$$\frac{1}{X} > n,$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si $f = \frac{1}{X} - n$, $v\,(f) = -1$ y el coeficiente a_{-1} es 1, positivo. Es decir, $\mathbb{R}\,((X))$ no es arquimediano.

Definición 10. Dado un conjunto no vacío S de números con el orden usual, se dice que S está bien ordenado si cada subconjunto no vacío de S tiene un primer elemento en el orden.

Definición 11. El principio de buena ordenación dice que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales está bien ordenado con el orden usual.

Este principio es equivalente al principio de inducción (ver, por ejemplo, [2]).

Proposición 7. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$ ordenado, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\mathbf{K}$ es arquimediano.

2. La función “parte entera” está definida en $\mathbf{K}$. Es decir, dado $a \in \mathbf{K}$, si $a > 0$, existe $n \in \mathbf{N} \bigcup \{0\}$ tal que $n \leq a < n+1$ y si $a < 0$, existe $n \in \mathbf{Z}$, $n < 0$, tal que $n < a \leq n+1$.

3. El conjunto $\mathbf{Q}$ es denso en $\mathbf{K}$. Es decir, si $x, y \in \mathbf{K}$, y $x < y$, existe $r \in \mathbf{Q}$ tal que $x < r < y$.

4. Densidad en $\mathbf{K}$ de cierto subconjunto de $\mathbf{Q}$: Si $x, y \in \mathbf{K}$, y $x < y$, existen $k \in \mathbf{Z}$ y $n \in \mathbf{N}$ tal que $x < \frac{k}{2^n} < y$. La potencia 2^n se interpreta como $\underbrace{(1+1) \ldots (1+1)}_{\text{n veces}}$ en la imagen del homomorfismo de $\mathbb{Q}$ en $\mathbf{K}$.

Demostración. Probemos que 1) es equivalente a 2): Supongamos que $\mathbf{K}$ es arquimediano y fijemos $a \in \mathbf{K}$. Si $a > 0$, usando 2) en la proposición 5 con $x = a$, concluímos que existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $a < n$. Esto quiere decir que el conjunto

$$\{k \in \mathbf{N} : a < k\}$$

es un subconjunto no vacío de $\mathbf{N}$. Por el principio de buena ordenación, tiene que tener un primer elemento que llamamos m. Es decir,

$$m - 1 \leq a < m.$$

Si $a < 0$, entonces $-a > 0$. Por lo tanto, debe de existir $m \in \mathbf{N}$ tal que $m - 1 \leq -a < m$. O sea,

$$-m < a \leq -m + 1.$$

Es decir, hemos probado 2).

Recíprocamente, si 1) no se cumple, podemos asegurar, de acuerdo con 4) en la proposición 5, que existe $a \in \mathbf{K}$ positivo, tal que $a \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Es decir, $n \leq \frac{1}{a}$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Por lo tanto 2) no se cumple para ese $a \in \mathbf{K}$ positivo.

Para probar que 2) $\Rightarrow$ 3), fijamos $x, y \in \mathbf{K}$, $x < y$. Si $x \geq 0$ e $y > 0$, de acuerdo con 2) en la proposición 5, existe $k \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{y-x} < k$. En particular, $1 < k\,(y - x)$. Usando 2), existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $n \leq kx < n + 1$. Para concluir 3), sólo necesitamos manipular estas desigualdades:

$$n + 1 \leq kx + 1 < kx + k\,(y - x) = ky.$$

Es decir,

$$kx < n + 1 < ky,$$

o

$$x < \frac{n+1}{k} < y,$$

lo cual nos da 3).

Si $x < 0$ e $y > 0$, entonces $x < 0 < y$. Finalmente, si $x, y < 0$, usamos el primer caso con $-y < -x$, obteniendo

$$-y < r < -x,$$

para un cierto $r \in \mathbf{Q}$. Entonces,

$$x < -r < y,$$

lo cual completa la demostración de 3).

Para probar que 3) $\Rightarrow$ 1), dado $x > 0$ fijo en $\mathbf{K}$, sabemos que existe $r \in \mathbf{Q}$ tal que $0 < r < x$. Puesto que r es de la forma $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} = r < x,$$

lo cual nos da 4) en la proposición 5. Es decir, el cuerpo $\mathbf{K}$ es arquimediano.

Puesto que la implicación 4) $\Rightarrow$ 3) claramente se cumple, sólo nos queda por probar que 1) $\Rightarrow$ 4) para completar la equivalencia de los cuatro enunciados. La prueba usa el principio de buena ordenación. Supongamos entonces que 4) no se cumple. Es decir, existen $x, y \in \mathbf{K}$ tal que $x < y$ y para cada $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, o bien $\frac{k}{2^n} \leq x$ o $y \leq \frac{k}{2^n}$. Si la segunda desigualdad nunca se cumple, entonces, en particular, para $n \in \mathbf{N}$ fijo,

$$k \leq x 2^n,$$

para todo $k \in \mathbf{N}$, lo cual contradice 3) en la proposición 5. Es decir, 1) no se cumple. Supongamos entonces que para algún $k \in \mathbf{Z}$ y $n \in \mathbf{N}$, se cumple $y \leq \frac{k}{2^n}$. Es decir, el conjunto

$$\mathbf{Z}_n = \{k \in \mathbf{Z} : y 2^n \leq k\},$$

es no vacío. Afirmamos que $\mathbf{Z}_n$ tiene un primer elemento. Si no lo tuviera, entonces para cada $k \in \mathbf{Z}_n$, también $k - 1 \in \mathbf{Z}_n$. Es decir, no puede existir $k \in \mathbf{Z}_n$ tal que $k - 1 \leq y 2^n \leq k$. De acuerdo con la equivalencia 1) $\Leftrightarrow$ 2), $\mathbf{K}$ no es arquimediano. Sea entonces k_n el primer elemento de $\mathbf{Z}_n$. Es decir,

$$\frac{k_n - 1}{2^n} \leq x < y \leq \frac{k_n}{2^n}.$$

Por lo tanto,

$$0 < y - x \leq \frac{k_n}{2^n} - \frac{k_n - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Usando el principio de inducción, que es equivalente al principio de buena ordenación, (ver, por ejemplo, [2]), podemos demostrar que $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbf{N}$. O sea,

$$0 < y - x \leq \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbf{N}$. Es decir, $y - x$ es un infinitesimal positivo. Por lo tanto, $\mathbf{K}$ no es arquimediano.

Esto completa la demostración de la proposición. $\square$

Observemos que 2) en la proposición 7, típicamente se prueba, en el caso real, como una consecuencia de la completitud de Dedekind.

Las proposiciones 5 y 7 nos dan muchas posibilidades para la formulación del principio de Arquímedes, algunas más usuales que otras. Por ejemplo, ahora sabemos que podríamos haber definido el principio pidiendo que $\mathbf{Q}$ sea denso en $\mathbf{K}$, o pidiendo que los elementos de $\mathbf{K}$ de la forma $\frac{k}{2^n}$ para $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, formen un conjunto denso en $\mathbf{K}$, etc.

En la próxima sección dejaremos el contexto de un cuerpo ordenado, para considerar el caso de un cuerpo, no necesariamente ordenado, con un valor absoluto.

5. El principio de Arquímedes en un cuerpo con un valor absoluto

En lo que sigue, volveremos a usar la letra $\mathbf{N}$ para indicar la copia de $\mathbb{N}$ que existe en $\mathbf{K}$ y usaremos las mismas licencias de notación usadas en secciones anteriores.

Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 12. Un cuerpo $\mathbf{K}$ con un valor absoluto A satisface el principio de Arquímedes, o es arquimediano, si para cada $x \in \mathbf{K}$ distinto de cero, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$A(nx) > 1.$$

Observemos que en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$, con el valor absoluto usual, asociado al orden usual, la definición 12 coincide con cualquiera de las definiciones equivalentes de cuerpo arquimediano dadas en la proposición 5.

Proposición 8. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$ con un valor absoluto A, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Dados $u, v \in \mathbf{K}$, si u es distinto de cero, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que
$$A(nu) > A(v).$$
2. Dado $a \in \mathbf{K}$ distinto de cero, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que
$$A(na) > 1.$$

Demostración. Para probar 1) $\Rightarrow$ 2), fijamos $a \in \mathbf{K}$ distinto de cero y usamos 1) con $u = a$ y $v = 1$, lo cual nos da 2).

Recíprocamente, es claro que 1) se cumple cuando $v = 0$. Si v no es cero, usamos 2) con $a = \frac{u}{v}$. Es decir, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$A\left(n\frac{u}{v}\right) > 1.$$

O sea,

$$A(nu) > A(v).$$

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

El resultado que sigue justifica el nombre de no arquimediano, dado en la definición 5 a aquellos valores absolutos que satisfacen la desigualdad ultramétrica.

Proposición 9. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$ con un valor absoluto A, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El valor absoluto A es arquimediano. Es decir, A no satisface la desigualdad ultramétrica (3).
2. $\mathbf{K}$ es arquimediano. Es decir, $\mathbf{K}$ satisface la definición 12.
3. El subconjunto $\mathbf{N}$ de $\mathbf{K}$ no está acotado en $\mathbf{K}$. Es decir,

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \{A(n)\} = \infty.$$

Demostración. Si 1) se cumple, de acuerdo con la proposición 3, existe $n \in \mathbf{N}$, tal que

$$A(n) > 1.$$

Entonces,

$$A\left(n^k\right) = (A(n))^k \to \infty \text{ cuando } k \to \infty,$$

lo cual nos dice que $\mathbf{N}$ no está acotado en $\mathbf{K}$. Es decir, hemos probado 1) $\Rightarrow$ 3).

Si suponemos que 3) se cumple, dado $x \in \mathbf{K}$ distinto de cero, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$A(n) > \frac{1}{A(x)},$$

o

$$A(nx) > 1.$$

Es decir, $\mathbf{K}$ es arquimediano, lo cual prueba 2).

Finalmente, si $\mathbf{K}$ es arquimediano, deben de existir $x, y \in \mathbf{K}$ tal que x es distinto de cero y $A(x) \leq A(y)$. Además existe $n \in \mathbf{N}$ tal que

$$A(nx) > A(y).$$

O sea,

$$A(n) > \frac{A(y)}{A(x)} \geq 1. \tag{15}$$

De acuerdo con la proposición 3, (15) muestra que A es arquimediano.

Esto completa la prueba de la proposición. □

Usando 3) en el lema 3, también podemos decir, en 3) de la proposición 9, que el conjunto $\mathbf{Z}$ no está acotado en $\mathbf{K}$.

Ejemplo 5.

1. El cuerpo $\mathbb{Q}$, con cada uno de los valores absolutos p-ádicos $|\cdot|_p$, no es un cuerpo arquimediano.
2. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$, consideremos el cuerpo $\mathbf{K}(X)$ de las funciones racionales con coeficientes en $\mathbf{K}$. Si $f \in \mathbf{K}(X)$ es un polinomio, definimos

$$A(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f = 0, \\ 2^{grado(f)} & \text{si } f \neq 0. \end{cases}$$

Extendemos esta definición a $\mathbf{K}(X)$ como

$$A\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A(f)}{A(g)}.$$

Afirmamos que A es un valor absoluto en $\mathbf{K}(X)$ que satisface la desigualdad ultramétrica. En efecto, es claro que $A\left(\frac{f_1}{f_2}\right) \geq 0$ y que es cero si y sólo si $f_1 = 0$. También es claro que si f, g son polinomios, $A(fg) = A(f)\,A(g)$. Por lo tanto,

$$A\left(\frac{f_1}{f_2}\frac{g_1}{g_2}\right) = \frac{A(f_1 g_1)}{A(f_2 g_2)} = \frac{A(f_1)\,A(g_1)}{A(f_2)\,A(g_2)} = A\left(\frac{f_1}{f_2}\right) A\left(\frac{g_1}{g_2}\right).$$

En cuanto a la suma, en el caso particular $\frac{f_1}{f} + \frac{g_1}{f}$, tenemos,

$$A\left(\frac{f_1}{f} + \frac{g_1}{f}\right) = \frac{A(f_1 + g_1)}{A(f)}.$$

Si $grado(f_1) = grado(g_1)$, entonces $A(f_1 + g_1) \leq A(f_1)$, en tanto que si $grado(f_1) > grado(g_1)$, $A(f_1 + g_1) = A(f_1)$. En el caso general,

$$\begin{aligned} A\left(\frac{f_1}{f_2} + \frac{g_1}{g_2}\right) &= A\left(\frac{f_1 g_2}{f_2 g_2} + \frac{f_2 g_1}{f_2 g_2}\right) \\ &\leq \max\left\{A\left(\frac{f_1}{f_2}\right), A\left(\frac{g_1}{g_2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Esto también puede probarse de inmediato usando la proposición 3 y la proposición 9. En efecto, dado $n \in \mathbf{N}$,

$$A(n) = 2^{\text{grad}(n)} = 2^0 = 1.$$

Es decir, obtenemos un cuerpo con un valor absoluto, que no es arquimediano en el sentido de la definición 12.

La proposición 5 en la sección 4, muestra que el principio de Arquímedes está íntimamente relacionado con las nociones de infinitesimal y de infinitud. Es natural, entonces, el preguntarnos qué pasa en un cuerpo con un valor absoluto.

Definición 13. Dado un cuerpo $\mathbf{K}$ con un valor absoluto A,

1. decimos que $x \in \mathbf{K}$ es un infinitesimal si
$$A(x) \leq \frac{1}{n},$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. decimos que $x \in \mathbf{K}$ es una infinitud si
$$A(x) \geq n,$$
para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que x es un infinitesimal distinto de cero si y sólo si $\frac{1}{x}$ es una infinitud. Aunque estas definiciones son modificaciones naturales de la definición de infinitesimal dada en la sección 4 para el caso de un cuerpo ordenado con el "valor absoluto" asociado al orden, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 10. Dado $p \in \mathbb{N}$ primo, no hay infinitesimales distintos de cero o infinitudes, en el cuerpo $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto p-ádico.

Demostración. Supongamos que existe $x \in \mathbb{Q}$ distinto de cero tal que $|x|_p \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si escribimos como en (10)
$$x = p^{\alpha} u,$$
tendremos
$$\frac{1}{n} \geq |x|_p = p^{-\alpha},$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto nos dice que el número racional $p^{-\alpha}$ es un infinitesimal diferente de cero en $\mathbb{Q}$, lo cual no es posible.

Si suponemos que $x \in \mathbb{Q}$ es una infinitud, entonces $|x|_p \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Volviendo a usar (10),
$$n \leq p^{-\alpha},$$
para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual tampoco es posible.

Esto completa la prueba de la proposición. □

Es decir, que aunque $\mathbb{N}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{Q}$ en todo valor absoluto p-ádico, no hay infinitesimales diferentes de cero o infinitudes, en el sentido de la definición 13. Más aún, como la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ converge a cero en $\mathbb{R}$, si x es un infinitesimal, debe de ser $A(x) = 0$ o, equivalentemente, $x = 0$. Es decir, no hay infinitesimales, y por lo tanto no hay infinitudes, en un cuerpo con un valor absoluto. Esto marca otra diferencia con el caso de un cuerpo ordenado.

6. “Modos de completitud” en un cuerpo ordenado

El objetivo de esta sección es el comparar, en un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$, las nociones de completitud, en el sentido de Dedekind y en el sentido de las cortaduras, con algunas otras nociones fundamentales del Análisis Real.

Comenzamos con la siguiente definición:

Definición 14.

1. Dos subconjuntos no vacíos A, B de un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ forman una cortadura de $\mathbf{K}$, denotada (A, B), si $A \bigcup B = \mathbf{K}$ y $a < b$ para todo $a \in A$, $b \in B$.
2. El cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de las cortaduras, si existe $c \in \mathbf{K}$ tal que $a \leq c \leq b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. En ese caso, c se llama un punto de corte para (A, B).

Observemos que si (A, B) es una cortadura con punto de corte c, entonces

$$a \in \mathbf{K} \text{ y } a < c \text{ implican } a \in A,$$
$$b \in \mathbf{K} \text{ y } b > c \text{ implican } b \in B.$$

En efecto, si existe $a \in B$ con $a < c$, por definición, debe de ser $c \leq a$, lo cual es una contradicción. Igualmente, si existe $b \in A$ con $b > c$, también por definición, debe de ser $b \leq c$, lo cual vuelve a ser una contradicción.

Lemma 2. *Si c existe en 2) de la definición 14, es único.*

Demostración. En efecto, si existen $c, c' \in \mathbf{K}$ con $c' < c$, podemos escribir

$$a \leq c' < \frac{c + c'}{2} < c \leq b,$$

para todo $a, b \in \mathbf{K}$, donde como siempre, 2 se interpreta como $1 + 1$ en el sentido de $\mathbf{K}$. De acuerdo con 1) en la definición 14, $\frac{c+c'}{2}$ tiene que pertenecer a A o a B. Pero si $\frac{c+c'}{2} \in A$, entonces c' no satisface 2) en la definición 14 y si $\frac{c+c'}{2} \in B$, entonces c no satisface 2) en la definición 14. Es decir, c debe de ser único.

Esto completa la prueba del lema. □

Es decir, que si existe **un** punto de corte, es **el** punto de corte.

Ejemplo 6. El cuerpo $\mathbb{Q}$ no satisface la propiedad de las cortaduras.

Para verlo, consideremos los subconjuntos A, B de $\mathbb{Q}$ definidos como

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{Q} : x < 0 \text{ o } x \geq 0 \text{ y } x^2 < 2\right\}, \\ B &= \left\{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \text{ e } y^2 > 2\right\}. \end{aligned}$$

Es claro que estos conjuntos satisfacen las dos propiedades en 1) de la definición 14. Sin embargo, no existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x \leq z \leq y$ para todo $x \in A$, $y \in B$. En efecto, si tal z existiera, sería positivo. Consideremos ([29], pág. 2),

$$z' = z - \frac{z^2 - 2}{z + 2} = \frac{2z + 2}{z + 2},$$

de donde,

$$z'^2 - 2 = \frac{2\left(z^2 - 2\right)}{z + 2}.$$

Tenemos dos posibilidades, $z^2 < 2$ o $z^2 > 2$, puesto que el polinomio $X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.

Si $z^2 < 2$, entonces $z \in A$ y también $z' \in A$. Pero $z' - z = \frac{2-z^2}{z+2} > 0$, es decir, $z < z'$.

Si $z^2 > 2$, entonces z y z' pertenecen a B. Pero en este caso $z' - z < 0$ o $z' < z$. En conclusión, z no puede existir.

El concepto de cortadura se debe a Richard Dedekind, quien lo usó en [9] para construir los números reales, lo que Dedekind llamó “la creación de los números irracionales” y para dar una base axiomática a la noción de completitud de la recta real, que él llamó “continuidad”. Posteriormente, el matemático Alfred Tarski enunció una versión simplificada, en la que la condición $A \bigcup B = \mathbf{K}$ no aparece. En ese contexto, podríamos haber considerado en $\mathbb{Q}$ los subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 < 2\right\}, \\ B &= \left\{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ y } x^2 > 2\right\}, \end{aligned}$$

ignorando a los racionales que no son positivos. La discusión en el ejemplo 6, se aplica de inmediato a este caso.

Históricamente, es más correcto el llamar completitud en el sentido de Dedekind a la propiedad de las cortaduras. Sin embargo, como lo mencionamos en la introducción, no hay acuerdo general al respecto.

Proposición 11. Un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind si y sólo si es completo en el sentido de las cortaduras.

Demostración. Seguiremos la prueba dada para el caso $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ en ([36], pág. 100, proposición 1).

Supongamos que $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind y sea (A, B) una cortadura de $\mathbf{K}$. Por definición, A es no vacío y está acotado superiormente. O sea que existe

$c = \sup A$, que resulta único como consecuencia de su definición. Por lo tanto, $a \leq c$ para todo $a \in \mathbf{K}$. Si existiera $b \in B$ tal que $b < c$, b no podría ser una cota superior de A. Es decir, existirá $a \in A$ tal que $a > b$, lo cual contradice 1) en la definición 14. O sea que $a \leq c \leq b$, para todo $a \in A$, $b \in B$, lo cual nos dice que c es el punto de corte para (A, B).

Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de las cortaduras y fijemos $S \subset \mathbf{K}$, no vacío y acotado superiormente. Supondremos que S tiene más de un elemento. Definimos dos subconjuntos de $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbf{K} : x \text{ es una cota superior de } S\}, \\ A &= \mathbf{K} \backslash B. \end{aligned}$$

Los conjuntos A y B no son vacíos y $A \bigcup B = \mathbf{K}$. Además, $a < b$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. En efecto, si existieran $a \in A$ y $b \in B$ con $a > b$, como b es una cota superior de S, tendríamos $a > b \geq x$ para todo $x \in S$. Es decir, a sería una cota superior de S, lo cual no es posible. Por lo tanto, A y B definen una cortadura en $\mathbf{K}$. Probaremos que el punto c de corte para (A, B) es el supremo de S. Comenzamos por probar que c es una cota superior para S. Si no lo es, c está en A y existe $s \in S$ tal que $c < s$. Entonces, para todo $a \in A$,

$$a \leq c < \frac{c+s}{2} < s. \tag{16}$$

Como $\frac{c+s}{2}$ no es una cota superior de S, $\frac{c+s}{2}$ pertenece a A. Como (A, B) es una cortadura, resulta $\frac{c+s}{2} \leq c$, lo cual contradice (16). Es decir que $\frac{c+s}{2}$ tiene que pertenecer a B, lo cual no es posible porque $\frac{c+s}{2} < s$. En definitiva, c es una cota superior de S. Para ver que es la menor, consideremos $c - \varepsilon$, para $\varepsilon \in \mathbf{K}$ positivo y supongamos que $c - \varepsilon \in B$. Entonces, $c \leq c - \varepsilon$, lo cual no es posible. Es decir, $c - \varepsilon \in A$ o, en otras palabras, $c - \varepsilon$ no es una cota superior de S.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

La completitud en el sentido de Dedekind es equivalente a la existencia de ínfimo para todo subconjunto no vacío de $\mathbf{K}$ que está acotado inferiormente. La prueba es idéntica al caso real (ver, por ejemplo, [14], pág. 23, teorema 0.20).

Definición 15. En vista de la proposición 11, diremos que el cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ es completo, a secas, si es completo en el sentido de Dedekind o es completo en el sentido de las cortaduras, indistintamente.

Más o menos explícita en el enunciado de las nociones a las cuales hemos aludido al comienzo de esta sección, aparece la necesidad de tener una estructura topológica en $\mathbf{K}$. Los órdenes $<$ y $\leq$ definido en $\mathbf{K}$, nos dan de inmediato la noción de intervalo, que puede ser de varios tipos: $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $\mathbf{K}$, etc. Consideramos en $\mathbf{K}$ la topología del orden, es decir la topología generada por los intervalos de la forma (a, b) con $a \leq b$. Hay una función, que indicaremos $|\cdot| : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ y llamaremos el valor absoluto inducido por el orden, definida como el valor absoluto usual en $\mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sería más correcto el escribir $|\cdot|_{\mathbf{K}}$, indicando que estamos trabajando en un cuerpo ordenado general. No lo haremos para no complicar la notación.

Observemos que si consideramos en $\mathbf{K}$ la función $|\cdot|^{\alpha}$ para cierto $0 < \alpha < 1$, 3) en los ejemplos 2 nos dice que $|\cdot|^{\alpha}$ es un valor absoluto, por supuesto distinto de $|\cdot|$. Sin embargo, ambos definen la misma topología.

En términos de la topología del orden o, equivalentemente, del valor absoluto inducido por el orden, podemos definir el límite, continuidad, continuidad uniforme, existencia de la derivada o diferenciabilidad, etc, etc, de una función definida en un subconjunto S de $\mathbf{K}$ con valores en $\mathbf{K}$. También podemos definir las nociones de sucesión de Cauchy y sucesión convergente. Aunque todas estas definiciones se escriben como en el caso real, hay que tener presente que las usaremos en un contexto general. Para fijar las ideas, escribamos, por ejemplo, la definición de continuidad en un subconjunto S de $\mathbf{K}$. Para evitar trivialidades, supondremos que S es no vacío.

Definición 16. Una función $f : S \to \mathbf{K}$ es continua en $x_0 \in S$, si para cada $\varepsilon \in \mathbf{K}$ positivo, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) \in \mathbf{K}$ positivo, tal que

$$|x - x_0| < \delta \text{ y } x \in S, \text{ implica } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Como es habitual, diremos que f es continua en S, si f es continua en cada punto de S.

En cuanto a la noción de sucesión convergente, tenemos la siguiente definición:

Definición 17. La sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x en $\mathbf{K}$, si dado $\varepsilon \in \mathbf{K}$ positivo, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq N$.

Definición 18. Un subconjunto S de $\mathbf{K}$ no es conexo si existen subconjuntos abiertos A, B de $\mathbf{K}$ tal que

1. $A \bigcap B = \varnothing$, $S \subseteq A \bigcup B$.
2. $A \bigcap S \neq \varnothing$, $B \bigcap S \neq \varnothing$.

Si este es el caso, se dice que los conjuntos A y B son una separación de S, denotada A/B.

Como consecuencia de esta definición, S no puede ser vacío.

Puesto que $A \bigcap S$ y $B \bigcap S$ son abiertos en la topología de $\mathbf{K}$ relativa a S, equivalentemente podemos decir que S no es conexo, si existen subconjuntos abiertos A, B no vacíos de S tal que $A \bigcap B = \varnothing$, $S = A \bigcup B$. Notemos que A y B son también cerrados en S.

Proposición 12. Dado un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$,

1. Si $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind, entonces todo intervalo en $\mathbf{K}$ es conexo.
2. Si todo intervalo en $\mathbf{K}$ es conexo, entonces $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de las cortaduras.

Demostración. Para probar 1), supongamos que I es un intervalo no vacío en $\mathbf{K}$ que no es conexo. Por lo tanto, I no se reduce a un punto. Dada una separación A/B de I, fijemos $a \in A$ y $b \in B$ y supongamos $a < b$. Consideramos en $\mathbf{K}$ el conjunto

$$S = \left\{ x \in I \colon [a, x] \bigcap I \subseteq A \right\}.$$

El conjunto S no es vacío, pues $a \in S$. Además, b es una cota superior de S. En efecto, si existiera $x \in S$ tal que $x > b$, tendríamos que b pertenece al intervalo $[a, x]$, lo cual implica que $b \in A$. Por la completitud de $\mathbf{K}$ en el sentido de Dedekind, existe $\sup(S)$, que llamamos α. Como $a \leq \alpha \leq b$, resulta que $\alpha \in I$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, debe de existir $x_n \in S$ tal que $\alpha \geq x_n > \alpha - \frac{1}{n}$. Recordemos una vez más que n se interpreta como $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{n veces}}$ en $\mathbf{K}$. O sea, $0 \leq \alpha - x_n < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathbf{K}$ es completo, de acuerdo con la proposición 6, $\mathbf{K}$ es arquimediano. Es decir, dado $\varepsilon \in \mathbf{K}$ positivo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Es decir, de acuerdo con 2) en la definición 17, $\{x_n\}_{n \geq 1}$ converge a α. O sea que α pertenece a la clausura de A en I. Pero siendo A cerrado en I, resulta $\alpha \in A$. Pero como A también es abierto en I, existe $\varepsilon \in \mathbf{K}$ positivo tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \bigcap I \subseteq A$, de donde resulta $(\alpha, \alpha + \varepsilon_1] \bigcap I \subseteq A$, para cualquier $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Es decir, $\alpha + \varepsilon_1$ pertenece a S, lo cual no es posible.

Para probar 2), supongamos que $\mathbf{K}$ no cumple la propiedad de las cortaduras. Es decir, existen subconjuntos A, B de $\mathbf{K}$ tal que $\mathbf{K} = A \bigcup B$, $a < b$ para todo $a \in A$, $b \in B$, pero no existe $c \in \mathbf{K}$ tal que $a \leq c \leq b$ para todo $a \in A$, $b \in B$. O sea, para cada $a \in A$ se puede encontrar $a_1 \in A$ tal que $a < a_1$ y para cada $b \in B$ se puede encontrar $b_1 \in B$ tal que $b_1 < b$. Entonces, $(a - 1, a_1) \subset A$ y $(b_1, b + 1) \subset B$, por lo cual A y B son abiertos y, por lo tanto, $\mathbf{K}$ no es conexo.

Esto completa la prueba de la proposición. □

En vista de la definición 15, obtenemos de inmediato el siguiente corolario, como consecuencia de la proposición 12:

Corolario 1. Dado un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\mathbf{K}$ es completo.

2. Todo intervalo en $\mathbf{K}$ es conexo.

Definición 19. Decimos que un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de los intervalos encajados, si dada cualquier familia de intervalos cerrados y acotados $\{I_j\}_{j\geq 1}$ con $I_{j+1} \subseteq I_j$ para todo $j \geq 1$, la intersección $\bigcap_{j\geq 1} I_j$ no es vacía.

Definición 20. Decimos que un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de las sucesiones monótonas y acotadas, si toda sucesión en $\mathbf{K}$ que es monótona y acotada, converge.

Proposición 13. Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo ordenado.

1. Si $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind, entonces $\mathbf{K}$ es arquimediano.
2. Si $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind, entonces $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de las sucesiones monótonas y acotadas.
3. Si $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de las sucesiones monótonas y acotadas, entonces $\mathbf{K}$ es arquimediano.
4. Si $\mathbf{K}$ es arquimediano y satisface la propiedad de las sucesiones monótonas y acotadas, entonces $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de las cortaduras.
5. Si $\mathbf{K}$ es arquimediano y satisface la propiedad de las sucesiones monótonas y acotadas, entonces $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de los intervalos encajados.
6. Si $\mathbf{K}$ es arquimediano y satisface la propiedad de los intervalos encajados, entonces $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind.

Demostración. 1) es la proposición 6. La prueba de 3) está tomada de ([23], pág. 400). La prueba de 4), es una modificación de la prueba en la misma referencia.

Antes de probar 2), observemos que una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ creciente y acotada superiormente tiene límite, si y sólo si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene supremo. Supongamos que la sucesión tiene límite x y veamos que x es una cota superior del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Fijado n,

$$x_n \leq x_m - x + x = x + x_m - x \leq x + |x_m - x|$$

para todo $m \geq n$. Fijado $N \in \mathbf{N}$, existe $m = m(N) \in \mathbb{N}$, que podemos suponer $\geq n$, tal que

$$x_n \leq x + |x_m - x| \leq x + \frac{1}{N},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbf{N}$. O sea,

$$x_n - x \leq \frac{1}{N}.$$

Si existiera n tal $x_n - x > 0$, sería un infinitesimal positivo, lo cual no es posible de acuerdo con la proposición 6. Es decir, x es una cota superior del conjunto. Veamos que es la menor. Si fijamos $y \in \mathbf{K}$, $y < x$ y suponemos que $x_n \leq y$ para todo n,

$$x_n \leq y < x,$$

de donde resulta

$$x - x_n \geq x - y > 0$$

para todo n, lo cual no puede ser.

Recíprocamente, si $x = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, probaremos que la sucesión converge a x. Sabemos que $x_n \leq x$ para todo n y que dado $N \in \mathbf{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x - \frac{1}{N} < x_n \leq x_m$$

para todo $m \geq n$. Es decir,

$$0 \leq x - x_m \leq \frac{1}{N},$$

para todo m mayor o igual que un cierto n. Como $\mathbf{K}$ es un cuerpo arquimediano, dado $\varepsilon \in \mathbf{K}$ positivo, existe $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ para $N \geq N_\varepsilon$. Fijando $N = N_\varepsilon$, tenemos

$$0 \leq x - x_m \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon,$$

para todo $m \geq n = n(N_\varepsilon)$. Esto prueba que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge a x. De la misma manera se prueba que una sucesión $\{y_n\}_{n\geq 1}$ decreciente y acotada inferiormente tiene límite, si y sólo si el conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene ínfimo.

Ahora sí, probemos 2). Si existiera una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en $\mathbf{K}$ que es creciente y acotada superiormente, pero sin límite, implicaría, por lo que acabamos de probar, que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, que no es vacío y está acotado superiormente, no tiene supremo.

De manera semejante podemos probar 2) para sucesiones decrecientes que son acotadas inferiormente.

Probemos 3). Si $\mathbf{K}$ no fuera arquimediano, podríamos decir, por ejemplo, que el conjunto $\mathbf{N}$ es acotado en $\mathbf{K}$. Es decir, la sucesión $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ es creciente y acotada, y por lo tanto tiene límite, digamos x, en $\mathbf{K}$. Como consecuencia, la sucesión $\{0, 1, 2, \ldots, n \ldots\}$ también converge a x. Con la misma demostración que en el caso real, podemos concluir que la sucesión $\{1 - 0, 2 - 1, \ldots, n - (n-1), \ldots\} = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ converge a $x - x = 0$, lo cual no es posible.

Ahora probamos 4). Para ello, suponemos que (A, B) es una cortadura de $\mathbf{K}$, es decir, los conjuntos A y B satisfacen 1) en la definición 14. Queremos probar que (A, B) tiene un punto de corte. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto $A_n = \left\{k \in \mathbf{Z} : \frac{k}{2^n} \in A\right\}$. Este conjunto no es vacío, pues si $\frac{k}{2^n} \in B$ para todo $k \in \mathbf{Z}$, entonces $a \leq \frac{k}{2^n}$ para cualquier $a \in A$ y para todo $k \in \mathbf{Z}$. Es decir, $k \leq -2^n a_n$, para todo $k \in \mathbf{N}$, lo cual no puede ocurrir porque $\mathbf{K}$ es arquimediano. Tiene que haber en A_n un elemento, digamos a_n, que es el mayor. En efecto, si para cada $k \in A_n$ existiera $l > k$ perteneciente a A_n, podríamos construir una sucesión $\{l_s\}_{s\geq 1}$ estrictamente creciente, comenzando con $l_1 = l$, que está acotada superiormente por $2^n b$, para cualquier $b \in B$. Pero esta sucesión no puede converger porque $l_s \geq l_r + 1$, si $s > r$. Igualmente, $B_n = \left\{k \in \mathbf{Z} : \frac{k}{2^n} \in B\right\}$ no es vacío, pues si $\frac{k}{2^n} \in A$ para todo $k \in \mathbf{Z}$, $\frac{k}{2^n} \leq b$ para cualquier $b \in B$ y para todo $k \in \mathbf{Z}$. Es decir, $k \leq 2^n b$, para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual no puede ocurrir porque $\mathbf{K}$ es arquimediano. Tiene que haber en B_n un elemento, digamos b_n, que es el menor. En efecto, si para cada $k \in B_n$ existiera $l < k$ perteneciente a B_n, podríamos construir una sucesión $\{l_s\}_{s\geq 1}$ estrictamente decreciente, comenzando con $l_1 = l$, que está acotada inferiormente por

$2^n a$, para cualquier $a \in A$. Pero esta sucesión no puede converger porque $l_s \leq l_r + 1$, si $s > r$. Así obtenemos dos sucesiones, $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}_{n\geq 1} \subset A$ creciente y acotada superiormente y $\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}_{n\geq 1} \subset B$ decreciente y acotada inferiormente. Ambas sucesiones tienen límite. Digamos que $\frac{a_n}{2^n} \to a$ y $\frac{b_n}{2^n} \to b$, cuando $n \to \infty$. Además,

$$\frac{a_n}{2^n} \leq \frac{b_m}{2^m}, \tag{17}$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Fijado n, podemos concluir que $\frac{a_n}{2^n} \leq b$, para todo n. Si esto no fuera cierto, existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < \frac{a_n}{2^n}$, o sea existiría $\frac{b_m}{2^m}$ tal que $b \leq \frac{b_m}{2^m} < \frac{a_n}{2^n}$, lo cual contradice (17). Es decir, $\frac{a_n}{2^n} \leq b$, para todo n, de donde $a \leq b$. Tenemos entonces las desigualdades,

$$\frac{a_n}{2^n} \leq a \leq b \leq \frac{b_m}{2^m},$$

para todo n, m. Puesto que $\mathbf{K}$ es arquimediano, si $a < b$ existe, de acuerdo con 4) en la proposición 7, $\frac{k}{2^n} \in \mathbf{Q}$ tal que

$$a < \frac{k}{2^n} < b.$$

Si $\frac{k}{2^n} \in A$, entonces $\frac{a_n}{2^n} \leq a < \frac{k}{2^n}$, lo cual no es posible. De la misma manera, si $\frac{k}{2^n} \in B$, $\frac{k}{2^n} < b \leq \frac{b_n}{2^n}$, lo cual tampoco es posible. Es decir, $a = b$. Afirmamos que este valor común, que llamaremos c, es el punto de corte para (A, B). Para ello tenemos que probar que si $x < c$ entonces $x \in A$ y que si $c < y$ entonces $y \in B$. En efecto, supongamos que existe x en B e y en A tal que $x < c < y$. Esto contradice 1) en la definición 14. Por lo tanto, c es un punto de corte para (A, B).

Probemos 5). Sea $\{I_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión de intervalos encajados, $I_j = [a_j, b_j]$. Entonces, los puntos extremos izquierdos forman una sucesión $\{a_j\}_{j\geq 1}$ que es creciente y acotada superiormente por b_1. Es decir, existe $\lim_{j\to\infty} a_j = \sup\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$, digamos, igual a a. De la misma manera, los puntos extremos derechos forman una sucesión $\{b_j\}_{j\geq 1}$ que es decreciente y acotada inferiormente por a_1. Entonces, existe $\lim_{j\to\infty} b_j = \inf\{b_j : j \in \mathbb{N}\}$, digamos igual a b. Puesto que $a_j \leq b_j$ para todo $j \geq 1$, debe de ser $a \leq b$. En efecto, si $b < a$, con $\mathbf{K}$ es arquimediano, existe $r \in \mathbf{Q}$ tal que $b < r < a$. Por lo tanto existen j_0, k_0 tal que

$$b \leq b_j < r < a_k \leq a,$$

para todo $j \geq j_0, k \geq k_0$. En particular, debe de existir $j \geq \max\{j_0, k_0\}$ tal que $b_j < a_j$, lo cual no es posible. Es decir,

$$a_j \leq a \leq b \leq b_j,$$

para todo $j \geq 1$, lo cual significa que $[a, b] \subseteq \bigcap_{j\geq 1} I_j$.

Finalmente, probemos 6). Sea S un subconjunto de $\mathbf{K}$, que no es vacío y está acotado superiormente y sea $C \in \mathbf{K}$ una cota superior de S. Si C pertenece a S, entonces C es el supremo de S. Si $C \notin S$, existe $s \in S$ tal que $s < C$. Tomemos $a_1 = s$, $b_1 = C$ y denotemos $I_1 = [a_1, b_1]$. Sea $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Si x_1 es una cota superior para S, elegimos $a_2 = a_1$ y $b_2 = x_1$. Si no lo es, elegimos $a_2 \in (x_1, C] \bigcap S$ y $b_2 = C$.

Denotamos $I_2 = [a_2, b_2]$. Suponiendo que hemos seleccionado $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de esta manera, definimos $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Si x_n es una cota superior de S, tomamos $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = x_n$ Si no lo es, tomamos $a_{n+1} \in (x_n, b_n] \bigcap S$ y $b_{n+1} = b_n$. En ambos casos, definimos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$, y así siguiendo. Obtenemos una sucesión $\{I_j\}_{j\geq 1}$ de intervalos cerrados encajados. Además, para $n \geq 2$, es

$$\begin{aligned} b_n - a_n &\leq \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \\ &\leq \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} \leq \cdots \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0, \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, por ser **K** arquimediano.

Es decir, no sólo es la intersección de los intervalos I_n no vacía, sino que se reduce a un punto, digamos x. Probaremos que x es el supremo de S. En efecto, x es una cota superior, pues si no lo fuera, existiría $s \in S$ tal que $x < s$. Si este es el caso, afirmamos que

$$a_n \leq x < s \leq b_n, \tag{18}$$

para todo $n \geq 1$. Si no es así, debería de existir $n \geq 1$ tal que $a_n \leq x \leq b_n < s$, lo cual no puede ser porque los extremos derechos de los intervalos son siempre cotas superiores para S. Es decir, (18) se cumple. Pero entonces,

$$b_n - a_n \geq s - x > 0.$$

Siendo **K** arquimediano, si tomamos el límite para $n \to \infty$, como en la prueba de 4) y de 5), la desigualdad se conserva en el límite. Es decir,

$$0 \geq s - x > 0,$$

lo cual no es posible.

Entonces, x es una cota superior de S. Además, es la menor, pues si no lo fuera, existiría una cota C cumpliendo $C < x \leq b_n$, para todo $n \geq 1$. Como $b_n - a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, debe de existir n_0 tal que

$$C < a_n \leq x \leq b_n,$$

para todo $n \geq n_0$. Pero esto no es posible, porque los extremos izquierdos de los intervalos, por construcción, están siempre en S. Es decir, x es el supremo de S.

Esto completa la prueba de la proposición. □

De acuerdo con la definición 15 y como consecuencia de la proposición 13, obtenemos de inmediato el siguiente corolario:

Corolario 2. En un cuerpo **K** ordenado y arquimediano, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. **K** es completo.

2. Todo intervalo en $\mathbf{K}$ es conexo.
3. $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de las sucesiones monótonas y acotadas.
4. $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de los intervalos encajados.

Definición 21. Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbf{K}$ es de Cauchy, si para cada $\varepsilon \in \mathbf{K}$ positivo, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

para $n \geq N$ y para todo $p \in \mathbb{N}$.

Definición 22. Diremos que un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Cauchy, o secuencialmente completo, si toda sucesión de Cauchy en $\mathbf{K}$, converge en $\mathbf{K}$.

Proposición 14. En un cuerpo $\mathbf{K}$ ordenado y arquimediano, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind.
2. $\mathbf{K}$ es secuencialmente completo.

Demostración. La prueba de 1) $\Rightarrow$ 2), sigue los mismos pasos que en el caso real: Primero se prueba que toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es acotada, es decir, que existe $C \in \mathbf{K}$ positivo, tal que $|x_n| \leq C$ para todo $n \geq 1$. El siguiente paso es el probar que $\mathbf{K}$ satisface la llamada propiedad de Bolzano-Weierstrass, es decir, toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. Finalmente, se prueba que si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente, la sucesión converge y al mismo límite. Omitiremos los detalles, que son sencillos y están muy bien explicados, por ejemplo, en ([5], pág. 34, sección 7 del capítulo 1).

En cuanto a la prueba de 2) $\Rightarrow$ 1), aparece, con todo detalle, en ([5], pág. 35, teorema 1.27). De esta demostración, el mismo Clark dice que es “rather unexpectedly complicated”. Para no alargar mucho más nuestra exposición, no la repetiremos aquí.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Como acabamos de ver, el principio de Arquímedes juega un papel fundamental en las proposiciones 13 y 14. En efecto, es ese principio lo que nos permite asegurar que la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ converge a cero, un hecho que parece trivial y obvio en el cuerpo $\mathbb{R}$, pero que es fundamental en el desarrollo del Análisis Real.

Hay ejemplos de cuerpos que son secuencialmente completos, aunque no son arquimedianos. Uno de ellos es el cuerpo de las series de Laurent formales, definido en 4) de los ejemplos 4. La prueba, que puede verse en ([5], pág. 36, sección 8 del capítulo 1), se basa en las siguientes observaciones:

En $\mathbb{R}((X))$, la sucesión $\left\{\frac{1}{X^n}\right\}_{n\geq 1}$ no está acotada. En efecto, dada $f \in \mathbb{R}((X))$ existe $n \geq 1$ tal que $-n < v(f)$, donde $v(f)$ fue definido en 4) de los ejemplos 4. Por lo tanto $\frac{1}{X^n} > f$.

Similarmente, la sucesión $\{X^n\}_{n\geq 1}$, converge a cero, pues dado $f \in \mathbb{R}((X))$ positivo, existe $N \geq 1$ tal que $v(f - X^n) = v(f)$ para todo $n \geq N$ y $a_{v(f)} > 0$. Es decir,

$$0 < X^n < f,$$

para todo $n \geq N$.

Cualquier espacio normado, en particular $\mathbb{R}$, es secuencialmente completo si y sólo si toda serie que converge absolutamente, converge. Esto mismo es cierto en un cuerpo ordenado (ver [6], teorema 9). En [20], se estudia la relación entre la propiedad de completitud secuencial, la propiedad de Arquímedes y varios criterios de convergencia de series.

En la siguiente proposición, $\{u, v\}$ indicará el espacio de dos puntos con la topología discreta, que puede pensarse asociada al valor absoluto trivial definido en 2) de los ejemplos 2. Por claridad, indicaremos $|\cdot|_d$ este valor absoluto.

Una función f definida en un subconjunto S de $\mathbf{K}$ con valores en $\{u, v\}$ es continua en S, si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) \in \mathbf{K}$ positivo, tal que

$$|x - x_0| < \delta \text{ y } x \in S, \text{ implica } |f(x) - f(x_0)|_d < \varepsilon.$$

Con la misma demostración que en el caso real (ver, por ejemplo, [28], pág. 45, proposición 18), se prueba que f es continua si y sólo si la imagen inversa de $\{u\}$, $\{v\}$ y $\{u, v\}$, los subconjuntos no vacíos abiertos en $\{u, v\}$, son abiertos en S.

Proposición 15. Dado un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ y dado un subconjunto S de $\mathbf{K}$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. S es conexo.
2. Toda función $f : S \to \{u, v\}$ continua, es constante.

Demostración. Para probar 1) ⇒ 2), suponemos que existe $f : S \to \{u, v\}$ continua que no es constante y definimos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in S : f(x) = u\}, \\ B &= \{x \in S : f(x) = v\}. \end{aligned}$$

Estos conjuntos son no vacíos, tienen intersección vacía y su unión es S. Además son abiertos en S, porque los conjuntos $\{u\}$ y $\{v\}$ son abiertos en $\{u, v\}$, $A = f^{-1}(\{u\})$, $B = f^{-1}(\{v\})$ y la función f es continua. O sea que S no es conexo.

Recíprocamente, si S no es conexo, existen subconjuntos de S no vacíos, abiertos y disjuntos, A y B, tales que $S = A \bigcup B$. Entonces, podemos definir una función $f : S \to \{u, v\}$ como

$$f(x) = \begin{cases} u & \text{si } x \in A, \\ v & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

La función f no es constante. La imagen inversa de los subconjuntos abiertos no vacíos de $\{u, v\}$, son los subconjuntos A, B y S, que son abiertos en S. Es decir, f es continua.

Esto completa la prueba de la proposición. □

Definición 23. Un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ satisface la propiedad de Rolle si para cada función $f : [a, b] \to \mathbf{K}$, continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), con $f(a) = f(b) = 0$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Definición 24. Un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ satisface la propiedad del valor medio si para cada función $f : [a, b] \to \mathbf{K}$, continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{19}$$

Definición 25. Un cuerpo ordenado $\mathbf{K}$ satisface la propiedad del valor intermedio si para cada función $f : [a, b] \to \mathbf{K}$, continua en $[a, b]$ con $f(a) \neq f(b)$, y para cada y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = y$.

Lemma 3. *En un cuerpo ordenado* $\mathbf{K}$*, la propiedad de Rolle y la propiedad del valor medio son equivalentes.*

Demostración. La demostración en el caso real se aplica paso por paso (ver, por ejemplo, [14], pág. 121, teorema 4.8) y la omitiremos. ☐

Proposición 16. Sea $\mathbf{K}$ un cuerpo ordenado.

1. $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind si y sólo si $\mathbf{K}$ satisface la propiedad del valor medio.
2. $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind si y sólo si $\mathbf{K}$ satisface la propiedad del valor intermedio.

Demostración. Para probar 1), comenzamos fijando un subconjunto S de $\mathbf{K}$ no vacío y acotado superiormente. Definimos $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es una cota superior de } S, \\ 0 & \text{si no lo es.} \end{cases} \tag{20}$$

Afirmamos que si S no tiene supremo, cada $x \in \mathbf{K}$ pertenece a un intervalo abierto donde f es constante. En efecto, si x es una cota superior de S, como no es el supremo, existe otra cota superior y menor que x. Por lo tanto, podemos tomar el intervalo $(y, x + 1)$. Si x no es una cota superior de S, debe de existir $y \in S$ tal que $x < y$. En este caso podemos tomar el intervalo $(x - 1, y)$.

Todo esto implica que f es diferenciable en $\mathbf{K}$, y por lo tanto continua, con derivada igual a cero en todo punto. Es decir, dados a, b en $\mathbf{K}$ tal que $f(a) = 1$ y $f(b) = 0$, (19) no puede satisfacerse para ningún $c \in \mathbf{K}$.

Cuando $\mathbf{K}$ es el cuerpo $\mathbb{R}$, el punto clave en la prueba de la propiedad de Rolle es poder asegurar que la función alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo $[a, b]$ (ver, por ejemplo, [14], pág. 120, teorema 4.7) Esto se hace usando un argumento de compacidad. Este razonamiento puede seguirse paso a paso en un cuerpo $\mathbf{K}$ que es ordenado y completo en el sentido de Dedekind.

Para probar 2), comenzamos como en la prueba de 1), fijando S, subconjunto de $\mathbf{K}$ no vacío y acotado superiormente. Si suponemos que S no tiene supremo, podemos definir la función (20), que es continua. Sin embargo, dados a, b en $\mathbf{K}$ con $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ y dado $0 < y < 1$, no existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$. Es decir, hemos probado que si $\mathbf{K}$ satisface la propiedad del valor intermedio, entonces $\mathbf{K}$ es completo en el sentido de Dedekind.

Recíprocamente, fijemos una función $f : [a, b] \to \mathbf{K}$ continua, supongamos que $f(a) < f(b)$ y fijemos y tal que $f(a) < y < f(b)$. La función $g(x) = f(x) - y$ cumple que $g(a) < 0$. Consideramos

$$S = \{s \in [a, b] : g(s) < 0\}.$$

El conjunto S no es vacío y está acotado superiormente por b. Si c es el supremo de S en $\mathbf{K}$, entonces $c \in [a, b)$. Además, por la continuidad de g, $c \in (a, b)$. También por la continuidad de g, $g(c) \leq 0$. En efecto, por definición de supremo, para cada $n \geq 1$ suficientemente grande, existe $s_n \in S$ tal que $s_n > c - \frac{1}{n}$. Entonces $g\left(c - \frac{1}{n}\right) < 0$ para cada valor de n. Puesto que $c - \frac{1}{n} \to c$ para $n \to \infty$, tenemos que $g\left(c - \frac{1}{n}\right) \to g(c)$ para $n \to \infty$. Esta afirmación se prueba de la misma manera que en el caso real. Es decir, $g(c) \leq 0$. Si fuera $g(c) < 0$, por la continuidad de g, debería de existir $\delta > 0$ tal que $a < c - \delta < s < c + \delta < b$ implica $g(s) < 0$. En consecuencia, $g\left(c + \frac{\delta}{2}\right) < 0$, lo cual no es posible. En consecuencia, $g(c) = 0$ o $f(c) = y$.

Si $f(a) > f(b)$, fijado y tal que $f(b) < y < f(a)$, la función $g(x) = y - f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $g(a) < 0$. Entonces, por lo que acabamos de hacer, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, o $f(c) = y$.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

7. La completación de $\mathbb{Q}$ con respecto a un valor absoluto p-ádico

Ya hemos mencionado en la introducción, que $\mathbb{R}$ puede verse como la completación, en el sentido de Cauchy, del cuerpo $\mathbb{Q}$ con la topología del orden o, lo que es lo mismo, con la métrica definida por el valor absoluto usual,

$$(x, y) \to |x - y|.$$

Es natural el preguntarse qué pasa si usamos la misma construcción en $\mathbb{Q}$, con la noción de convergencia asociada a un valor absoluto p-ádico. El resultado (ver, por ejemplo, [35]), es un cuerpo completo en el sentido de Cauchy con respecto a la extensión, que seguiremos indicando $|\cdot|_p$, del valor absoluto p-ádico. Este cuerpo se denota $\mathbb{Q}_p$ y sus elementos se llaman números p-ádicos. Por ejemplo, los enteros p-ádicos distintos de cero, son exactamente los elementos x de $\mathbb{Q}_p$ con valuación p-ádica positiva.

En los párrafos que siguen, discutiremos varias propiedades fundamentales de $\mathbb{Q}_p$.

1. $\mathbb{Q}_p$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}$.

La prueba de esta afirmación (ver, por ejemplo, [35], corolario 1.31), se basa en la existencia en $\mathbb{Q}_p$ de "representaciones p-ádicas", formalmente similares a los desarrollos decimales de los números reales (ver, por ejemplo, [35], corolario 1.30; [1], pág. 25). El razonamiento sigue el mismo proceso de diagonalización que en el caso de $\mathbb{R}$.

Que $\mathbb{Q}_p$ no es numerable, muestra que al completar $\mathbb{Q}$ con respecto a un valor absoluto p-ádico, se agrega un número no numerable de elementos. Es decir que $\mathbb{Q}$, con un valor absoluto p-ádico, no es completo en el sentido de Cauchy.

2. $\mathbb{Q}_p$ no es isomorfo a $\mathbb{R}$.

   Para probarlo, observamos que $\sqrt[d]{p}$ no existe en $\mathbb{Q}_p$, para ningún entero positivo d. En efecto, si existiera, podríamos escribir

$$\frac{1}{p} = |p|_p = \left| \underbrace{\sqrt[d]{p} \ldots \sqrt[d]{p}}_{\text{d veces}} \right|_p = |\sqrt[d]{p}|_p^d ,$$

   de donde $\left|\sqrt[d]{p}\right|_p$ debería de ser igual a $\frac{1}{\sqrt[d]{p}}$, lo cual contradice lo dicho en la sección 3, sobre la imagen de la función $|\cdot|_p$ (ver (11)).

   En otras palabras, el polinomio $X^d - p$ es irreducible en $\mathbb{Q}_p[X]$, lo cual muestra que $\mathbb{Q}_p$ no es algebraicamente cerrado. En [35] se discute qué pasa cuando se construye la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$.

3. Si $p \neq q$, $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{Q}_q$ no son isomorfos.

   La prueba de esta afirmación requiere más preparación (ver, por ejemplo, [35], teorema 1.35) y la omitiremos.

4. $\mathbb{Q}_p$ no es ordenable.

   Desde el punto de vista de nuestra presentación, ésta es la propiedad clave que distingue a los cuerpos ordenados de los cuerpos p-ádicos.

   Para probar que $\mathbb{Q}_p$ no es ordenable, de acuerdo con la proposición 2, es suficiente el probar que el cuerpo $\mathbb{Q}_p$ no es formalmente real. Es decir, que es posible escribir cero como una suma finita de cuadrados diferentes de cero. En efecto, afirmamos que $\sqrt{-7}$ existe en $\mathbb{Q}_2$, por lo cual podemos escribir, en $\mathbb{Q}_2$

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + \left(\sqrt{-7}\right)^2 = 0.$$

   En cuanto a $\mathbb{Q}_p$ con $p > 2$, afirmamos que $\sqrt{1-p}$ existe en $\mathbb{Q}_p$, de donde obtenemos

$$\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{\text{p-1 veces}} + \left(\sqrt{1-p}\right)^2 = 0.$$

   La prueba de que en $\mathbb{Q}_2$ existe $\sqrt{-7}$ y de que en $\mathbb{Q}_p$, para $p > 2$, existe $\sqrt{1-p}$, usa un resultado en aritmética modular llamado lema de Hensel, debido al matemático Kurt Hensel, combinado con manipulaciones típicas en la teoría de las formas cuadráticas (ver, por ejemplo, [1]; [25], págs. 144-145). No diremos más sobre esta prueba.

La existencia en $\mathbb{Q}_p$ de raíces cuadradas de números negativos, muestra un efecto de la completación secuencial de $\mathbb{Q}$ con respecto a $|\cdot|_p$.

Una primera idea de los números p-ádicos aparece bosquejada en la obra del matemático Ernst Kummer, quien provó el “último teorema de Fermat” para una clase considerablemente grande de exponentes primos, con métodos que se asemejan a aquéllos usados en la teoría de los números p-ádicos. El estudio formal y exhaustivo de los números p-ádicos se debe al matemático Kurt Hensel, quien los definió en 1898, publicando sus resultados en dos libros, aparecidos en 1908 y 1913, respectivamente [21]. En ([22], pág. 57, capítulo 5), hay una excelente explicación de los motivos que Hensel tuvo para considerar estos números p-ádicos.

8. La noción de convergencia en un cuerpo con un valor absoluto que no es arquimediano

En cualquier cuerpo con un valor absoluto A, las definiciones de sucesión de Cauchy, sucesión convergente y serie convergente, con respecto a A, son las mismas que en el caso real. Sin embargo, cuando el valor absoluto satisface la desigualdad ultramétrica (3), hay consecuencias de las definiciones que, como veremos enseguida, son sorprendentes y a veces muy agradables.

En lo que sigue, consideraremos un cuerpo $\mathbf{K}$ secuencialmente completo, con respecto a un valor absoluto A que no es arquimediano. De acuerdo a lo dicho en la sección anterior, $\mathbb{Q}_p$ es un ejemplo.

Proposición 17. Sea $\{x_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión en $\mathbf{K}$. Entonces, la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge si y sólo si $\lim_{j\to\infty} x_j = 0$.

Demostración. Si la serie converge, entonces las sumas parciales $\sum_{1\leq j\leq n} x_j$ y $\sum_{1\leq j\leq n-1} x_j$ deben de converger al mismo límite. Es decir,

$$x_n = \sum_{1\leq j\leq n} x_j - \sum_{1\leq j\leq n-1} x_j \to 0.$$

Recíprocamente, dados $n, l \geq 1$,

$$\begin{aligned} & A\left(\sum_{1\leq j\leq n+l} x_j - \sum_{1\leq j\leq n} x_j\right) \\ = \; & A\left(\sum_{n+1\leq j\leq n+l} x_j\right) \leq \max\{A(x_{n+1}), \ldots, A(x_{n+l})\}. \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, existe $N \geq 1$ tal que $A(x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto implica que las sumas parciales de la serie forman una sucesión de Cauchy. Como estamos suponiendo que $\mathbf{K}$ es secuencialmente completo con respecto a A, resulta que la serie converge.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Corolario 3. Si $\{x_j\}_{\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbf{K}$, la sucesión converge si y sólo si

$$\lim_{j\to\infty} A(x_{j-1}-x_j)=0. \tag{21}$$

Demostración. Consideremos la serie $\sum_{j\geq 1} y_j$, donde $y_1=x_1$ y $y_j=x_j-x_{j-1}$ para $j\geq 2$. Entonces,

$$\sum_{1\leq j\leq n} y_j = x_1+x_2-x_1+\cdots+x_n-x_{n-1}=x_n.$$

Usando la proposición 17, resulta que $\{y_j\}_{j\geq 1}$ converge a cero, si y sólo si $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge.

Esto completa la prueba del corolario. $\square$

Observemos que este corolario nos da de inmediato una caracterización muy simple de las sucesiones de Cauchy, en un cuerpo secuencialmente completo con respecto a un valor absoluto que no es arquimediano. En efecto,

Corolario 4. Si $\{x_j\}_{\geq 1}$ es una sucesión en $\mathbf{K}$, la sucesión es de Cauchy si y sólo si

$$\lim_{j\to\infty} A(x_{j-1}-x_j)=0.$$

Otra consecuencia de la proposición 17, es el siguiente corolario:

Corolario 5. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge absolutamente, es decir, $\sum_{j\geq 1} A(x_j)$ converge, entonces la serie converge.

Demostración. Si la serie de términos reales $\sum_{j\geq 1} A(x_j)$ converge, el término general $A(x_j)$ debe de converger a cero, lo cual implica, por la proposición 17, que la serie dada converge.

Esto completa la prueba del corolario. $\square$

Proposición 18. Toda serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ en $\mathbf{K}$ convergente, es incondicionalmente convergente. Es decir, dada cualquier biyección $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, la serie $\sum_{j\geq 1} x_{\varphi(j)}$ también converge y al mismo límite.

Demostración. En el caso real, (ver, por ejemplo, [29], pág. 78, teorema 3.55), se supone que la serie converge absolutamente. La desigualdad ultramétrica permite obtener el resultado en nuestro caso, usando solamente la convergencia de la serie.

Bastará probar que $\sum_{1\leq j\leq n} x_j - \sum_{1\leq j\leq n} x_{\varphi(j)}$ converge a cero.

De acuerdo con la proposición 17, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$ positivo, existe $N \geq 1$ tal que $A(x_j) < \varepsilon$ para todo $j \geq N$. Por otra parte, podemos elegir $N_1 > N \geq 1$, tal que el conjunto $\{\varphi(1), \ldots, \varphi(N_1)\}$ contiene todos los números j con $1 \leq j \leq N$. Para cada $n > N_1$, la diferencia $\sum_{1 \leq j \leq n} x_j - \sum_{1 \leq j \leq n} x_{\varphi(j)}$ sólo contiene términos x_j con $j > N$ y $x_{\varphi(j)}$ con $\varphi(j) > N$. Entonces, como A satisface la desigualdad ultramétrica, el valor de A en todos esos términos tiene que ser menor que ε.

Esto completa la prueba de la proposición. □

Veamos algunas consecuencias sencillas de estos resultados, cuando $\mathbf{K}$ es el cuerpo $\mathbb{Q}_p$, para un primo p fijo.

Ejemplo 7.

1. Comenzamos con la sucesión $\left\{\frac{1}{j}\right\}_{j \geq 1}$.
   El conjunto $\{q \in \mathbb{N} : q \text{ es primo}, q \neq p\}$, puede enumerarse como una subsucesión $\left\{\frac{1}{j_n}\right\}_{n \geq 1}$, para la cual $\left|\frac{1}{j_n}\right|_p = 1$ para todo n. Por otra parte, para la subsucesión $\left\{\frac{1}{p^n}\right\}_{n \geq 1}$ tenemos $\left|\frac{1}{p^n}\right|_p = p^n$. Es decir que la sucesión $\left\{\frac{1}{j}\right\}_{j \geq 1}$ no tiene límite en $\mathbf{K}$. Lo mismo ocurre con la sucesión $\left\{\frac{(-1)^j}{j}\right\}_{j \geq 1}$. O sea que las series $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j}$ y $\sum_{j \geq 1} \frac{(-1)}{j}$ no convergen en $\mathbb{Q}_p$.
2. La serie geométrica $\sum_{j \geq 0} p^j$ converge a $\frac{1}{1-p}$ en $\mathbb{Q}_p$.
   En efecto,
   $$\left|p^{j+1} + \cdots p^{j+l}\right|_p = \left|p^{j+1}\left(1 + \cdots + p^{l-1}\right)\right|_p = \left|p^{j+1}\right|_p = \frac{1}{p^{j+1}}.$$
   Esto muestra que las sumas parciales de la serie, forman una sucesión de Cauchy, en $|\mathbb{Q}|_p$. Además,
   $$\left|\sum\nolimits_{0 \leq j \leq n} p^j - \frac{1}{1-p}\right|_p = \left|\frac{p^n}{1-p}\right|_p = |p^n|_p = \frac{1}{p^n} \to 0,$$
   para $n \to \infty$.
   Observemos que como $\frac{1}{1-p} \in \mathbb{Q}$, la serie converge en $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto $|\cdot|_p$.
3. Consideremos la serie geométrica $\sum_{j \geq 0} p^j$ en $\mathbb{Q}_r$ para un primo r distinto de p.
   Puesto que $\left|p^j\right|_r = 1$ para todo $j \geq 1$, por la proposición 17 concluímos que la serie no converge en $\mathbb{Q}_r$.
4. La serie $\sum_{j \geq 0} j^n p^j$ converge en $\mathbb{Q}_p$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
   En efecto, sólo basta observar que $\left|j^n p^j\right|_p = |j^n|_p \left|p^j\right|_p \leq \frac{1}{p^j}$.

En el cuerpo $\mathbb{Q}_p$, el recíproco del corolario 5 es cierto. Esto es una consecuencia de (11). En efecto,

Proposición 19. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ en $\mathbb{Q}_p$ converge, entonces la serie $\sum_{j\geq 1} |x_j|_p$ converge.

Demostración. Si la serie $\sum_{j\geq 1} x_j$ converge, entonces $x_j \to 0$ para $j \to \infty$, o equivalentemente, $|x_j|_p \to 0$ para $j \to \infty$.

Entonces, de acuerdo con (11), para cada j suficientemente grande, $|x_j|_p = \frac{1}{p^{m_j}}$, con $m_j \to \infty$ con j. O sea, la serie real $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{p^{m_j}}$ converge.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Que la métrica asociada a $|\cdot|_p$ es ultramétrica, tiene consecuencias curiosas. Por ejemplo, en $\mathbb{Q}_p$, todos los "triángulos" son isósceles, siendo los lados iguales los de mayor longitud. En realidad, este es el caso de todo valor absoluto que no es arquimediano.

Dados $x_0 \in \mathbb{Q}_p$ y $r \in \mathbb{R}$ positivo, definimos la bola abierta $B(x_0, r)$ de centro x_0 y radio r, de la manera usual en cualquier espacio métrico:

$$B(x_0, r) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p < r \right\}.$$

El siguiente resultado, es otra consecuencia de la desigualdad ultramétrica.

Proposición 20. Si $y_0 \in B(x_0, r)$, entonces

$$B(x_0, r) = B(y_0, r).$$

Demostración. Si $x \in B(x_0, r)$,

$$|x - y_0|_p = |(x - x_0) + (x_0 - y_0)|_p \leq r.$$

Es decir, $B(x_0, r) \subseteq B(y_0, r)$. La contención opuesta se prueba de la misma manera.

Esto completa la prueba de la proposición. $\square$

Teniendo en cuenta (11), es natural el seleccionar como base de la topología de $\mathbb{Q}_p$, la familia de bolas

$$\left\{ B\left(x_0, p^{-m}\right) : x_0 \in \mathbb{Q}_p, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esta topología es Hausdorff. En efecto, dados $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}_p$, si fijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| > p^{-m}$, las bolas $B(x_0, p^{-m})$ y $B(y_0, p^{-m})$, resultan disjuntas.

Como consecuencia de la proposición 20, toda bola abierta $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

Enunciamos dos resultados, sin demostración:

Proposición 21. (ver la prueba en ([13], pág. 11, teorema 4.1)) La bola $B(x_0, p^{-m})$ es compacta, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Proposición 22. (ver la prueba en ([13], pág. 12, corolario 4.2)) Si $S \subseteq \mathbb{Q}_p$ es un subconjunto abierto no vacío, entonces S no es conexo.

Para concluir, mencionamos [31] y [27], como posibles referencias para estudiar a fondo el "Análisis Real" en $\mathbb{Q}_p$ y sus aplicaciones.

Referencias

[1] A. Baker, *An introduction to p-adic Numbers and p-adic analysis*, December 2017, www.maths.gla.ac.uk/~ajb/dvi-ps/padicnotes.pdf.

[2] Brilliant, *The well-ordering principle*, http://brilliant.org/wiki/the-well-ordering-principle.

[3] A. Browder, *Mathematical Analysis*, Springer-Verlag 1996.

[4] P. L. Clark, *Introduction to the real spectrum*, math.uga.edu/~pete realspectrum.pdf.

[5] P. L. Clark, *Sequences and series: a source book*, 2012, math.uga.edu/~pete/3100supp.pdf.

[6] P. L. Clark y N. J. Diepeveen, Absolute convergence in ordered fields, *The Amer. Math. Monthly*, Vol. 121 No. 10 (diciembre 2014) 909-916, http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.121.10.909.

[7] E. W. Cohen y G. Ehrlich, *The structure of the real number system*, Van Nostrand 1963.

[8] K. Conrad, *Ostrowski's theorem for $\mathbb{Q}$*, www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/gradnumthy/ ostrowskiQ.pdf.

[9] R. Dedekind, *Continuity and irrational numbers: essays on the theory of numbers, Section IV*, Dover 1963, www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-05b/dedekind-book.pdf#page=15.

[10] J. D. DePree y Ch. W. Swartz, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley 1988.

[11] M. Deveau y H. Teismann, 72 + 42 : Characterizations of the completeness and archimedean properties of ordered fields, *Real Analysis Exchange* Vol. 39 (2) (2013/2014) 261-304.

[12] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press 1960.

[13] J.-H. Evertse, *P-adic numbers*, marzo, 2011, www.math.leidenuniv.nl/~evertse/dio2011-padic.pdf.

[14] E. D. Gaughan, *Introduction to Analysis, Fifth Edition*, Brooks/Cole 1998.

[15] E. Hewitt y K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer 1965.

[16] J. Horváth, *Introducción a la Topología General*, Monografía no. 9, Serie de Matemática, OEA 1969.

[17] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, Dover 2009.

[18] E. Landau, *Foundations of Analysis*, Chelsea 1957. Reimpreso, AMS Chelsea Publishing, 2001 y 2009.

[19] E. J. McShane y T. Botts, *Real Analysis*, Van Nostrand 1959.

[20] R. Kantrowitz y M. M. Neumann, Completeness of ordered fields and a trio of classical series tests, *Abstr. Appl. Anal.*, Vol. 2016, artículo 6023273, 6 páginas, http://www.hindawi.com/journals/aaa/2016/6023273.

[21] J. J. O'Connor y E. F. Robertson, *The MacTutor History Of Mathematics*, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk.

[22] F. Oggier, *Introduction to Algebraic Number Theory*, 2009-2010, www1.spms.ntu.edu.sg/~frederique/ANT10.pdf.

[23] J. Propp, Analysis In Reverse, *The Amer. Math. Monthly*, Vol. 120 No. 5 (mayo 2013) 392-408. http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.120.05.392.

[24] M. Reed, *Fundamental Ideas of Analysis*, John Wiley 1998.

[25] P. Ribenboim, *The Theory of Classical Valuations*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag 1999.

[26] O. Riemenschneider, 37 elementare axiomatischen Charakterisierungen des reellen Zahlkörpers, *Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft*, Vol. 20, Hamburg (2001) 71-95, www.math.uni-hamburg.de/home/riemenschneider/axiommit.pdf.

[27] A. M. Robert, *A course in p*-Adic Analysis, Springer 2000.

[28] H. L. Royden, *Real Analysis, Second Edition*, Macmillan 1968.

[29] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis, Third Edition*, McGraw-Hill 1976.

[30] B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, George Allen y Unwin 1919. Reimpreso, J. G. Salter (introducción), Routledge 1993.

[31] W. Schikhof, *Ultrametric Calculus*, Cambridge University Press 1984.

[32] *Mathematics Stack Exchange*, Why is the construction of the real numbers important?, http://math.stackexchange.com/questions/1216125/why-is-the-construction-of-the-real-numbers-important.

[33] *Mathematics Stack Exchange*, What is a real world metaphor for irrational numbers?, http://math.stackexchange.com/questions/2065998/what-is-a-real-world-metaphor-for-irrational-numbers.

[34] R. S. Strichartz, *The Way of Analysis*, Jones and Bartlett 1995.

[35] A. Sutherland, *Mathematics Lecture Series, IAP 2015, Lecture 1, P-adic numbers*, math.mit.edu/classes/18.095/2015IAP/lecture1/padic.pdf.

[36] H. Teismann, Toward a more complete list of completeness axioms, *The Amer. Math. Monthly* Vol. 120 No. 2 (Febrero 2013) 99-114. http://www.jstor.org/stable/10.4169/amer.math.monthly.120.02.099.

[37] B. L. van der Waerden, *Algebra, Volume I (Basado, en parte, en Exposiciones de E. Artin y E. Noether)*. Traducido del alemán por F. Blum y J. R. Schulenberger, Springer 1991.

[38] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, American Edition, Cambridge University Press 1945.

[39] Wikipedia, *Construction of the real numbers*, http://en.wikipedia.org/wiki/Construction_of_the_real_numbers.

Recibido en mayo de 2018. Aceptado para publicación en abril de 2019.

JOSEFINA ALVAREZ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
NEW MEXICO STATE UNIVERSITY
LAS CRUCES, NEW MEXICO 88003, EEUU
e-mail: jalvarez@nmsu.edu