Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 14, No 1, p. 1–8, enero–junio de 1996

Conexiones de Galois*

CARLOS H. LEZAMA S.†

1. Introducción

Uno de los verbos más utilizados en matemáticas es *comparar*. Dicho de otro modo, una de las principales actividades matemáticas es la de comparar entes matemáticos. Definitivamente somos seres contradictorios. Decimos que las comparaciones son molestas, pero hemos dedicado buena parte de nuestra vida a hacer comparaciones.

Si los entes matemáticos hablaran, posiblemente nos criticarían por el hecho de compararlos según sus "cualidades" conjuntistas, algebraicas, analíticas o topológicas. Una definición matemática se hace para escoger de una clase dada de objetos algunos que por el hecho de poseer ciertas cualidades tienen un nombre (y un trato) especial. Es claro entonces que las mismas definiciones involucran comparaciones.

Ahora bien, ¿cómo comparamos dos objetos dados? Eso dependerá de la categoría a la cual pertenezcan los objetos. Citemos un ejemplo. Cuando nos proponemos comparar los objetos $\mathbb{Z}$ (números enteros) y $\mathbb{Q}$ (números racionales) es necesario saber si en el momento de la comparación $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son simplemente conjuntos o son conjuntos con cierta estructura (algebraica o topológica, por ejemplo). Más precisamente, podemos comparar $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ como conjuntos, como conjuntos ordenados, como grupos, como anillos o como espacios

*El presente artículo corresponde a un cursillo dictado por el autor en la 5ª *Semana de Licenciatura en Matemáticas*, abril 3–7 de 1995, en la UIS. El artículo forma parte del Proyecto de Investigación *Problemas de caracterización en constructos*, inscrito en el DIF de la Facultad de Ciencias de la UIS.

†El autor era Profesor asistente de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Pereció trágicamente unas semanas después de entregar a la revista el presente artículo.

topológicos. Aparecen entonces los conceptos de función, homomorfismo, isomorfismo, función continua y homeomorfismo. Es claro entonces que las funciones matemáticas, como las definiciones, involucran comparaciones. El simbolismo de "puntos" y "flechas" es precisamente la generalización categórica del concepto de función y, en el orden de ideas expuesto, también involucra comparación.

Es este artículo continuaremos siendo contradictorios: seguieremos comparando objetos matemáticos, ahora a través de las llamadas conexiones de Galois. El tan conocido simbolo $A \to B$ le dará paso al símbolo $A \rightleftarrows B$, lo cual podría sugerir una comparación "menos molesta" para B (ó para A):

2. Preliminares

Se incluyen algunas definiciones básicas que serán utilizadas.

2.1. Un par $(X, \preceq)$ es una clase preordenada si X es una clase no vacía y $\preceq$ es una relación reflexiva y transitiva en X.

2.2. Una categoría es una cuádrupla $\mathbf{C} = (o, \mathrm{mor}, id, \circ)$ tal que

1. o es una clase cuyos miembros son llamados C–objetos.
2. Para cada par (A, B) de C–objetos existe un conjunto $\mathrm{mor}(A, B)$ cuyos miembros son llamados C–morfismos de A en B. (La afirmación $f \in \mathrm{mor}(A, B)$ se puede expresar por $f : A \to B$ o por $A \xrightarrow{f} B$).
3. Para cada C–objeto A existe un morfismo $A \xrightarrow{id_A} B$, llamado C–identidad de A.
4. "$\circ$" es una ley de composición que asocia a cada par de C–morfismos $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ un C–morfismo $A \xrightarrow{g \circ f} C$, llamado el compuesto de f y g,

sujeta a las siguientes condiciones:

(a) La composición es asociativa, es decir, para morfismos $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$ se tiene la igualdad $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(b) Las C–identidades actúan como identidades con respecto a la composición; es decir, para cada C–morfismo $A \xrightarrow{f} B$ se tiene que $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$.

(c) Los conjuntos $\operatorname{mor}(A,B)$ son disyuntos por pares.

Cuando o y $\operatorname{mor}(A,B)$ son conglomerados ("colecciones de clases"), **C** es una cuasicategoría.

2.3. La categoría opuesta o dual de **C** es la categoría $C^{op} = (o, \operatorname{mor}^{op}, id, \circ^{op})$, donde $\operatorname{mor}^{op}(A,B) = \operatorname{mor}(B,A)$ y $f \circ^{op} g = g \circ f$.

2.4. Una categoría **C** es una subcategoría de una categoría C' si:

1. $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathbf{C}')$;
2. Para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Ob}(C)$, $\operatorname{mor}_{\mathbf{C}}(A,B) \subseteq \operatorname{mor}_{\mathbf{C}'}(A,B)$;
3. Para cada **C**–objeto A, la **C**$'$–identidad de A es la **C**–identidad de A;
4. La ley de composición en **C** es la restricción de la ley de composición en **C**$'$ a morfismos de **C**.

Cuando en 2. se tiene la igualdad, **C** es una subcategoría plena de **C**$'$.

2.5. Si **C** y **C**$'$ son categorías, un functor F de **C** en **C**$'$ es una función que asigna a cada **C**–objeto A un **C**$'$–objeto $F(A)$ y a cada **C**–morfismo $A \xrightarrow{f} B$ un **C**$'$–morfismo $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ tal que

1. F preserva la composición, es decir, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, cuando $g \circ f$ está definido;
2. F preserva identidades, es decir, $F(id_A) = id_{F(A)}$, para cada **C**–objeto A.

2.6. Sea $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un functor. F es un functor fiel si cada restricción de $F : \operatorname{mor}(A,B) \to \operatorname{mor}(F(A), F(B))$ es inyectiva.

2.7. Sea **C** una categoría. Una categoría concreta sobre **C** es un par $(\mathcal{A}, U)$ donde $\mathcal{A}$ es una categoría y $U : \mathcal{A} \to C$ es un functor fiel. Una categoría concreta sobre conjuntos y funciones es llamada un constructo.

2.8. Si $(\mathcal{A}, U)$ y $(\mathcal{A}', V)$ son categorías concretas sobre C, un functor concreto de $(\mathcal{A}, U)$ en $(\mathcal{A}', V)$ es un functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ con $U = V \circ F$.

2.9. Sea $(\mathcal{A}, U)$ una categoría concreta sobre **C**. La fibra de un **C**–objeto **C** es la clase preordenada de todos los $\mathcal{A}$–objetos A con $U(A) = C$ ordenada por $A \preceq B$ si y sólo si $id_C : U(A) \to U(B)$ es un $\mathcal{A}$–morfismo.

2.10. Si F y G son functores concretos de $(\mathcal{A}, U)$ en $(\mathcal{A}', V)$, entonces F es más fino que G (G es más grueso que F), denotado por $F \preceq G$, dado que $F(A) \preceq G(A)$ para cada $\mathcal{A}$–objeto A.

2.11. Sea K una extensión del campo F. K es una extensión finita de F si $[K : F] = \dim_F(K) < \infty$.

2.12. Sea K un campo. Si G es un grupo de automorfismo de K, entonces el campo fijo de G es el conjunto de elementos de $a \in K$ tales que $\alpha(a) = a$ para todo $\alpha \in G$.

2.13. Sea K una extensión del campo F. El grupo de automorfismos de K relativos a F, denotado por $G(K/F)$, es el conjunto de todos los automofismos de K que dejan fijos todos los elementos de F.

2.14. Sea K un campo una extensión del campo F. Se dice que K es una extensión normal de F si F es campo fijo de $G(K/F)$.

3. Conexiones de Galois

En teoría de categorías, un functor es un ente matemático que puede verse como un "homomorfismo entre dos categorías" (algo que "compara dos categorías"). Los functores permiten transportar problemas de un área de la matemática a otra en las cual las soluciones se conocen.

Por ejemplo, la Topología Algebraica es el estudio de problemas topológicos por métodos algebraicos. Una corriente actual de investigación matemática está encauzada por la generalización en categorías de ciertas propiedades topológicas, tales como la conexidad y la compacidad.

En dicho campo de investigación juegan papel importante ciertas parejas de funciones entre clases preordenadas (que pueden verse como parejas de functores entre categorías) llamadas Conexiones de Galois. Aunque no profundizaremos en el estudio categórico de las conexiones de Galois, sí presentaremos cierto tipo de conexiones muy utilizadas para la investigación en Teoría de Categorías.

Definición 1. *Sean* $\underline{A} = (A, \preceq)$ *y* $\underline{B} = (B, \preceq)$ *dos clases preordendas. Una* conexión de Galois (Tipo I) $\underline{A} \xrightarrow{F} \underline{B}$ *es una pareja de funciones* $F = (F_*, F^*)$, $\underline{A} \underset{F^*}{\overset{F_*}{\rightleftarrows}} B$, *que satisface:*

1. $a \preceq a' \Rightarrow F_*(a) \subseteq F_*(a')$; $b \subseteq b' \Rightarrow F^*(b) \preceq F^*(b')$.
2. $F_* \vdash F^*$, *es decir,* $a \preceq F^*F_*(a)$ *y* $F_*F^*(b) \subseteq b$.

Cuando, además, $F^* \vdash F_*$, *la conexión es una* equivalencia de Galois.
Las clases $\underline{A}^F = \{a \in A \mid a \approx F^*F_*(a)\}$, $\underline{B}_F = \{b \in B \mid F_*F^*(b) \approx b\}$ *son las clases de* puntos fijos de Galois.

Ejemplo 1. *Sean* A, B *conjuntos,* $\underline{A} = (\mathcal{P}(A), \subseteq)$, $\underline{B} = (\mathcal{P}(B), \subseteq)$, $A \xrightarrow{f} B$ *una función,* $\underline{A} \overset{F}{\longrightarrow\!\bullet} \underline{B}$, $F_*(X) = f(X)$, $F^*(X) = f^{-1}(X)$.

Ejemplo 2. $R \subseteq X \times Y$, $\underline{A} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $\underline{B} = (\mathcal{P}(Y), \supseteq)$, $\underline{A} \overset{\rho}{\longrightarrow\!\bullet} \underline{B}$, $\rho_*(A) = \{y \in Y \mid \forall a \in A, (a, y) \in R\}$ *y* $\rho^*(B) = \{x \in X : \forall b \in B, (x, b) \in R\}$.
Este tipo de conexiones se denomina polaridad.

Del siguiente ejemplo (estudiado en detalle en cursos de Teoría de Galois) toman precisamente su nombre las conexiones de Galois; además, el ejemplo corresponde a otro tipo de conexiones de Galois, diferente al de la Definición 1.

Ejemplo 3. *Sea* D *una extensión finita de* F *y sea* E *un campo intermedio* $F \subseteq E \subseteq D$. *Sea* $G\,(D/F)$ *el grupo de automorfismos de* D *que fijan* F. *Sea* $G\,(D/E)$ *el grupo de automorfismos de* D *que fijan* E. *Sea* H *un subgrupo de* $G\,(D/F)$. *Entonces los elementos de* D *que son fijados por cada* $h \in H$ *forman un campo intermedio* E^H, *con* $F \subseteq E^H \subseteq D$. *(Cada subcampo define un subgrupo y cada subgrupo define un subcampo. En general, la correspondencia no es uno a uno, como se ilustra en la figura 1).*

Veamos ahora algunas de las propiedades de conexiones de Galois.
Sea $\underline{A} \overset{F}{\longrightarrow\!\bullet} \underline{B}$ una conexión de Galois. Entonces

1. $F_*F^*F_* = F_*$.
2. $F^*F_*F^* = F^*$.
3. Para todo $a \in A$, $(F^*F_*(a), F_*(a))$ es un par fijo de Galois.
4. Para todo $b \in B$, $(F^*(b), F_*F^*(b))$ es un par fijo de Galois.
5. $a \preceq F^*(b) \Leftrightarrow F_*(a) \subseteq b$, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$.
6. Las restricciones de F_* y F^* a $F_*(\underline{A})$ y $F^*(\underline{B})$ definen una correspondencia uno a uno.

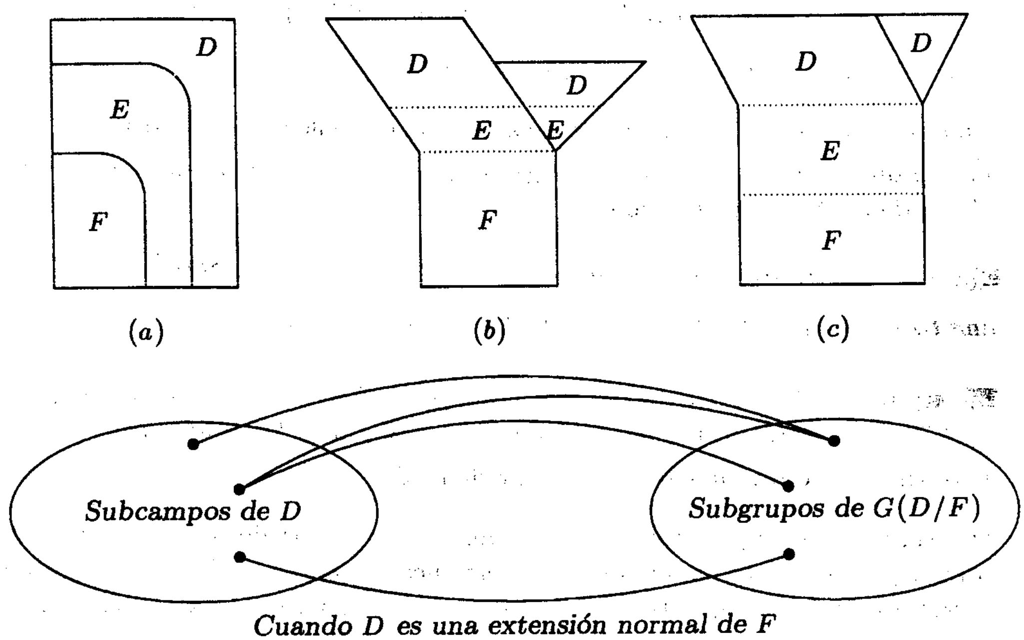

Figura 1: (a) $F \subseteq E \subseteq D$. (b) Todos los automorfismos de $G\,(D/F)$ fijan F. (c) Sólo los automorfismos de $G\,(D/E)$ fijan E.

4. Conexiones de Galois (enfoque categórico)

Definición 2. *Sean $\underline{A}$ y $\underline{B}$ categorías concretas sobre $\underline{X}$. Si $G : \underline{A} \to \underline{B}$ y $F : \underline{B} \to \underline{A}$ son functores concretos sobre $\underline{X}$, entonces el par (F, G) es una* correspondencia de Galois *(entre $\underline{A}$ y $\underline{B}$ sobre $\underline{X}$) si $F \circ G \preceq id_A$ y $id_B \preceq G \circ F$. (Cuando $\underline{X} = 1$ (categoría terminal), la correspondencia es una conexión de Galois).*

De la anterior defininción se desprenden algunas propiedades:

1. Si (F, G) es una correspondecia de Galois entre $\underline{A}$ y $\underline{B}$ y $\left(\widehat{F}, \widehat{G}\right)$ es una correspondencia de Galois entre $\underline{B}$ y $\underline{C}$ entonces $\left(F \circ \widehat{F}, \widehat{G} \circ G\right)$ es una correspondencia de Galois entre $\underline{A}$ y $\underline{C}$ (simbolizada por $\left(\widehat{F}, \widehat{G}\right) \circ (F, G)$).

2. Si (F, G) es una correspondecia de Galois entre $\underline{A}$ y $\underline{B}$ sobre $\underline{X}$ entonces (G^{op}, F^{op}) es una correspondencia de Galois entre $\underline{B}^{op}$ y $\underline{A}^{op}$ sobre $\underline{X}^{op}$.

3. Considerando los clases preordenadas como objetos y las conexiones de Galois como morfismos, se obtiene una cuasicategoría en donde la ley de composición está dada por 1. Esta cuasicategoría se simboliza por **GACO**.

Analicemos, finalmente, las conexiones de Galois entre colecciones de clases. Sea $\underline{X} = \mathbf{Ab}$. Si $S(\mathbf{Ab}) = \{\text{subcategoría de } \mathbf{Ab}\}$, $A \preceq B \Leftrightarrow \underline{A} \subseteq \underline{B}$ en $S(\mathbf{Ab})$. Consideremos $S(\mathbf{Ab}) \underset{T}{\overset{F}{\rightleftarrows}} S(\mathbf{Ab})$ definidas por

$$\begin{aligned} F(\underline{A}) &= \{y \in \mathbf{Ab} \mid \hom(x,y) = \{0\}, \forall x \in \underline{A}\}, \\ T(\underline{B}) &= \{x \in \mathbf{Ab} \mid \hom(x,y) = \{0\}, \forall y \in \underline{A}\}. \end{aligned}$$

¿Es (F,T) una conexión de Galois?

Un conocido teorema de la categoría **Grp** es el siguiente.

Teorema 1 (Factorización de conexiones de Galois). *Sea $F : G \to G'$ un morfismo con núcleo K, y sea $N \Delta G$. Entonces existe una factorización de F a través de G/N si y sólo si $N \subseteq K$.* æ

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "F"] & \\ G/N \arrow[r, dotted, "\varphi"'] & G' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H(X) \arrow[d, "{(S,R)}"'] \arrow[dr, "{(\alpha,\beta)}"] & \\ iCL(\tilde{M}) \arrow[r, dotted, "{(D,K)}"'] & S(X) \end{tikzcd}$$

(a) (b)

Figura 2: (a) $F = \varphi \circ q \Leftrightarrow N \subseteq K$. (b) $(\alpha,\beta) = (S,R) \circ (D,K)$

Existen conexiones de Galois entre clases de objetos y clases de morfismos de una categoría dada que factorizan a través de ciertos sistemas llamados "operadores de clausura idempotentes sobre la categoría" (véase por ejemplo [3]).

Bibliografía

Al lector interesado en profundizar en el tema se le recomiendan las siguientes obras:

[1] J. ADAMEK, H. HERRLICH AND G. E. STRECKER, *Abstract and concrete categories*, John Wiley, New York, 1990.

[2] G. CASTELLINI AND D. HAJEK, *Closure operators and connectedness*, J. Topology and its Appl., de próxima aparición.

[3] G. CASTELLINI J. KOSLOWSKI AND G. E. STRECKER, *A factorization of Pumplün–Röhrl connection*, J. Topology and its Appl., **44** (1992), pp. 69–76

[4] —— *Clousure operators and polarities*, Procedings of the 1991, Summer conference on General Topology and its Applications, de próxima aparición.

[5] G. CASTELLINI AND G. E. STRECKER, *Global clausure operators vs. subcategories*, J. Questiones Math., **13** (1990), pp. 417–429.

[6] H. G. HERRLICH AND M. HUŠEK, *Galois connections*, Springer Lectures Notes, Comp. Sci., 239 (1986), pp. 122–134.

[7] H. G. HERRLICH AND G. STECKER, *Category theory*, Helderman Verlag, Berlin, 1979.

[8] I. N. HERSTEIN, *Algebra moderna*, Ed. Trillas, México, 1974.

[9] S. MAC LANE, *Categories for the working Mathematician*, Springer–Verlag, New York, 1971.

[10] J. E. MAXFIELD AND H. W. MAXFIELD, *Abstract algebra and solution by radicals*, Dover publications, New York, 1992.

[11] J. J. ROTMAN, *The theory of groups: An introduction*, Alln and Bacon, Inc., Boston, 1986.