Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 25, No. 1, 2007, pág. 65–70

Esferas estáticas en relatividad general

J. Ospino*, L. Herrera** & A. Di Prisco***

Resumen. Recientemente K. Lake ha presentado un algoritmo que permite obtener todas las soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein, para el caso de un fluido perfecto con simetría esférica, a partir de una sola función dada. Este algoritmo se extiende al caso de un fluido localmente anisótropo. Como era de esperar, este nuevo formalismo requiere del conocimiento de dos funciones en lugar de una. Para ilustrar el método se deducen de nuevo algunas soluciones conocidas.

Abstract. Recently K. Lake has presented an algorithm that allows to obtain all the static solutions of the equations of Einstein, in the case of a perfect fluid with spherical symmetry, from one given function. This algorithm is then extended to the case of locally anisotropic fluid. Predictably, this new formalism requires knowledge of two functions instead of one. To illustrate the method some known solutions are restored.

1. Introducción

En relatividad general las distribuciones de fluidos perfectos, estáticas con simetría esférica, son descritas por un sistema de tres ecuaciones linealmente independientes, para cuatro variables (dos funciones métricas, la densidad de energía y la presión radial). Entonces, para integrar dicho sistema de ecuaciones es necesario proveer información adicional, en forma de ecuaciones de estados o imponiendo condiciones sobre las variables métricas o las físicas. Esta situación sugiere la posibilidad de obtener todas las soluciones

Palabras y frases claves: Relatividad General, ecuación de Einstein.
Key words: General Relativity, Einstein's equation.
PACS: 04.20.-q.

* Área de Física Teórica. Facultad de Ciencias, Universidad de Salamanca, España.
e-mail: jhozcrae@usal.es

** *e-mail*: laherrera@cantv.net

*** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
e-mail: adiprisc@fisica.ciens.ucv.ve

a partir de una sola función dada. Un formalismo en esta dirección ha sido recientemente presentado por Lake [1] (ver también [2]). El propósito de este trabajo es el de extender el formalismo antes mencionado al caso de un fluido localmente anisótropo.

La motivación para hacer dicha extensión se debe al hecho de que la consideración de anisotropía local en las presiones, la cual parece bastante razonable para describir la distribución de materia bajo una variedad de circunstancias, ha resultado ser muy útil en el estudio de objetos compactos relativistas (ver [3]-[12] y sus referencias).

En la siguiente sección presentaremos las ecuaciones generales y el formalismo para obtener las soluciones; después aplicaremos el método para analizar algunos casos específicos.

2. Ecuaciones de Einstein para un fluido estático localmente anisótropo

El elemento de línea, en coordenadas de Schwarzschild,

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2, \tag{1}$$

el cual debe satisfacer las ecuaciones de Einstein, que para el caso de un fluido localmente anisótropo son

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right), \tag{2}$$

$$8\pi P_r = -\frac{1}{r^2} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right), \tag{3}$$

$$8\pi P_\perp = \frac{e^{-\lambda}}{4}\left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r}\right), \tag{4}$$

donde las primas denotan derivadas con respecto a la coordenada r, y ρ, P_r y $P_\perp$ son la densidad de energía, la presión radial y la presión tangencial, respectivamente.

2.1. El formalismo

A partir de (3) y (4) se obtiene

$$8\pi(p_r - p_\perp) = e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} - \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2 + \frac{\nu'}{2r} + \frac{1}{r^2}\right) + e^{-\lambda}\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r^2}. \tag{5}$$

Entonces, introduciendo las variables

$$e^{\nu(r)} = e^{\int (2z(r) - 2/r)dr} \tag{6}$$

y

$$e^{-\lambda} = y(r), \tag{7}$$

y sustituyendo en (5), encontramos:

$$y' + y\left[\frac{2z'}{z} + 2z - \frac{6}{r} + \frac{4}{r^2 z}\right] = -\frac{2}{z}\left(\frac{1}{r^2} + \Pi(r)\right), \tag{8}$$

donde $\Pi(r) = 8\pi(p_r - p_\perp)$.

Integrando formalmente (8) y volviendo a la notación de λ tenemos

$$e^{\lambda(r)} = \frac{z^2(r)e^{\int(\frac{4}{r^2 z(r)}+2z(r))dr}}{r^6(-2\int\frac{z(r)(1+\Pi(r)r^2)e^{\int(\frac{4}{r^2 z(r)}+2z(r))dr}}{r^8}dr + C)}, \tag{9}$$

donde C es una constante de integración. Entonces, usando (9) la métrica (1) se puede escribir como

$$ds^2 = \frac{z^2(r)e^{\int(\frac{4}{r^2 z(r)}+2z(r))dr}}{r^6\left(-2\int\frac{z(r)(1+\Pi(r)r^2)e^{\int(\frac{4}{r^2 z(r)}+2z(r))dr}}{r^8}dr + C\right)}dr^2 + \\ + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 - e^{\int(2z(r)-2/r)dr}dt^2. \tag{10}$$

Así pues, cualquier solución que describa una distribución de fluido estática localmente anisótropa está completamente determinada por dos funciones generadoras, Π y z.

Expresaremos ahora las variables físicas en términos de dichas funciones, con el objeto de imponer luego condiciones que nos lleven a soluciones físicamente aceptables. Así, tenemos:

$$4\pi P_r = \frac{z(r-2m) + m/r - 1}{r^2}, \tag{11}$$

$$4\pi\rho = \frac{m'}{r^2}, \tag{12}$$

$$4\pi P_\perp = (1 - \frac{2m}{r})(z' + z^2 - \frac{z}{r} + \frac{1}{r^2}) + z(\frac{m}{r^2} - \frac{m'}{r}), \tag{13}$$

donde la función masa $m(r)$ está definida, como es usual, por

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \tag{14}$$

Las soluciones deben ser regulares en el origen y satisfacer las condiciones $\rho > 0$, $\rho > P_r, P_\perp$. Si la estabilidad es requerida, entonces ρ y P_r deben ser funciones decrecientes de r.

Para evitar comportamientos singulares de las variables físicas en la superficie del fluido (Σ), las soluciones deben satisfacer también las condiciones de Dormois en la superficie, implicando que $(P_r)_\Sigma = 0$ y

$$e^{\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma}, \tag{15}$$

$$e^{-\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{r_\Sigma}, \tag{16}$$

con $m_\Sigma = M$, y r_Σ el radio de la distribución de materia.

2.2. Fluidos localmente isótropos

Si imponemos la condición

$$\Pi(r) = 8\pi(p_r - p_\perp) = 0 \tag{17}$$

en (10), se obtiene fácilmente

$$ds^2 = \frac{z^2(r) e^{\int (\frac{4}{r^2 z(r)} + 2z(r))dr}}{r^6 \left(-2 \int \frac{z(r) e^{\int (\frac{4}{r^2 z(r)} + 2z(r))dr}}{r^8} dr + C\right)} dr^2 + \\ + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 - e^{\int (2z(r) - 2/r)dr} dt^2, \tag{18}$$

la cual coincide con el resultado presentado en [1], con $z(r) = \Phi(r)' + \frac{1}{r}$.

3. Algunos ejemplos

Vamos aplicar ahora el algoritmo para reproducir algunas soluciones ya conocidas.

3.1. Fluidos localmente anisótropos conformemente planos

En el caso de simetría esférica, las componentes del tensor de Weyl distintas de cero se pueden expresar a través de una sola magnitud escalar:

$$E = -\frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\frac{\nu''}{2} + \left(\frac{\nu'}{2}\right)^2 - \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu' - \lambda'}{2r} + \frac{1 - e^{\lambda}}{r^2}\right). \tag{19}$$

La ecuación (19) ha sido integrada en [1] para $E = 0$, encontrándose que

$$e^{\frac{\nu}{2}} = c\, r \cosh\left(\int \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{r} dr\right). \tag{20}$$

La ecuación (20) en la notación de z se escribe

$$z = \frac{2}{r} + \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{r} \tanh\left(\int \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{r} dr\right). \tag{21}$$

Por otro lado, de las ecuaciones (4) y (19), con $E = 0$, se obtiene fácilmente

$$\Pi(r) = r\left(\frac{1 - e^{-\lambda}}{r^2}\right)'. \tag{22}$$

A partir de las ecuaciones (21) y (22) se pueden hallar las funciones métricas $z(r)$ y $\Pi(r)$, para una función λ dada.

3.2. Bowers y Liang

Esta solución corresponde al caso de un fluido localmente anisótropo con una densidad de energía $\rho = \rho_0 = const.$ [15], y está dada por

$$e^{\nu} = \left[\frac{3(1 - 2M_{\Sigma}/r_{\Sigma})^{h/2} - (1 - 2m/r)^{h/2}}{2}\right]^{2/h}, \quad m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho, \quad M = \frac{4\pi}{3} r_{\Sigma}^3 \rho. \tag{23}$$

Las dos funciones generadoras para esta métrica son

$$z(r) = \frac{\frac{2m}{r^2}(1 - \frac{2m}{r})^{\frac{h}{2}-1}}{3(1 - \frac{2M}{r_{\Sigma}})^{\frac{h}{2}} - (1 - \frac{2m}{r})^{\frac{h}{2}}} + \frac{1}{r} \tag{24}$$

y

$$\Pi(r) = -6C \frac{(z(r) - 1/r)^2 (1 - \frac{2M}{r_{\Sigma}})^{\frac{h}{2}}}{(1 - 2m/r)^{\frac{h}{2}-1}}. \tag{25}$$

donde $h = 1 - 2C = const.$ El caso $h = 1$ reproduce la bien conocida solución interior de Schwarzschild, mientras que $h = 0$ describe la solución de Florides [16].

3.3. Soluciones con una ecuación de estado no local

Una familia interesante de soluciones se pueden encontrar considerando una ecuación de estado no local que relaciona la presión radial y la densidad de energía de la siguiente manera [17]:

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3}\int_0^r \tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r} + \frac{C}{2\pi r^3}. \tag{26}$$

La ecuación (26) se puede escribir como

$$P_r(r) = \frac{m'}{4\pi r^2} - \frac{m}{2\pi r^3} + \frac{C}{2\pi r^3}, \tag{27}$$

donde se ha tenido en cuenta (12).

A partir de (11) y (27) se puede ver que la función $z(r)$ para este tipo de soluciones tiene la expresión

$$z(r) = \frac{rm' - 3m + 2C + r}{r(r - 2m)}. \tag{28}$$

Referencias

[1] Kayll Lake, *Phys. Rev. D.* **67**, 104015 (2003).

[2] S. Rahman, M. Visser, *Class Quantum Grav.* **19**, 935 (2002).

[3] L. Herrera, N.O. Santos, *Phys. Rep.* **286**, 53 (1997).

[4] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Martin, J. Ospino, N.O. Santos, O. Troconis, *Phys. Rev. D.* **69**, 084026 (2004).

[5] C. Cattoen, T. Faber, M. Visser, *Class. Quantum Grav.* **22**, 4189 (2005).

[6] A. DeBenedictis, D. Horvat, S. Ilijic, S. Kloster, K. Visswanatham, *Class. Quantum Grav.* **23**, 2303 (2006).

[7] G. Bohmer, T. Harko, *Class. Quantum Grav.* **23**, 6479 (2006).

[8] W. Barreto, B. Rodríguez, L. Rosales, O. Serrano, *Gen. Rel. Grav.* **39**, 23 (2007).

[9] M. Esculpi, M. Malaver, E. Aloma, *Gen. Rel. Grav.* **39**, 633 (2007).

[10] G. Khadekar, S. Tade, *Astr. Space. Sci.* **310**, 41 (2007).

[11] G. Bohmer, T. Harko, *Mon. Not R. Astron. Soc.* **379**, 393 (2007).

[12] S. Karmakar, S. Mukherjee, R. Sharma, S. Maharaj, *Pramana J.* **68**, 881 (2007).

[13] H. Abreu, H. Hernández, L.A. Núñez, *Class. Quantum Grav.* **24**, 4631 (2007).

[14] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ospino, E. Fuenmayor, *J. Math Phys.* **42**, 2199 (2001).

[15] R. Bowers, E. Liang, *Astrophys. J.* **188**, 657 (1974).

[16] P.S. Florides, *Proc. Roy. Soc. London.* **A337**, 529 (1974).

[17] H. Hernández, L.A. Núñez, *Can. J. Phys.* **82**, 29 (2004). 1 abril 2002.

J. Ospino
Area de Física Teórica. Facultad de Ciencias,
Universidad de Salamanca, España.
e-mail: jhozcrae@usal.es

L. Herrera
e-mail: laherrera@cantv.net

A. Di Prisco
Escuela de Física, Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela,
Caracas, Venezuela.
e-mail: adiprisc@fisica.ciens.ucv.ve