Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 25, No. 1, 2007, pág. 45–50

Significado físico del correlador de n puntos en perturbaciones cosmológicas

Heíner R. S. Cogollo* & Yeinzon Rodríguez**

Resumen. Los avances realizados en materia de mediciones en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF) prometen cotas de medición, en particular en la amplitud del espectro $\mathcal{P}_\zeta$ de la perturbación primordial en la curvatura ζ, su respectivo índice espectral n_ζ, y nivel de no gaussianidad f_{NL}, que permitirían una mayor discriminación entre modelos cosmológicos inflacionarios propuestos para la explicación del origen de la estructura a gran escala de nuestro Universo. La herramienta utilizada para indagar acerca de las propiedades estadísticas de las anisotropías en la temperatura de la RCF y los modelos teóricos construidos para describir tales anisotropías, son los correladores de n puntos en perturbaciones cosmológicas tales como ζ. Este trabajo pretende interpretar el significado del correlador de n puntos en perturbaciones cosmológicas, poniendo de manifiesto su contenido físico como un promedio espacial. Como consecuencia se obtiene una expresión para $\mathcal{P}_\zeta$, y se analizan las implicaciones de esta interpretación en el cálculo de f_{NL}.

Abstract. Progresses made on measuring the temperature in the cosmic microwave background radiation (CMB) promise observational bounds, in particular in the spectrum amplitude $\mathcal{P}_\zeta$ of the primordial curvature perturbation ζ, its associated spectral index n_ζ, and level of non-gaussianity f_{NL}, that would allow us a better discrimination among cosmological inflationary models proposed to explain the origin of the large-scale structure in the Universe. The tool employed to inquire about the statistical properties of the anisotropies in the temperature of the CMB and the theoretical

Palabras y frases claves: perturbación en la curvatura, correladores, función de distribución de probabilidad.
Keywords: curvature perturbation, correlator, probability distribution function.
PACS: 98.80.Cq.

* Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: heiner.sarmiento@ciencias.uis.edu.co

** Centro de Investigaciones, Universidad Antonio Nariño, Cra 3 Este # 47A - 15, Bogotá, *y* Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co

models built to describe such anisotropies, are the n point correlators in cosmological perturbations such as ζ. This work aims to interpret the meaning of the n point correlators in cosmological perturbations, making clear its physical content as a spatial average. As a consequence we obtain an expression for $\mathcal{P}_\zeta$, and we analyze the implications of such an interpretation in the calculation of f_{NL}.

1. Introducción

La RCF es esencialmente un campo estocástico que contiene información del Universo temprano útil para entender la formación de las estructuras a gran escala presentes en nuestro Universo observable. Mucho de lo que nos interesa saber acerca de las variables físicas está codificado en las propiedades estocásticas de la RCF, y estas pueden ser enteramente conocidas si se conoce la función de distribución de probabilidad (FDP) asociada al campo estocástico de perturbación primordial en la curvatura ζ [1, 2, 3, 4]. Los *momentos*, ensamble promedio de productos del campo $\langle\zeta(t,\mathbf{x}_1)\cdots\zeta(t,\mathbf{x}_N)\rangle$, reproducen la FDP asociada al campo y por tanto todas las propiedades estocásticas del mismo [1, 2, 3, 4]. En este trabajo ilustramos cómo se expresan los *momentos* en el espacio de vectores de onda $\mathbf{k}$, ya que este es un espacio más adecuado para la descripción de las propiedades estocásticas, puesto que en el escenario inflacionario sólo los modos que salen del horizonte durante inflación, y reingresan a él durante la etapa postinflacionaria, pierden su carácter de perturbaciones cuánticas para convertirsen en perturbaciones estocásticas clásicas [5, 6].

2. Isotropía y homogeneidad estadística

Un campo estocástico es llamado estadísticamente homogéneo [1, 7] si todas las FDP de n puntos o sus *momentos* son invariantes bajo traslaciones en el espacio de las coordenadas $\mathbf{x}$; de esta forma la probabilidad depende sólo de las posiciones relativas. Un campo es llamado estadísticamente isótropo si sus FDP de n puntos o sus *momentos* son invariantes bajo rotaciones en el espacio de las coordenadas. Nosotros asumimos que los campos en consideración son estadísticamente homogéneos e isótropos, como se encuentra en la mayoría de las teorías cosmológicas, y como además se encuentra justificado a partir de las observaciones [8].

3. La densidad espectral

Dado que sólo las escalas k^{-1} que salen del horizonte durante inflación y reingresan a él durante la etapa postinflacionaria dejan de ser fluctuaciones cuánticas para convertirsen en perturbaciónes clásicas, es más natural describir los *momentos* en el espacio de vectores de onda, en lugar de hacerlo en el espacio de coordenadas. Sean las componentes de Fourier definidas por $\zeta_{\mathbf{k}} = \int d^3\mathbf{x}\zeta(t,\mathbf{x})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})$; entonces la función de correlación de dos puntos en el espacio de vectores de onda es

$$\begin{aligned}
\langle\zeta_{\mathbf{k}}\zeta_{\mathbf{k}'}\rangle &= \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{r}\langle\zeta(t,\mathbf{x})\zeta(t,\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle\exp[-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}]\,, && (1)\\
&= (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\int d^3\mathbf{r}\xi(r)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,, && (2)\\
&= (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')P(k)\,, && (3)
\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado el hecho de que el campo es estadísticamente homogéneo e isotrópico, lo cual conduce a que $\xi(r)$ depende sólo de la magnitud del vector $\mathbf{r}$. Cuando las perturbaciones son gaussianas, cualquier FDP de n puntos es una distribución guassiana. De esta forma las propiedades estocásticas del campo son entonces enteramente determinadas por la forma y normalización de $P(k)$ debido al teorema de Wick, que establece que para este caso los correladores de $2n+1$ puntos son cero, y los correladores de $2n$ puntos se pueden escribir en términos del correlador de dos puntos [9].

Obsérvese que $P(k)$ es la transformada de Fourier de la función de correlación de dos puntos separados una distancia $\mathbf{r}$ en el espacio de coordenadas:

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}P(k)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,; \tag{4}$$

entonces, conocido $P(k)$, la función de correlación para cualquier vector $\mathbf{r}$ también es conocida. Consideremos el caso particular $\mathbf{r}=\mathbf{0}$, esto es,

$$\langle\zeta^2(t,\mathbf{x})\rangle = \int\frac{dk}{k}\mathcal{P}_\zeta(k)\,, \tag{5}$$

resultado obtenido al utilizar coordenadas esféricas, $d^3\mathbf{k} = k^2dkd\Omega$, y observando que $\mathcal{P}_\zeta(k) = (k^3/2\pi^2)P(k)$, siendo esta última expresión una de las definiciones del espectro de la perturbación primordial en la curvatura o densidad espectral normalmente usada en la literatura.

De igual forma, podemos definir correladores de orden mayor en el espacio de vectores de onda. Un caso particular de especial interés, dado que constituye un primer intento en conocer el nivel de no gaussianidad en la FDP asociada al campo estocástico, es el *biespectro*, definido como

$$\langle\zeta_{\mathbf{k}}\zeta_{\mathbf{k}'}\zeta_{\mathbf{k}''}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')B_\zeta(k,k',k'')\,, \tag{6}$$

el cual es normalizado a través del parámetro f_{NL}, llamado *nivel de no gaussianidad* [10],

$$B_\zeta = -\frac{6}{5}f_{NL}(k,k',k'')[P_\zeta(k)P_\zeta(k') + \text{permutaciones cíclicas}]\,. \tag{7}$$

En general, el correlador de n puntos de un campo estocástico arbitrario, en el espacio de vectores de onda, se expresa como

$$\langle\zeta_{\mathbf{k_1}}\cdots\zeta_{\mathbf{k}_N}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k_1}+\cdots+\mathbf{k_N})P_\zeta(\mathbf{k}_1,\cdots,\mathbf{k}_N)\,, \tag{8}$$

en donde vale la pena resaltar que P_ζ depende de los vectores de onda y no de los números de onda.

4. Cálculo de f_{NL}

Para calcular el nivel de no gaussianidad recurrimos al formalismo δN [11], $\zeta(t,\mathbf{x}) = \delta N \equiv N(t,\mathbf{x}) - N_0(t)$, en donde el monto de expansión, N, es evaluado desde una hipersuperficie inical plana hasta una hipersuperficie final de densidad de energía uniforme. De acuerdo con [11, 12], la perturbación primordial en la curvatura se da en términos de las derivadas de N con respecto a los campos escalares presentes durante inflación, $N_{,i} = \partial N/\partial\phi^i_*$, y la perturbación en tales campos al salir del horizonte, $\delta\phi^i_*$, como

$$\zeta(t,\mathbf{x}) = N_{,i}\delta\phi^i_* + \frac{1}{2}N_{,ij}\delta\phi^i_*\delta\phi^j_* + \frac{1}{3!}N_{,ijk}\delta\phi^i_*\delta\phi^j_*\delta\phi^k_* + \cdots\,, \tag{9}$$

en donde se asume la convención de suma de Einstein. La expresión (9) permite calcular la función de correlación de n puntos de ζ en términos de la función de correlación de n puntos de $\delta\phi^i_*$. Así, podemos calcular el biespectro al orden que se desee y compararlo con la expresión (7) para obtener f_{NL}. Para ilustrar el proceso calculemos el biespectro para un árbol. De acuerdo a la expresión (9) el espectro viene dado por

$$\langle\zeta_{\mathbf{k}_1}\zeta_{\mathbf{k}_2}\rangle^{arbol} = (2\pi)^3P_\zeta^{arbol}(k)\delta^3(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}) = (2\pi)^3N_{,i}^2P_{\delta\phi^i_*}(k)\delta^3(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2})\,, \tag{10}$$

y el biespectro por

$$\langle\zeta_{\mathbf{k}_1}\zeta_{\mathbf{k}_2}\zeta_{\mathbf{k}_3}\rangle^{arbol} = (2\pi)^3N_{,ij}N_{,i}N_{,j}[P_{\delta\phi^i_*}(k_1)P_{\delta\phi^i_*}(k_2) + 2\text{ perm.}]\delta^3(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}+\mathbf{k_3})\,. \tag{11}$$

Así, comparando las expresiones (10) y (11) con las expresiones (6) y (7), observamos que el nivel de no gaussianidad viene descrito como

$$-\frac{3}{5}f_{NL} = \frac{N_{,ij}N_{,i}N_{,j}}{2[N_{,k}^2]^2}\,. \tag{12}$$

Este proceso es utilizado para hallar el nivel de no gaussianidad al orden que deseemos, teniendo en cuenta que hasta el momento sólo las funciones de correlación de dos, tres, y cuatro puntos en los campos han sido calculadas explícitamente [13, 14, 15]. Un tratamiento más detallado acerca del formalismo δN es ilustrado en [12].

5. Contenido físico de la función de correlación

La función de correlación está relacionada con la función de probabilidad de multipuntos. Ilustremos el caso para el campo de densidades. La función de correlación de dos puntos mide el exceso respecto a la probabilidad aleatoria de que dos partículas estén en los elementos de volumen dV_1 y dV_2 separados una distancia $x_{12} = |\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}|$,

$$dP_{12} = n^2[1 + \xi(x_{12})]dV_1 dV_2\,, \tag{13}$$

en donde n es la densidad media. Si no hay correlación, $\xi = 0$, la distribución es aleatoria y la densidad de probabilidad de tener un par de partículas es dada por la densidad media cuadrática, independientemente de la separación entre los elementos de volumen. Igualmente podemos conocer la probabilidad condicional: la probabilidad condicional de que haya una partícula en el elemento de volumen dV_2 dado que hay una partícula en el elemento de volumen dV_1 es $dP(2|1) = n[1 + \xi(x_{12})]dV_2$. Esta última expresión nos dice que si $\xi(x_{12}) > 0$ (correlación), entonces $dP(2|1)$ aumenta, pero si $\xi(x_{12}) < 0$ (anticorrelación), $dP(2|1)$ es suprimida respecto al caso de la distribución aleatoria, como era de esperarse. Igualmente, para el caso de tres puntos la probabilidad de tener tres partículas en los elementos de volumen dV_1, dV_2, y dV_3 respectivamente está dada por

$$dP_{123} = n^3[1 + \xi(x_{12}) + \xi(x_{23}) + \xi(x_{31}) + \xi_3(x_{12}, x_{23}, x_{31})]dV_1 dV_2 dV_3\,, \tag{14}$$

en donde ξ_3 denota la parte conectada de la función de correlación de tres puntos. Si el campo fuese gaussiano, $\xi_3 = 0$, y por ende todas las probabilidades se determinan únicamente por $\xi(r)$. Resultados similares se obtienen para correladores de orden mayor.

Agradecimientos: Este trabajo cuenta con el apoyo de COLCIENCIAS a través del proyecto de investigación No. 1102-333-18674 CT-174-2006, y de la DIEF (UIS) a través del proyecto de investigación No. 5134. H.R.S.C. agradece a la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia por su beca de posgrado. Y.R. agradece al programa ECOS-NORD, proyecto C06P02, por su apoyo en movilidad.

Referencias

[1] R.J. ADLER, *The Geometry of Random Fields.* John Wiley and Sons, 1981.

[2] M. SASAKI, J. VÄLIVIITA, D. WANDS, "Non-Gaussianity of the Primordial Perturbation in the Curvaton Model", *Physical Review D*, **74**, 103003 (2006).

[3] S. DODELSON, *Modern Cosmology.* Academic Press, 2003.

[4] L. VERDE, "A Practical Guide to Basic Statistical Techniques for Data Analysis in Cosmology", *arXiv:0712.3028 [astro-ph].*

[5] D.H. LYTH, "Large-Scale Energy-Density Perturbations and Inflation", *Physical Review D*, **31**, 1792-1798, (1985).

[6] D.H. LYTH, D. SEERY, "Classicality of the Primordial Perturbations", *arXiv:astro-ph/0607647.*

[7] S. KARLIN, H.M. TAYLOR, *A First Course in Stochastic Processes.* Academic Press, 1975.

[8] D.N. SPERGEL *et. al.*, "Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology", *Astrophysical Journal Supplement Series*, **170**, 377-408, (2007).

[9] F. GROSS, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory.* Wiley Interscience, 1993.

[10] J. MALDACENA, "Non-Gaussian Features of Primordial Fluctuations in Single Field Inflationary Models", *Journal of High Energy Physics*, **0305**, 013 (2003).

[11] D.H. LYTH, Y. RODRÍGUEZ, "Inflationary Prediction for Primordial Non-Gaussianity", *Physical Review Letters*, **95**, 121302 (2005).

[12] C.T. BYRNES, K. KOYAMA, M. SASAKI, D. WANDS, "Diagrammatic Aproach to Non-Gaussianity from Inflation", *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **0711**, 027 (2007).

[13] T.S. BUNCH, P.C.W. DAVIES, "Quantum Field Theory in de Sitter Space: Renormalisation by Point Splitting", *Proceedings of the Royal Society of London A*, **360**, 117-134, (1978).

[14] D. SEERY, J.E. LIDSEY, "Primordial Non-Gaussianities from Multiple-Field Inflation", *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **0509**, 011 (2005).

[15] D. SEERY, J.E. LIDSEY, M. SLOTH, "The Inflationary Trispectrum", *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **0701**, 027 (2007).

HEÍNER R. S. COGOLLO
Escuela de Física, UIS,
Bucaramanga, Colombia
e-mail: heiner.sarmiento@ciencias.uis.edu.co

YEINZON RODRÍGUEZ
Centro de Investigaciones,
Universidad Antonio Nariño,
Cra 3 Este # 47A - 15, Bogotá, *y*
Escuela de Física, UIS,
Bucaramanga, Colombia
e-mail: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co