Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 25, No. 1, 2007, pág. 33–38

No gaussianidad primordial en la perturbación en la curvatura en el escenario del curvatón

Fredy F. Parada* & Yeinzon Rodríguez**

Resumen. En el muy exitoso y alternativo modelo para el escenario del inflatón, "el modelo del curvatón", dos campos escalares están presentes durante inflación: uno, el inflatón, es el encargado de generar y controlar el período inflacionario, y el otro, el curvatón, es el encargado de generar la perturbación primordial en la curvatura ζ, que a su vez da origen a la formación de la estructura a gran escala del Universo. La ζ observada es altamente gaussiana, pero los experimentos satelitales actuales, como el WMAP de la NASA, buscan una posible pequeña desviación de la gaussianidad exacta. En este artículo estudiaremos el biespectro $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ de ζ en el escenario del curvatón, cuya normalización f_{NL} da información acerca del nivel de no gaussianidad en ζ. Este estudio será realizado haciendo uso del formalismo δN. Se enunciará explícitamente la ventaja de este formalismo y se dará una expresión para f_{NL} en el escenario del curvatón.

Abstract. In the very successful and alternative model to the inflaton scenario, "the curvaton model", two scalar fields are present during inflation: one, the inflaton, is in charge of generating and controlling the inflationary period, and another, the curvaton, is in charge of generating the primordial curvature perturbation ζ which in turn gives origen to the formation of large-scale structures in the Universe. The observed ζ is highly Gaussian, but the current satellite experiments, like NASA's WMAP, search for a possible small deviation from the exact gaussianity. In this paper we will study the bispectrum $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ of ζ in the curvaton scenario, whose normalisation f_{NL} gives information about the level of non-gaussianity in ζ. This study will be done by making use of the δN formalism. We will explicitely state the advantage of this formalism and give an expression for f_{NL} in the curvaton scenario.

Palabras y frases claves: inflación, generación de estructuras a gran escala, no gaussianidad.
***Keywords*:** Inflation, generation of large-scale structures, non-gaussianity.
***PACS*:** 98.80.Cq.

* Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: confredyfabian@gmail.com

** Centro de Investigaciones, Universidad Antonio Nariño, Cra 3 Este # 47A - 15, Bogotá, *y* Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
e-mail: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co

1. Introducción

En el escenario inflacionario estándar sólo un campo escalar, llamado el inflatón, es el responsable de la solución a los problemas de horizonte, planitud y reliquias no deseadas, así como también es responsable del origen de la estructura a gran escala presente en nuestro Universo observable [1]. Esta doble misión para el escenario del inflatón impone fuertes restricciones sobre los parámetros que definen los respectivos modelos inflacionarios, haciendo que algunos de estos buenos modelos sean incompatibles, o prácticamente incompatibles, con los resultados observacionales. Para rescatar dichos modelos del ajuste fino requerido sobre los parámetros que los definen, se sugiere que el campo del inflatón sea únicamente encargado de generar y controlar inflación. La otra labor, la generación de estructuras a gran escala, es asignada a un campo escalar ligero, no dominante durante inflación, σ diferente al inflatón [2, 3]. Este es el escenario del curvatón, en donde la perturbación en la curvatura original ζ_σ asociada y producida por σ durante inflación, es gradualmente transformada en la perturbación total de la curvatura ζ. El proceso de conversión se inicia una vez el campo del curvatón σ empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial, durante la época post inflacionaria dominada por la radiación [2, 3].

Un caso particular de especial interés, dado que constituye un primer intento en conocer el nivel de no gaussianidad en la perturbación primordial en la curvatura ζ, es el *biespectro*, definido como,

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}'} \zeta_{\mathbf{k}''} \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') B_\zeta(k, k', k'') \,, \tag{1}$$

el cual es normalizado a través del parámetro f_{NL}, llamado *nivel de no gaussianidad* [4],

$$B_\zeta = -\frac{6}{5} f_{NL}(k, k', k'') [P_\zeta(k) P_\zeta(k') + \text{permutaciones cíclicas}] \,. \tag{2}$$

Contrariamente al escenario del inflatón, ζ en el modelo más simple del curvatón puede presentar una componente no gaussiana apreciable si el curvatón no domina la densidad de energía antes de decaer. Más específicamente, de acuerdo a la expresión

$$f_{NL} = \frac{5}{3} + \frac{5}{6} r - \frac{5}{4r} \,, \tag{3}$$

la cual es válida en el escenario del curvatón [5, 6, 7, 8], $|f_{NL}| \gg 1$ se obtiene si r es muy pequeño. En la expresión previa r es definido por $r \equiv 3\rho_{\sigma_0}/(4\rho_{r_0} + 3\rho_{\sigma_0})$, y es evaluado justo antes de que el curvatón decaiga (siendo ρ_σ y ρ_r las densidades de energía globales del curvatón y de la radiación respectivamente). Esto es de extrema importancia, ya que el siguiente reporte de datos del satétlite WMAP, o en su defecto los futuros datos ofrecidos por el satélite PLANCK, detectarán no gaussianidad o impondrán fuertes restricciones sobre f_{NL}, ofreciendo la posibilidad de discriminar satisfactoriamente entre los diferentes modelos de inflatón y de curvatón. La restricción actual sobre f_{NL}, de acuerdo al tercer año de resultados del WMAP, es $|f_{NL}| \lesssim 10^2$ [9]. Se espera que el siguiente reporte de datos reduzca esta cota en alrededor de un orden de magnitud [10].

2. El escenario del curvatón

En este escenario el campo escalar del curvatón σ no domina la densidad de energía del Universo durante inflación, y su masa m_σ satisface la condición $m_\sigma \ll H_*$ (campo ligero), siendo H_* el parámetro de Hubble cuando las escalas cosmológicas relevantes salen del horizonte [7]. Durante el período inflacionario el parámetro de Hubble no es constante pero satisface la condición $-\dot{H}_{inf}/H_{inf}^2 \ll 1$, es decir $\varepsilon \ll 1$ (un etapa cuasi De Sitter), siendo ε uno de los parámetros de deslizamiento lento [1]. La introducción de una variación suave en H_{inf} y de una pequeña masa m_σ para el campo escalar σ deriva en una pequeña dependencia con respecto a la escala para el espectro de perturbaciones del campo escalar $\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)$, que es parametrizado por $\varepsilon = -\dot{H}_{inf}/H_{inf}^2$ y $\eta_\sigma \equiv m_\sigma^2/3H_*^2$:

$$\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k) = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}}\right)^{2\eta_\sigma - 2\varepsilon} . \tag{4}$$

El espectro de la perturbación en la curvatura asociada al curvatón ζ_σ es entonces dado por [2, 3, 7],

$$\mathcal{P}_{\zeta_\sigma}(k) = \frac{4}{9}\frac{\mathcal{P}_{\delta\sigma}(k)}{\sigma_*^2} = \left(\frac{H_*}{3\pi\sigma_*}\right)^2 \left(\frac{k}{aH_{inf}}\right)^{2\eta_\sigma - 2\varepsilon} , \tag{5}$$

siendo σ_* el valor para el campo escalar σ durante inflación.

La densidad de energía ρ_σ durante el período inflacionario es inapreciable y el campo del inflatón presenta una perturbación en la curvatura despreciable ζ_r que queda impresa en el fluido de radiación una vez decae el inflatón en dicho fluido [2, 3]. De esta manera la perturbación en la curvatura total, debida tanto a la perturbación en la curvatura presente en el fluido de radiación como en aquella presente en el campo escalar del curvatón, viene dada en [2, 3]:

$$\zeta = (1 - r)\zeta_r + r\zeta_\sigma . \tag{6}$$

En la anterior expresión el parámetro r es definido justo después de la Ecuación (3) y empieza a crecer durante la etapa postinflacionaria dominada por la radiación justo después de que m_σ supera el parámetro de Hubble y comienzan las oscilaciones de σ alrededor del mínimo de su potencial.

Así, finalmente, y justo antes de que σ decaiga en el fluido de radiación, la perturbación en la curvatura total ζ es, según [2, 3, 7],

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left[\frac{H_* r}{3\pi\sigma_*}\right]^2 \left(\frac{k}{aH_{\rm inf}}\right)^{2\eta_\sigma - 2\varepsilon} , \tag{7}$$

con r evaluado justo antes del decaimiento del curvatón.

3. El formalismo δN

Las perturbaciones en el Universo observable son definidas con respecto a un universo no perturbado, el cual es homogéneo e isotrópico y que viene descrito por la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). El elemento de línea para tal métrica es descrito como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - dt^2 + a^2 (t)\delta_{ij} dx^i dx^j , \tag{8}$$

definiendo el factor de escala no perturbado $a(t)$, tiempo cósmico t, y coordenadas cartesianas espaciales $\mathbf{x}$ [1]. Para definir la perturbación en la curvatura ζ, tomamos hipersuperficies de espacio-tiempo con $t = cte$ y densidad de energía uniforme. La componente escalar de la parte espacial de la métrica perturbada es entonces parametrizada de la manera siguiente por la perturbación en la curvatura llamada ζ(t,$\mathbf{x}$) [6]:

$$g_{ij} = a^2(t) e^{2\zeta(t,\mathbf{x})}\delta_{ij} = \widetilde{a}^2(t,\mathbf{x})\delta_{ij} . \tag{9}$$

De acuerdo a esta definición, ζ es la perturbación en $\ln(\widetilde{a})$, en donde $\widetilde{a}$ es el parámetro de expansión local. La relación de ζ con la perturbación en la temperatura de la radiación cósmica de fondo $\delta T/T$ viene descrita por el efecto Sachs-Wolfe [11].

Se puede considerar una hipersuperficie de $t = cte$ cuya métrica tenga la forma de la ecuación (9) sin el factor ζ, la cual se denomina hipersuperficie plana. Comenzando para cualquier hipersuperficie plana inicial en un tiempo inicial t_{ini}, el monto local de expansión se define como

$$N(t,\mathbf{x}) \equiv \ln\left[\frac{\tilde{a}(t,\mathbf{x})}{a(t_{\rm in})}\right] \tag{10}$$

para una hipersuperficie final de densidad de energía uniforme. De esta manera [6],

$$\zeta(t,\mathbf{x}) = \delta N \equiv N(t,\mathbf{x}) - N_0(t) . \tag{11}$$

Este es el formalismo δN que relaciona la perturbación en la curvatura ζ con la perturbación en el monto local de expansión $N(t, \mathbf{x})$.

3.1. No gaussianidad en el escenario del curvatón

Cuantifiquemos ahora el nivel de no gaussianidad en el escenario del curvatón. Para calcular f_{NL} debemos darnos cuenta primero de que σ_* (el valor no perturbado de σ durante inflación) es la única cantidad relevante, puesto que la perturbación en la curvatura producida por el inflatón, e impresa en el fluido de radiación durante el proceso de recalentamiento, se supone que es despreciable [2, 3]. Segundo, podemos redefinir N como el número de e-pliegues (*folds*) desde el comienzo de las oscilaciones sinusoidales hasta el decaimiento del curvatón. Esto es debido a que el número de e-pliegues desde el final de inflación hasta el comienzo de las oscilaciones es completamente imperturbado, ya que la densidad de energía de la radiación domina durante ese tiempo. Entonces, N es ahora función de tres variables [6, 8],

$$N(\rho_{dec}, \rho_{osc}, \sigma_*) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\rho_{\sigma_{\rm osc}}}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right) = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma_*^2}{\rho_{\sigma_{dec}}} \right] , \tag{12}$$

en donde σ_* es igualmente la amplitud al comienzo de las oscilaciones sinusoidales. Aquí la densidad de energía del curvatón justo antes de que el curvatón decaiga $\rho_{\sigma_{dec}}$ es expresada en términos de la densidad de energía total ρ_{dec} para esa época, la densidad total de energía al comienzo de las oscilaciones sinusoidales ρ_{osc}, y σ_* por $\rho_{\sigma_{dec}} = (m_\sigma^2 \sigma_*^2/2) \left(\rho_{dec} - \rho_{\sigma_{dec}}/\rho_{osc}\right)^{3/4}$. Después de evaluar $\partial/\partial\sigma_*$, con ρ_{dec} y ρ_{osc} fijos, obtenemos $N_{,\sigma_*} = (2r/3\sigma_*)$, en donde $r \equiv 3\rho_{\sigma_{dec}}/(3\rho_{\sigma_{dec}} + 4\rho_{r_{dec}})$, siendo $\rho_{r_{dec}}$ la densidad de energía de radiación justo antes de que el curvatón decaiga. Derivando de nuevo se encuentra [6, 8]

$$f_{NL} = -\frac{5}{6} \frac{N_{,\sigma_*\sigma_*}}{N_{,\sigma_*}^2} = \frac{5}{3} + \frac{5}{6} r - \frac{5}{4r} , \tag{13}$$

lo cual concuerda de forma perfecta con el f_{NL} ya obtenido mediante un cálculo dispendioso usando teoría de perturbaciones cosmológicas a primer y segundo orden [3, 5].

Agradecimientos: Este trabajo cuenta con el apoyo de COLCIENCIAS a través del proyecto de investigación No. 1102-333-18674 CT-174-2006, y de la DIEF (UIS) a través del proyecto de investigación No. 5134. Y.R. agradece al programa ECOS-NORD, proyecto C06P02, por su apoyo en movilidad.

Referencias

[1] A.R. Liddle, D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure.* Cambridge University Press, 2000.

[2] D.H. Lyth, D. Wands, "Generating the Curvature Perturbation without an Inflaton", *Physics Letters B*, **524**, 5-14, (2002).

[3] D.H. Lyth, C. Ungarelli, D. Wands, "Primordial Density Perturbation in the Curvaton Scenario", *Physical Review D*, **67**, 023503 (2003).

[4] J. Maldacena, "Non-Gaussian Features of Primordial Fluctuations in Single Field Inflationary Models", *Journal of High Energy Physics*, **0305**, 013 (2003).

[5] N. Bartolo, S. Matarrese, A. Riotto, "Non-Gaussianity in the Curvaton Scenario", *Physical Review D*, **69**, 043503 (2004).

[6] D.H. Lyth, Y. Rodríguez, "Inflationary Prediction for Primordial Non-Gaussianity", *Physical Review Letters*, **95**, 121302 (2005).

[7] Y. Rodríguez, *The Origin of the Large-Scale Structure in the Universe: Theoretical and Statistical Aspects.* arXiv:astro-ph/0507701.

[8] M. Sasaki, J. Väliviita, D. Wands, "Non-Gaussianity of the Primordial Perturbation in the Curvaton Model", *Physical Review D*, **74**, 103003 (2006).

[9] D.N. Spergel, *et. al.*, "Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology", *Astrophysical Journal Supplement Series*, **170**, 377-408, (2007).

[10] E. Komatsu, D.N. Spergel, "Acoustic Signatures in the Primary Microwave Background Bispectrum", *Physical Review D*, **63**, 063002 (2001).

[11] R.K. Sachs, A.M. Wolfe, "Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background", *Astrophysical Journal*, **147**, 73-90, (1967).

Fredy F. Parada
Escuela de Física, UIS,
Bucaramanga, Colombia
e-mail: confredyfabian@gmail.com

Yeinzon Rodríguez
Centro de Investigaciones,
Universidad Antonio Nariño,
Cra 3 Este # 47A - 15, Bogotá, *y*
Escuela de Física, UIS,
Bucaramanga, Colombia
e-mail: yeinzon.rodriguez@uan.edu.co