Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 24, No. 2, 2006, pág. 69–75

Sobre el acotamiento de las soluciones y existencia de ciclo límite de una ecuación de segundo orden

Sandy Sánchez-Domínguez* & Antonio Iván Ruiz-Chaveco*

Resumen. En el presente trabajo se demuestra una condición necesaria y suficiente para el acotamiento de todas las soluciones de la ecuación

$$x'' + g(x)x' + a(t)f(x)h(x') = 0.$$

Además, para el caso particular en que $a(t) = 1$ para todo $t \geq 0$, se demuestra la existencia de un ciclo límite estable.

Abstract. In this paper it is proven a necessary and sufficient boundedness condition for all solutions of the equation

$$x'' + g(x)x' + a(t)f(x)h(x') = 0.$$

In particular, when $a(t) = 1$ for $t \geq 0$, it is proven the existence of a stable limit cycle.

1. Introducción

En [2] los autores introducen una condición necesaria y suficiente para el acotamiento de todas las soluciones de la ecuación $x' + a(t)f(x) = 0$, la cual fue extendida a otras ecuaciones más generales en [5, 6, 7].

En [4] y[8] este problema es tratado haciendo uso de otra condición necesaria y suficiente.

En este trabajo se demuestra la existencia de un ciclo límite haciendo uso de condiciones más débiles que la usada en la literatura en general (ver [1, 9, 10]).

Palabras y frases claves: acotamiento de soluciones, existencia de soluciones.
MSC2000: Primaria: 34A12. Secundaria: 34A99.

* Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba 90500, CUBA, *e-mails*: `sandys@csd.uo.edu.cu`, `sandys1978@gmail.com`, `iruiz@csd.uo.edu.cu`, `iruiz2005@yahoo.es`

Sea dada la ecuación diferencial

$$x'' + g(x)x' + a(t)f(x)h(x') = 0, \tag{1}$$

la cual es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x' = y - G(x), \\ y' = -a(t)f(x)h(y - G(x)), \end{cases} \tag{2}$$

donde $G = \displaystyle\int_0^x g(s)ds$, y se supone que las funciones a, f, G y h son continuas y satisfacen alguna condición de existencia y unicidad para las soluciones del sistema (2).
En adelante supondremos que se satisfacen las condiciones siguientes:

(A) Existen constantes a y A tales que $0 < a \leq a(t) \leq A < \infty$.

(G) Existe una constante $G_0 > 0$ tal que $G(x) \geq -G_0$ para toda $x > 0$ y $G(x) \leq G_0$ para toda $x < 0$.

(H) Existen constantes h y H tales que $0 < h \leq h(y) \leq H < \infty$.

(F_0) Existe una constante $\bar{x} > 0$ tal que $xf(x) > 0$ para $|x| > \bar{x}$.

2. Resultados preliminares

En esta sección se demostrarán los resultados de los que se hará uso posteriormente.

Lema 2.1. *Si se satisfacen las condiciones (A) y (H) del numeral anterior, entonces para cualesquiera $w > 0$ y $q < p$ existe s tal que la trayectoria del sistema (2) que en $t = t_0$ está en (q, s) interseca la recta $x = p$ en algún instante $t_1 > t_0$, y se cumple que $y(t) > w$ para $t \in [t_0, t_1]$.*

Demostración. Como consecuencia de las condiciones (A), (H) y la continuidad de las funciones G y f, se tiene que $\left|\dfrac{dy}{dx}\right| < N$ para $q \leq x \leq p$ y algún $N > 0$, y por tanto existe un s suficientemente grande tal que la recta $y = s - N(x - q)$ se mantiene por encima de $y = G(x)$, para $q \leq x \leq p$.
Así, la trayectoria $(x(t), y(t))$ tal que $x(t_0) = q$, $y(t_0) = s$ interseca la recta $x = p$ en algún instante $t_1 > t_0$ con $y(t) > w$ para $t \in [t_0, t_1]$. ☑

Lema 2.2. *Si se satisfacen las condiciones (A) y (H), entonces para cualesquiera $w > 0$, $q < p$, existe un s tal que la trayectoria del sistema (2) que en $t = t_0$ está en $(p, -s)$ interseca la recta $x = q$ en algún instante $t_1 > t_0$, y se cumple que $y(t) < -w$ para todo $t \in [t_0, t_1]$.*

Demostración. La demostración de este lema es similar a la del lema anterior. ☑

Lema 2.3. *Si se satisfacen las condiciones (A), (G), (H) y (F_0), y además*

$$\limsup_{x\to\pm\infty}\{|G(x)| + F(x)\} = +\infty, \tag{3}$$

donde $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, *entonces la trayectoria que pasa por* (x_0, y_0), $x_0 \geq 0$, $y_0 > G(x_0)$, *para* $t = t_0$, *interseca la curva* $y = G(x)$ *o tiende a un punto* $(\hat{x}, G(\hat{x}))$ *tal que* $f(\hat{x}) = 0$, $\hat{x} > 0$.

Demostración. Supóngase que existe una trayectoria $(x(t), y(t))$ que pasa por el punto

$$(x_0, y_0) \in \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y > G(x)\}$$

para $t = t_0$, la cual no interseca la curva $y = G(x)$ ni tiende a ningún punto $(\hat{x}, G(\hat{x}))$ tal que $f(\hat{x}) = 0$, y supóngase además que dicha trayectoria está definida en el intervalo maximal (t_0, T), $(T \leq +\infty)$. Como $y(t) > G(x(t))$, se tiene que $\dfrac{dx}{dt} > 0$, de esta forma hay dos casos posibles:

1. $\lim_{t\to T} x(t) < +\infty$ y $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.
2. $\lim_{t\to T} x(t) = +\infty$.

Como consecuencia del Lema 2.1 el primer caso no es posible.
Considere que el segundo caso es válido y que $\limsup_{x\to\infty} G(x) = +\infty$; entonces, como $\dfrac{dy}{dx} < 0$, dicha trayectoria interseca la curva $y = G(x)$, lo que contradice lo supuesto inicialmente.
Por otra parte, si $G(x) < N$ para algún $N < \infty$, como $y(t)$ es decreciente, entonces se cumple que $y_0 \geq y(t) \geq M$ para algún $M \geq N$, y así se tiene que

$$\frac{dy}{dx} \leq -\frac{ah}{y_0 - G_0} f(x), \tag{4}$$

integrando (3) entre t_1 y t se obtiene que

$$y(t) \leq y(t_1) - \frac{ah}{y_0 - G_0}\int_{x(t_1)}^{x(t)} f(s)ds; \tag{5}$$

pero $x(t) \to +\infty$ cuando $t \to T$, y de (3) y (5) se tiene que $y(t) \to -\infty$, lo cual contradice lo supuesto antes. Esto completa la demostración del Lema. ☑

Lema 2.4. *Si se satisfacen las condiciones (A), (G), (H), (F_0) y (3), entonces la trayectoria que pasa por* (x_0, y_0), $x_0 \leq 0$, $y_0 < G(x_0)$ *para* $t = t_0$, *interseca la curva* $y = G(x)$ *o tiende a un punto* $(\hat{x}, G(\hat{x}))$ *tal que* $f(\hat{x}) = 0$, $\hat{x} < 0$.

Demostración. La demostración de este lema se hace de forma análoga a la del Lema 2.3. ☑

3. Resultados fundamentales

En esta sección, a modo de conclusión, se obtienen condiciones necesarias o suficientes para el acotamiento de todas las soluciones del sistema (2).

Teorema 3.1. *Si se satisfacen las condiciones* (A), (G), (H) *y* (3), *entonces toda solución del sistema* (2) *es acotada.*

Demostración. Sea $(x(t), y(t))$ la trayectoria que pasa por el punto (x_0, y_0), y considérese

$$w_1 = \text{máx}\Big[|x_0|, x^*, \bar{x}\Big] + M, \qquad M > 0.$$

Dado $P_1 = (-w_1, s+\delta)$, donde s fue introducido en el Lema 2.1, denótese por $L(P_1)$ la trayectoria que pasa por P_1; entonces por el Lema 2.1, $L(P_1)$ interseca la recta $x = w_1$ en algún punto $P_2 = (w_1, y_2)$, donde $y_2 \geq G(w_1)$, y el arco de trayectoria P_1P_2 está por encima de la recta $y = w_2$ para algún $w_2 > 0$.

Si $y_2 > G(w_1)$, entonces por el Lema 2.3 la trayectoria $L(P_1)$ intercepta la curva $y = G(x)$ en algún punto $P_3 = (x_3, G(x_3))$ o tiende a P_3, donde el arco de trayectoria P_2P_3 está a la derecha de la recta $x = w_1$.

Considérese sobre la recta $x = w_1$ ó $x = x_3$, según sea el caso, el punto P_4 cuya ordenada y_4 es tal que, como consecuencia del Lema 2.2, la trayectoria $L(P_4)$ interseca la recta $x = -w_1$ en algún punto $P_5 = (-w_1, y_5)$, donde $y_5 \leq G(-w_1)$, y el arco de trayectoria P_4P_5 está por debajo de la recta $y = -w_2$.

Si $y_5 < G(-w_1)$, entonces por el Lema 2.4 la trayectoria $L(P_4)$ interseca la curva $y = G(x)$ en algún punto $P_6 = (x_6, G(x_6))$ o tiende a P_6, donde el arco de trayectoria P_5P_6 está a la izquierda de la recta $x = -w_1$. En virtud del Lema 2.1 se puede seleccionar sobre la recta $x = x_6$ un punto $P_7 = (x_6, y_7)$ tal que $L(P_7)$ interseque la recta $x = -w_1$ en algún punto P_8, donde el arco P_7P_8 está situado por debajo de la recta $y = s + d$.

Por el proceso seguido, el punto A_0 está contenido, según sea el caso, en algún compacto $\Pi_i, (i = 1, ..., 4)$, donde

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= P_1P_2 \bigcup \overline{P_2P_4} \bigcup P_4P_5 \bigcup \overline{P_5P_1},\\
\Pi_2 &= P_1P_2 \bigcup \overline{P_2P_4} \bigcup P_4P_5P_6 \bigcup \overline{P_6P_7} \bigcup P_7P_8 \bigcup \overline{P_8P_1},\\
\Pi_3 &= P_1P_2P_3 \bigcup \overline{P_3P_4} \bigcup P_4P_5 \bigcup \overline{P_5P_1},\\
\Pi_4 &= P_1P_2P_3 \bigcup \overline{P_3P_4} \bigcup P_4P_5P_6 \bigcup \overline{P_6P_7} \bigcup P_7P_8 \bigcup \overline{P_8P_1}.
\end{aligned}$$

Si en los compactos Π_i, (con $i = 1, ..., 4$) los arcos de trayectoria son tomados de los sistemas tales que $a(t) = a$ si $\operatorname{sg}[f(x)(y - G(x))] > 0$ y $a(t) = A$ si $\operatorname{sg}[f(x)(y - G(x))] \leq 0$, entonces $(x(t), y(t))$ que pasa por A_0 para $t = t_0$ no puede intersecar los arcos antes indicados, pues sobre estos el producto escalar de la normal exterior $(-y', x')$ con el vector direccional (x', y') es no positivo. Además, en los segmentos $\overline{P_2P_4}$ y $\overline{P_3P_4}$ el campo de velocidades se dirige de derecha a izquierda, y en los segmentos $\overline{P_6P_7}$, $\overline{P_5P_1}$ y $\overline{P_8P_1}$ de izquierda a derecha; por tanto dicha trayectoria se mantiene en algunos de estos compactos, lo cual garantiza su acotamiento. ☑

Teorema 3.2. *Si se satisfacen las condiciones* (A), (G) *y* (H), *entonces la condición* (3) *es necesaria para el acotamiento de las soluciones del sistema* (2).

Demostración. Si la condición (3) no se satisface, entonces existe $N > 1$ tal que $|G(x)| < N$ y $F(x) < N$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y de aquí se deduce que existe $x_0 > x^*$ tal que

$$\int_{x_0}^{x} f(s)ds < \frac{1}{aH} \quad \text{para } x > x_0. \tag{6}$$

Sean $y_0 > 3N$ y $(x(t), y(t))$ la trayectoria que pasa por (x_0, y_0) para $t = t_0$. Para esta trayectoria se cumple que $y(t) > 2N$ para $t > t_0$. Supóngase que esto no es cierto, es decir, que existe un $\bar{T} > t_0$ tal que $y(\bar{T}) = 2N$ y $y(t) > 2N$ si $t \in (t_0, \bar{T})$. Así, por lo expresado antes se tiene que $y(t) - G(x(t)) \geq N > 0$ para $t \in (t_0, \bar{T})$, y por tanto $x(\bar{T}) > x(t_0)$.

Integrando la ecuación

$$dy = -\frac{a(t)h(y - G(x))f(x)}{y - G(x)}dx$$

entre t_0 y $\bar{T}$ tenemos

$$y(\bar{T}) - y(t_0) = -\int_{x(t_0)}^{x(\bar{T})} \frac{a(t)h(y - g(x))f(x)}{y - g(x)}dx > -\frac{AH}{N}\int_{x(t_0)}^{x(\bar{T})} f(x)dx > -\frac{1}{N}. \tag{7}$$

Pero

$$y(\bar{T}) - y(t_0) < -N,$$

entonces de (7) y la desigualdad anterior se deduce que $N^2 < 1$. Esta contradicción implica que $y(t) > 2N$ para todo $t \geq t_0$, y así $x' > N$, y por tanto $x(t) > x(t_1) + N(t - t_1)$, la cual constituye una solución no acotada. ☑

A modo de resumen de lo expresado hasta aquí se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Si se satisfacen las condiciones* (A), (G), (H) *y* (F_0), *entonces todas las soluciones del sistema* (2) *son acotadas si y sólo si la condición* (3) *se cumple.*

Observación. En este resultado se generalizan resultados aplicados antes sólo a sistemas autónomos.

4. Existencia de ciclo límite

Tomando como punto de partida los resultados precedentes se puede concluir el estudio de las trayectorias del sistema (2), obteniendo condiciones para la existencia de ciclo límite. Para esto se estudiará el siguiente caso en particular de la ecuación (1). Supóngase se satisfacen las condiciones

(A_1) Supóngase en (A) que $a = A = 1$;

(F_1) En (F_0) considérese que $\bar{x} = 0$;

(G_1) Se satisface la condición (G) y además $g(0) < 0$.

Así la ecuación (1) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -g(x)y - h(y)f(x). \end{cases} \tag{8}$$

Teorema 4.1. *Si se satisfacen las condiciones* (A_1), (F_1), (G_1), (H) *y* (3)*, entonces el sistema* (8) *tiene un ciclo límite estable.*

Demostración. Para el sistema (8) se satisfacen las condiciones exigidas en el Teorema 3.3, por tanto cualquier solución con condiciones iniciales en un compacto Π_i, (con $i = 1, ..., 4$) se mantiene en dicho compacto para algún $i = 1, ..., 4$ según sea el caso.
Considérese ahora la función de Lyapunov

$$U(x, y) = F(x) + H(y), \qquad H = \int_0^y \frac{v}{h(v)} dv,$$

la cual es positivamente definida debido a las condiciones impuestas antes.
La derivada de $U(x, y)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (8) tiene la forma

$$\frac{dU}{dt}(x(t), y(t)) = -\frac{y^2 g(x)}{h(y)},$$

lo que quiere decir que $\frac{dU}{dt}(x(t), y(t)) > 0$ en una vecindad del origen, y por tanto la posición de equilibrio es inestable; esto, unido al razonamiento anterior, asegura la existencia de un ciclo límite estable. ☑

Observación. Este resultado generaliza el conocido Teorema de Lienard (ver [4]).

Referencias

[1] O. BLAKER. *Análisis no lineal*. Editorial Mir. Moscú (1969).

[2] T. BURTON & R. GRIMMER. "On the Asintotic Behaviour of Solution of $x'' + a(t)f(x) = 0$". *Proc. Comb. Phil. Soc.* #70, 1971.

[3] T. BURTON & E. TOWNSED. "Estability Regions of the Forced Lienard Equation". *J. London Math. Soc.*, 1971.

[4] HUANG LIHONG. "On the Necesary and Sufficient Conditions for the Boundedness of the Solutions of the Nonlinear Oscillating Equation". *Nonlinear Analysis. Theory Methods and Applications.* Vol. 23, #11, 1994.

[5] J.E. NÁPOLES y J.A. REPILADO. "Prolongabilidad, acotamiento y oscilación de las soluciones del sistema $x' = a(y) - b(y)f(x)$, $y' = -a(t)f(x)$". *Revista de Ciencias Matemáticas. U. H.* Vol. XV, #1, 1994.

[6] J.A. REPILADO y A.I. RUIZ. "Sobre el Comportamiento de las soluciones de la ecuación $x'' + g(x)x' + a(t)f(x) = 0$ (II)". *Revista de Ciencias Matemáticas. U. H.* Vol. VIII, #3, 1986.

[7] J.A. Repilado y A.I. Ruiz. "Sobre las propiedades de las soluciones de la ecuación $u''+a(t)f(u)h(u')=0$". *Revista de Ciencias Matemáticas. U. H.* Vol. IX, #3, 1987.

[8] J. Sugie. "On the Generalized Lienard Equation Withond the Signun Condition". *J. Math. Analysis Applic.* 128, 1987.

[9] J. Sugie "Some Criteria of the Existence of Limit Cycles for a Planar System of Linear Type". *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applic.* Vol. 21, #11, 1993.

[10] Huang Xun-Cheng. "Uniqueness of Limit Cycles in a Lineard Type System". *J. Math. Anal. and Applic.* 181, 1994.

[11] Y. R. Zhou. "On the Boundedness of the Solutions of the Nonlinear Oscillating Equation". *J. Math. Anal. and Applic.* 164, 1992.

Sandy Sánchez-Domínguez & Antonio Iván Ruiz-Chaveco
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de Oriente
Santiago de Cuba, Cuba.
e-mail: sandys@csd.uo.edu.cu,iruiz@csd.uo.edu.cu