Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 24, No. 1, 2006, pág. 25–30

Caos en el espacio de los códigos

William González Calderón*

Resumen. Las dinámicas de la función desplazamiento o la función corrimiento (*shift* en inglés) en el espacio de los códigos presentan un comportamiento caótico según la definición de caos de R. Devaney [2]. En este artículo presentamos una prueba del caos en este sistema.

Abstract. Dynamic of the function the shift in the space of the codes they present a chaotic behavior according to the definition of chaos of R. Devaney [2]. In this article we presented a test of the chaos in this system.

Introducción

Hay diversas formas de relacionar el conjunto de Cantor con el caos. El carácter caótico de ciertos sistemas dinámicos nos genera la inquietud: ¿qué participación tiene el conjunto de Cantor en este comportamiento? ¿Estará el conjunto de Cantor presente siempre en las dinámicas caóticas de estos sistemas? Si el conjunto de Cantor es el espacio del sistema, ¿será caótico?

Apoyados en el libro de R. Holmgren [3] intentamos dar respuestas a estos interrogantes. Así mismo, queremos presentar una prueba *alternativa* de la forma como el autor demuestra que el espacio de los códigos (homeomorfo al conjunto de Cantor) es caótico bajo la función desplazamiento.

Palabras y frases claves: función corrimiento o desplazamiento (shift), espacio de los códigos, caos.

MSC2000: Primaria: 37F99. Secundaria: 28A80.

* Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, *e-mail*: `williamgc77@netscape.net`.

1. Caos en sistemas dinámicos

Definición 1.1. Un **sistema dinámico** es una función $f : X \to X$ definida en un espacio métrico (X, d), el cual denotamos por $\{X; f\}$. La **órbita** de un punto $x \in X$ es la sucesión de puntos del espacio que se obtienen iterando la función indefinidamente, se denota como $O_f(x)$ y se define mediante la igualdad

$$O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots\},$$

donde $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f(x)}_{n \text{ veces}}$.

Las dinámicas de una función se refieren al comportamiento de las órbitas para los puntos del espacio. Las órbitas pueden presentar diversos comportamientos: divergentes, acotadas, no acotadas, convergentes a un punto del espacio o convergentes al infinito (si son funciones reales). Nos interesa recordar la definición de órbita periódica.

Definición 1.2. Sea $\{X; f\}$ un sistema dinámico. Si $f(x) = x$ para $x \in X$, decimos que x es **punto fijo** de f; en este caso, la órbita $O_f(x) = \{x, x, \ldots, x, \ldots\}$. Un punto x es **punto eventualmente fijo** de f, si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geq N : f^{n+1}(x) = f^n(x)$.

Definición 1.3. Sea $\{X; f\}$ un sistema dinámico. Un **punto periódico** de f es un punto $x \in X$ tal que $f^n(x) = x$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En tal caso, n es un periodo de x, y el $\min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$ se denomina el **periodo principal** de x.

La órbita de un punto periódico de f es conocida como el **ciclo** de f. El periodo principal de un ciclo de f es el número de puntos distintos contenidos en el ciclo. Un periodo de un ciclo de f es el periodo de un punto en el ciclo.

La densidad de los puntos periódicos en el espacio, la transitividad topológica y la sensibilidad a condiciones iniciales son las condiciones establecidas en la definición de caos [2].

Definición 1.4. Un sistema dinámico $\{X; f\}$ es **sensible a condiciones iniciales**, si existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $y \in X$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x, y) < \varepsilon$ y $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

La sensibilidad a condiciones iniciales significa que si en el espacio se toma un punto cualquiera, entonces se puede encontrar otro punto tan cercano a él como se quiera, de tal suerte que al iterar la función simultáneamente en los dos puntos, en algún momento la distancia entre sus órbitas será mayor que una constante dada.

Definición 1.5. Un sistema dinámico $\{X; f\}$ es **topológicamente transitivo**, si dados dos conjuntos abiertos cualesquiera U y V en X se tiene que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para cualesquiera dos conjuntos abiertos U y V en X, existe $z \in X$ tal que si $z \in U$ entonces $f^n(z) \in V$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

La definición de transitividad topológica significa que dados dos abiertos cualesquiera del espacio, existe una órbita que pasa por los dos conjuntos.

Proposición 1.6. *Un sistema dinámico $\{X; f\}$ es topológicamente transitivo si y sólo si para cualesquiera dos puntos x e y de X y para todo $\varepsilon > 0$, existe $z \in X$ tal que $d(z, x) < \varepsilon$ y $d(f^n(z), y) < \varepsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.7. Se dice que un sistema dinámico $\{X; f\}$ es **caótico** si se cumple que:

1. El conjunto de los puntos periódicos es denso en X.
2. $\{X; f\}$ es topológicamente transitivo.
3. El sistema $\{X; f\}$ es sensible a condiciones iniciales.

2. Dinámicas simbólicas caóticas

2.1. Espacio de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$

Definición 2.1. Para $N \in \mathbb{N}$, sea $\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$. El **espacio de los códigos** es el conjunto $\Sigma^{\mathbb{N}} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \Sigma\}$ formado por todas las sucesiones de símbolos de Σ. El conjunto de los códigos también se puede escribir como

$$\Sigma^{\mathbb{N}} = \{x_1 x_2 x_3 \ldots \mid x_i \in \Sigma, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

El espacio de los códigos se conoce como el espacio simbólico.

Nota. Para los códigos que tienen un dígito o un número finito de dígitos que se repiten indefinidamente, podemos abreviar su expresión con una línea horizontal por encima de las cifras repetidas. Ejemplo: $111\ldots \equiv \overline{1}$, $102102\ldots \equiv \overline{102}$ y $10000\ldots \equiv 1\overline{0}$.

Métrica en $\Sigma^{\mathbb{N}}$

En el conjunto de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$ se define la siguiente métrica,

$$d(x,y) = d(x_1x_2x_3\ldots,\ y_1y_2y_3\ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}.$$

En [1] se demuestra que efectivamente la función d cumple los axiomas de la definición de métrica. Al dotar a $\Sigma^{\mathbb{N}}$ de una métrica, podemos hablar de distancia entre códigos, y podemos trabajar con conjuntos abiertos, cerrados, densos, sucesiones, funciones continuas, etc.

En [1] se hace una descripción gráfica de las bolas en el espacio de los códigos, y se demuestra una proposición que permite caracterizar la distancia entre dos códigos “cercanos”.

Proposición 2.2. *x e y son códigos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ que coinciden en sus primeros k símbolos, si y sólo si* $d(x,y) < \dfrac{1}{(N+1)^k}$.

La función desplazamiento o corrimiento (shift)

Definición 2.3. La función $\sigma : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$, a la que llamaremos función **desplazamiento o corrimiento**, se define como

$$\sigma(x_1x_2x_3x_4\ldots) = x_2x_3x_4\ldots$$

La función corrimiento le “corta” la primera cifra x_1 al código y corre las demás cifras un lugar a la izquierda (vista del lector). Al iterar k veces la función corrimiento lo que hacemos es “cortarle” las primeras k cifras al código x, quedando

$$\sigma^k(x) = x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots$$

Las dinámicas simbólicas constituyen la forma común de nombrar las dinámicas de la función *desplazamiento* definida de manera natural para el espacio de los códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$. La pareja $\{\Sigma^{\mathbb{N}};\sigma\}$ es un sistema dinámico.

2.2. Caos en $\{\Sigma^{\mathbb{N}};\sigma\}$

Demostraremos el comportamiento caótico de las dinámicas simbólicas. Probaremos que el sistema $\{\Sigma^{\mathbb{N}};\sigma\}$ cumple las tres condiciones que definen el caos: densidad de los puntos periódicos en el espacio, la transitividad topológica y la sensibilidad a condiciones iniciales.

Proposición 2.4. *Los puntos periódicos son densos en* $\Sigma^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sean $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \varepsilon$.

Tomamos el código $y = \overline{x_1 x_2 \ldots x_k} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, punto periódico de $\Sigma^{\mathbb{N}}$. Por la Proposición 2.2, tenemos que $d(x,y) < \frac{1}{(N+1)^k} < \varepsilon$, porque los códigos x y y coinciden en sus primeros k símbolos.

Por lo tanto, el conjunto de los puntos periódicos es denso[1] en $\Sigma^{\mathbb{N}}$. ☑

Proposición 2.5. $\{\Sigma^{\mathbb{N}};\sigma\}$ *es sensible a condiciones iniciales.*

Demostración. Consideremos $\delta = \frac{1}{N+2}$, $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$. Por la propiedad arquimediana, tenemos que $\frac{1}{(N+1)^k} < \varepsilon$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Podemos encontrar un código $y \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ que coincida con x en las primeras k cifras, pero que no coincida en la $k+1$-ésima cifra, es decir $y_i = x_i$, para $i \in \{1,\ldots,k\}$ y $y_{k+1} \neq x_{k+1}$. Entonces, por la Proposición 2.2,

$$d(x,y) < \frac{1}{(N+1)^k} < \varepsilon.$$

Si iteramos la función desplazamiento k veces simultáneamente en los códigos x y y, tendremos que $\sigma^k(x)$ y $\sigma^k(y)$ no coincidirán en la primera cifra; entonces, usando nuevamente la Proposición 2.2, tenemos que

$$d(\sigma^k(x),\sigma^k(y)) \geq \frac{1}{N+1} > \frac{1}{N+2} = \delta.$$ ☑

Proposición 2.6. $\{\Sigma^{\mathbb{N}};\sigma\}$ *es topológicamente transitivo.*

Demostración. Sean $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$, y tenemos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N+1)^k} < \varepsilon$.

---

[1] Sea (X,d) espacio métrico y $S \subset X$. S es denso en X, si para todo $x \in X$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $y \in S$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$.

Podemos encontrar un código $z = x_1x_2 \dots x_ky_1y_2 \dots y_kz_1z_2 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que

$$d(z,x) < \frac{1}{(N+1)^k} < \varepsilon \ \text{ y } \ d(\sigma^k(z),y) < \frac{1}{(N+1)^k} < \varepsilon, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}.$$

En las desigualdades se utiliza la Proposición 2.2; nótese que $\sigma^k(z) = y_1y_2 \dots y_kz_1z_2 \dots$ Por la Proposición 1.6, el sistema $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ es topológicamente transitivo. ☑

Corolario 2.7. *El sistema* $\{\Sigma^{\mathbb{N}}; \sigma\}$ *es un sistema dinámico caótico.*

Referencias

[1] Estévez Édgar. *El Espacio de los Códigos.* Monografía, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 1994.

[2] Devaney Robert. *An Introduction Chaotic Dynamical Systems.* Addison-Wesley, 2da. edición, 1989.

[3] Holmgren Richard. *A First Course in Discrete Dynamical Systems.* Springer, 2da. edición, 1996.

William González Calderón
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Santander, Colombia.
e-mail: williamgc77@netscape.net