REPRESENTACION DE DISTRIBUCIONES MEDIANTE FUNCIONES NO ESTANDAR

JUAN GUERERRO

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia

Resumen. Sea $(\mathcal{D})$ el espacio de funciones de clase (C^∞) con soporte compacto. Dada una distribución de Schwartz $\begin{array}{l} T : \mathcal{D} \longmapsto \mathbb{R} \\ f \longmapsto \langle T, f\rangle \end{array}$, es bien conocido que el valor $\langle T, f\rangle$ puede obtenerse utilizando una función no- estándar $h(\tau)$ mediante una integral en $\mathbb{R}^*$:

$$\langle T, f\rangle = Est \int_{\mathbb{R}^*} f^*(\tau) \cdot h(\tau) d\tau$$

En el presente artículo se establece la caracterización de la función no-estándar $h(\tau)$, concluyéndose que: Para cada intervalo no-estándar finito $[\alpha, \beta]$, una antiderivada de algún orden de la función $h(\tau)$ es de valor finito en $[\alpha, \beta]$.

1. Introducción

Sea $\mathcal{F}^*$ un ultrafiltro regular en $\mathbb{N}$; decimos que una sucesión (a_n) satisface una cierta propiedad "P" **para casi todo** n si y sólo si

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \text{ satisface la propiedad P } \} \in \mathcal{F}^*.$$

En $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se establece la relación de equivalencia "$\sim$" como sigue:

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ si y sólo si } a_n = b_n \textbf{ para casi todo } n.$$

La clase de equivalencia representada por la sucesión (a_n) se denota por $[(a_n)]$, y el cuerpo de números no-estándar $\mathbb{R}^*$ es el conjunto de todas las clases, o sea, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$. Dada una sucesión (f_n) de funciones reales, a la función $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}^*$ definida por:

$$f(\tau) = [(f_n(x_n))] \text{ para } \tau = [(x_n)] \in R^*$$

se le llama la función generada por la sucesión (f_n) , y se denota por $f =$ gen (f_n).

Por otra parte, sea $(\mathcal{E})$ el espacio de todas las funciones de clase $(\mathcal{C}^\infty)$ con la convergencia definida por la convergencia uniforme en compactos de todas sus derivadas. Si T es una distribución en $(\mathcal{E})$, entonces evidentemente T es una distribución de Schwartz (distribución en $(\mathcal{D})$). Son conocidos los siguientes resultados:

Teorema 1. *Sea T una distribución de Schwartz; T es una distribución en $(\mathcal{E})$ si y sólo si T es de soporte acotado.*

Ver [3] , 3.9 y 3.12.

Teorema 2. *Sean T una distribución con soporte acotado y K un intervalo cerrado que contiene al soporte de T. Entonces existen un entero m y una constante C tales que:*

$$|\langle T, f\rangle| \leq C \cdot \|f\|_{m,K} \text{ para todo } f \in (\mathcal{E})$$

donde

$$\|f\|_{m,K} = \sup_{\substack{0 \leq p \leq m \\ x \in K}} |\mathcal{D}^p f(x)|$$

Ver [3] , 4.3 y 4.4.

2. Función no-estándar relacionada con una distribución.

Sean $\delta_n(n = 1, 2, 3, \dots)$ funciones reales que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\delta_n(t) \in (C^\infty)$
(ii) $\delta_n(t) \geq 0$ para todo t real
(iii) $\delta_n(t) = 0$ si $|t| \geq \frac{1}{n}$
(iv) $\int_{\mathbb{R}} \delta_n(t)dt = 1$

Entonces $\delta = gen(\delta_n)$ es un modelo no-estándar de la función Delta de Dirac. (Ver [8]).

Dada una distribución de Schwartz T , se tiene (Ver [8]) :

$$\langle T, F\rangle = \text{Est} \int_{\mathbb{R}^*} h(\tau) \cdot f^*(\tau)d\tau \text{ para toda } f \in (\mathcal{D}) \tag{1}$$

donde

$$h = gen(h_n) \text{ con } h_n(x) = \langle T_y, \delta_n(y - x)\rangle. \tag{2}$$

Teorema 3. *Sean T una distribución en $(E), h(\tau)$ la función no-estándar dada en (2) ; entonces h tiene una antiderivada de valor finito en $\mathbb{R}^*$.*

Demostración. Sea $[-M+1, M-1]$ un intervalo real que contiene al soporte de T, basta demostrar que una antiderivada de algún orden de la función $h(\tau)$ es de valor finito en el intervalo no-estándar $[-M, M]^*$ ya que $h(\tau) = 0$ si $|\tau| \geq M$. Para ello tomaremos a C y m como la constante y el entero del teorema 2, donde K es el intervalo $[-M-1, M+1]$.

Consideramos a x como un parámetro fijo, que toma valores entre $-M$ y M, y evaluaremos $|(D^{-(m+1)}h_n)(x)|$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
|(D^{-(m+1)}h_n)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x} \cdots \int_{-\infty}^{x_3} \int_{-\infty}^{x_2} \langle T_y, \delta_n(y - x_1) \rangle dx_1 dx_2 \ldots dx_{m+1} \right| \\
&= \left| \left\langle T_y, \int_{-\infty}^{x} \cdots \int_{-\infty}^{x_3} \int_{-\infty}^{x_2} \delta_n(y - x_1)) dx_1 dx_2 \ldots dx_{m+1} \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle T_y, \int_{y}^{\infty} \cdots \int_{y_3}^{\infty} \int_{y_2}^{\infty} \delta_n(y_1 - x) dy_1 dy_2 \ldots dy_{m+1} \right\rangle \right| \\
&\leq C \cdot \|\sigma_n(y, x)\|_{m, K}
\end{aligned}
$$

donde

$$\sigma_n(y, x) = \int_{y}^{\infty} \cdots \int_{y_3}^{\infty} \int_{y_2}^{\infty} \delta_n(y_1 - x) dy_1 dy_2 \ldots dy_{m+1}$$

y $\|\sigma_n(y, x)\|_{m, K}$ es al norma de $\sigma_n(y, x)$ como función de la variable "y" en K (recordar que x es un parámetro fijo) :

$$\|\sigma_n(y, x)\|_{m, K} = \sup_{\substack{0 \leq p \leq m \\ y \in K}} |D^p \sigma_n(y, x)|$$

Se puede demostrar sin dificultad que $\|\sigma_n(y, x)\|_{m, K}$ no depende de n ni de x, o más precisamente:

$$\|\sigma_n(y, x)\|_{m, K} \leq (2M + 2)^m$$

para todo entero positivo n y para todo $x \in [-M, M]$. Si tomamos $s = m + 1$, entonces:

$$|(D^{-s}h_n)(x)| \leq C \cdot (2M + 2)^{s-1}$$

por lo tanto:

$$|D^{-s}h(\tau)| \leq C \cdot (2M + 2)^{s-1}$$

para todo $\tau \in [-M, M]^*$.

Teorema 4. *Sean T una distribución de Schwartz y $h(\tau)$ la función no-estándar dada en (2); entonces, para cada intervalo no-estándar finito $[\alpha,\beta]$, una antiderivada de algún orden de la función $h(\tau)$ es de valor finito, en $[\alpha,\beta]$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad se considera el intervalo no-estándar $[-M,M]^*$ donde M es un real positivo. Sea $\rho(x)$ una suavización de la función característica del intervalo real $[-M-1,M+1]$, definida de la siguiente manera:

(i) $\rho(x)=1$ si $x\in[-M-1,M+1]$
(ii) $\rho(x)\in(C^\infty)$
(iii) $\rho(x)=0$ si $x\notin[-M-2,M+2]$

Así, se tiene que para toda $f\in(\mathcal{E})$ la función $(\rho\cdot f)(x)\in(\mathcal{D})$ y por lo tanto, se puede definir una distribución $S=\rho\cdot T$ de soporte acotado, de la siguiente manera:

$$\langle S,f\rangle=\langle\rho\cdot T,f\rangle=\langle T,\rho\cdot f\rangle \text{ para } f\in(\mathcal{E}).$$

La función no-estándar $\hat{h}$ correspondiente a la distribución S:

$$\hat{h}=gen(\hat{h}_n),\hat{h}_n(x)=\langle S_y,\delta_n(y-x)\rangle$$

tiene una antiderivada de algún orden de valor finito en $[-M,M]^*$ (Teorema 3).

Ahora se mostrará que

$$\hat{h}(\tau)=h(\tau) \text{ para } \tau\in[-M,M]^*,$$

demostrando que para cada n , $\hat{h}_n(x)=h_n(x)$, si $x\in[-M,M]$.

En efecto, sea $x\in[-M,M]$ fijo,

(i) Si $|y-x|\leq\frac{1}{n}$ se tiene

$$\delta_n(y-x)=\rho(y)\cdot\delta_n(y-x).$$

(ii) Si $|y-x|\geq\frac{1}{n}$ se obtiene:

$$\delta_n(y-x)=0=\rho(y)\cdot\delta_n(y-x).$$

De (i) y (ii) se concluye que

$$\delta_n(y-x)=\rho(y)\cdot\delta_n(y-x) \text{ para todo } y\in\mathbb{R},$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\hat{h}_n(x)=\langle S_y,\delta_n(y-x)\rangle=\langle T_y,\rho(y)\cdot\delta_n(y-x)\rangle&=\langle T_y,\delta_n(y-x)\rangle\\&=h_n(x)\end{aligned}$$

Así, $\hat{h}_n(x)=h_n(x)$ para todo n y para todo $x\in[-M,M]$, lo cual permite concluir la igualdad $\hat{h}(\tau)=h(\tau)$ para $\tau\in[-M,M]^*$.

Nótese que el recíproco del Teorema 4 también es válido (Ver Teorema 9, [8]).

Ejemplo.

Sea

$$\begin{aligned}\langle T, f\rangle &= f(0) + (Df)(1) + (D^2 f)(2) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (D^k f)(k) \text{ para } f \in (\mathcal{D}),\end{aligned}$$

entonces T es una distribución de Schwartz. Notese que T no es una distribución en $(\mathcal{E})$. Tenemos :

$$h_n(x) = \langle T_y, \delta_n(y-x)\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (D^k \delta_n)(k-x),$$

entonces

$$h(\tau) = gen(h_n) = \delta(\tau) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (D^k \delta)(k-\tau) \text{ para } \tau \in \mathbb{R}^*,$$

donde $\delta = gen(\delta_n)$ es un modelo no-estándar de la función Delta de Dirac. Evidentemente, en el intervalo no-estándar $[-k, k]^*$ se tiene que $D^{-k-1}h$ es de valor finito.

Bibliografia

1. Apostol, T.M., *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Reading (1963).
2. Arsac, J., *Transformation de Fourier et Theorie des Distributions*, Dunod, París (1961).
3. Bremermann, H., *Distributions Complex Variables and Fourier Transformations*, Addison, Wesley, New York (1965).
4. Gillman y Jerison, *Rings of Continuous Funtions*, Van Nostrand (1960).
5. Guelfand, I.M. et Chilov, G.E., *Les Distributions*, Dunod, París (1962).
6. Robinson, A., *Non-Standar Analysis*, American Elsevier Publishing Company, Inc. (1974).
7. Takeuchi, Y., *Sucesiones de Funciones y Teoría de Distribuciones*, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Bogotá (1979).
8. Takeuchi, Y., *Teoría de Funciones No-estándar*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (1983).