# LOGICA Y MATEMATICA

ALBERTO CAMPOS

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas y Estadística

PARA LA CARRERA DE FILOSOFÍA
EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL

## OBJETIVOS GENERALES

1. INFORMACION MATEMATICA. **Ofrecer al estudiante la formación e información básicas en el campo de la matemática apropiadas para el estudio de la filosofía, de la filosofía de la matemática y de la historia de la filosofía.**

2. PROBLEMAS CONCEPTUALES. **Poner al estudiante en contacto con los problemas conceptuales que han surgido en los procesos históricos de constitución y desarrollo de teorías matemáticas y han tenido impacto en la reflexión filosófica.**

Los problemas conceptuales que interesan aquí son aquéllos que ayudan a reconstruir la situación que condujo al desarrollo de estas teorías; la recreación deber ser tal que permita ver claramente el problema y por qué tenía resonancia filosófica.

Un ejemplo lo da la noción de número, cuyo desenvolvimiento tiene que ir de los números figurados de los pitagóricos, por los inconmensurables, hasta la teoría de Eudoxio, poniendo en crisis de paso la divisa fundamental de los pitagóricos, "todas las cosas son número". A la misma línea de desarrollo histórico pertenece la creación cantoriana de números que, por concesión a la teología, no se llaman infinitos sino transfinitos.

Otro desarrollo interesante, desde análogo punto de vista, es el de los conceptos 'discreto' y 'continuo'; se inicia con los griegos y, después de continuar por los meandros de la llamada por algunos "metafísica del cálculo infinitesimal" y de las concepciones de la ciencia del siglo pasado, llega hasta la filosofía actual de la matemática y de la física.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Igualmente, otro de estos problemas conceptuales es el de la relación entre intuición y razonamiento formal. ¿Qué entienden por intuición los matemáticos? y los filósofos? ¿Qué tanto se vale el filósofo de la intuición? ¿Qué tanto el matemático? ¿Qué relación hay entre intuición y desarrollo axiomático?.

Estas cuestiones repercuten, por ejemplo, en la discusión de los fundamentos de la geometría. Desde los pitagóricos, la aritmética estudia lo discreto, la geometría los continuo. Euclides presenta la formulación de la geometría que Kant toma al pie de la letra. En el siglo XIX el filósofo Comte ubica la geometría entre la matemática pura y las ciencias naturales. Con la invención de las geometrías no euclidianas surgen nuevas ideas sobre lo que es la geometría. A pesar de estas diversas opiniones, aún no se ha logrado consenso en lo concerniente a la naturaleza o estructura del espacio, por ejemplo.

Un problema conceptual que aparece en varios lugares de la historia del pensamiento matemático, y aún más, que linda con el terreno filosófico, es el de existencia; ¿cuál es el tipo de existencia de los entes matemáticos?.

Otro problema es el del proceso de depuración de conceptos. Acerca de un término tan empleado como el de 'triángulo', por ejemplo, cabe hacerse varias preguntas: ¿qué es lo que constituye un triángulo? Los tres lados? Los tres ángulos? La región comprendida? ¿Qué no se puede omitir cuando se quiere caracterizar un triángulo? Estos procesos de depuración de conceptos pueden apoyarse en un cuidadoso análisis del lenguaje.

3. RAZONAMIENTO RIGUROSO. **Infundir en el estudiante el hábito de la precisión en el lenguaje y ejercitarlo en el razonamiento riguroso.**

El cumplimiento de este objetivo requiere, en primer lugar, el conocimiento histórico de los métodos demostrativos (por ejemplo, los codificados por Aristóteles o por los estoicos) y de los razonamientos falaces; en segundo lugar, la ejercitación en algunos de estos métodos demostrativos; en tercer lugar, el efectivo entrenamiento en cálculos lógicos recientes.

4. SIMBOLISMO. **Llevar al estudiante a apreciar las ventajas de la simbolización, especialmente la facilidad para producir nuevos resultados gracias al manejo apropiado del simbolismo, la facilidad para la verificación finitista de la corrección de expresiones y la facilidad para ver relaciones sugeridas por un buen simbolismo.**

Hay que ejercitar al estudiante: a) en la simbolización de textos redactados en el lenguaje corriente e, inversamente, en la interpretación en el lenguaje ordinario de expresiones simbolizadas; b) en la formalización de textos matemáticos, es decir, en el tratamiento de un conjunto de elementos no determinados intrínsecamente sino sólo por las relaciones que los vinculan entre sí; c) en el empleo e interpretación de dispositivos gráficos.

Es un hecho que una buena notación ofrece ventajas muy apreciables. En primer lugar, una buena notación permite la producción de resultados. Más aún, frente a ciertos problemas la selección adecuada de una notación puede ser decisiva en la obtención de una solución. En particular, el cálculo algebraico cartesiano es tan expedito, comparado con el de los griegos, porque cada fórmula condensa todo un programa o algoritmo, cuya elaboración exigió, con frecuencia, pacientes ensayos y errores. El lenguaje corriente queda desbordado frente a un simbolismo eficiente.

En segundo lugar, cuando se quiere mostrar que determinada argumentación es inadecuada, es a veces posible construir una situación matemática análoga y ver fácilmente en este contexto una posible falacia que el renombre del autor o el compromiso afectivo con la conclusión no permitían ver. Un buen manejo del simbolismo permite efectuar el cálculo leibniziano de validez de argumentos con el fin de comprobar la corrección de la demostración o de poner al descubierto un sofisma. En este caso, el simbolismo exhibe el esqueleto, por así decirlo, de la argumentación.

En tercer lugar, algunas notaciones permiten explicitar regularidades y aclarar relaciones. Baste comparar el signo de igualdad con otros signos para distintos tipos de equivalencia. El hecho de que haya signos distintos puede sugerir ya al estudiante la pregunta por la diferencia conceptual y puede servir de guía para la explicación del docente. Es más: Una vez que se saben manipular esos signos, su uso deja translucir una regularidad que muestra ahora en qué no se diferencian las relaciones correspondientes.

5. EVOLUCION DE LA MATEMATICA. **Inducir al estudiante a apreciar la permanente evolución de la matemática.**

Desde los griegos hasta los albores del siglo XXI, la matemática evoluciona según un modo de desarrollo que le es peculiar. Por ejemplo, en los *Elementos* de Euclides quedó la simiente que a la larga provocaría al nacimiento de las geometrías no euclidianas, la reformulación de los *Elementos* y su formalización por parte de Hilbert, y posteriormente, la reconstrucción de la matemática como estudio de estructuras por parte de Bourbaki.

Es de señalar la interdependencia entre la evolución de las ideas matemáticas y las filosóficas. Por ejemplo, la filosofía kantiana se apoya significaticamente sobre la geometría euclidiana y afecta a su vez la difusión de las geometrías no euclidianas.

6. LIMITACIONES DE LOS SISTEMAS FORMALES. **Hacer ver al estudiante diversas utilizaciones de los sistemas formales y los alcances y limitaciones de esos sistemas.**

La matemática puede estudiar problemas que se presentan en otras disciplinas donde no han podido ser resueltos (problemas exógenos). Estudia también problemas que surgen de la misma investigación matemática (problemas endógenos). Problemas exógenos y endógenos contribuyen el aumento del acervo matemático, ora sencillamente por el logro de la solución, ora porque obligan a crear nuevos métodos para resolverlos. Algunos problemas, empero, surgen por los fracasos en los intentos de fundamentar los métodos matemáticos y de extender su campo de aplicación. Tales problemas son los que ponen en tela de juicio los procedimientos seguidos hasta entonces; no obstante, la creatividad matemática es tal que, las más de las veces, es capaz de enriquecerse de los defectos puestos así en evidencia. A partir de las antinomias (las primeras de las cuales habían aparecido en la obra de pensadores anteriores y habían sido o superficialmente resueltas o dejadas de lado como meras curiosidades), lógicos y matemáticos, bajo la amenaza de contradicción de todo el sistema, adelantan una serie de investigaciones que comienzan con el examen exhaustivo de la situación paradojal, continúan con formulaciones alternas que buscan la superación de ésta y que se convierten en fuentes de problemas fundamentales, y acaban por añadir nuevos afluentes al caudal matemático.

En el estado actual de la evolución de la matemática, a diferencia de los anteriores, ha llegado a ser muy claro que el sistema formal es el instrumento por excelencia para lógicos y matemáticos; pero, ha llegado a ser muy claro igualmente, que ese instrumento no es todopoderoso sino que está sujeto a restricciones, como cualquier instrumento.

El arte de hacer algo tiene que ver, entre otras cosas, con el conocimiento de las capacidades y de los límites de los instrumentos empleados.

Los sistemas formales son insustituibles, en primer lugar, cuando se trata de perfeccionar la organización de un conjunto de conocimientos relativamente dispersos. En segundo lugar, para situar en una perspectiva más amplia los problemas de investigación. En tercer lugar, para expresar la multivalencia de las teorías matemáticas, propósito con el que fueron creados por Hilbert. En cuarto lugar, para generalizar teorías, porque, dada la multivalencia que hace posible una enorme economía de pensamiento, la generalización de una teoría se consigue mediante los sistemas formales. En quinto lugar, para el progreso de la investigación, en cuanto muchas relaciones sólo es posible hallarlas gracias a la deducción formal.

La creación matemática, empero, como cualquiera otra creación, se hace, sobre todo, por medio de la intuición. También se debe a la intuición la mejor disposición de los sistemas formales. Por otra parte, antes de la axiomatización se usa el razonamiento informal. En general, todos los científicos hacen vasto empleo del método heurístico. Fuera de la lógica y de la matemática, raramente se llevan los resultados así obtenidos a una redacción axiomátizada. Ni la simbolización, ni menos aún la formalización, son imprescindibles. En efecto, se acepta la validez de una argumentación bajo el supuesto de que el autor ha utilizado correctamente reglas implícitamente admitidas.

Con frecuencia los filósofos han mirado hacia la matemática, sea para admirar la eficacia de sus procedimientos, sea para criticarlos y rebajarlos. Conviene en sumo grado a los estudiantes de filosofía percatarse del ámbito de aplicación de los métodos matemáticos y conocer tanto su poderío como sus limitaciones.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS PARA LOS CUATRO CURSOS.

El programa de Lógica y Matemática para la Filosofía se compone de cuatro cursos, así:

L y M I. Introducción a la lógica y la matemática griegas antes de Euclides.

L y M II. Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.

L y M III. Introducción a la lógica contemporánea.

L y M IV. Introducción a la matemática contemporánea.

El primer curso fue sugerido por los mismos estudiantes, interesados en saber cuál era la matemática de los filósofos presocráticos y de Sócrates, Platón y Aristóteles, estudiados durante los primeros semestres de la carrera de filosofía. El curso considera la matemática en su estado deductivo naciente y la necesidad que se manifiesta paulatinamente de organizar los conocimientos que se van acumulando. Surge paralelamente la discusión acerca de la definición de conceptos y la necesidad de afianzar los enunciados en otros previamente formulados. El curso hace especial énfasis en la derivación de un conocimiento a partir de otro, una de las grandes preocupaciones de los filósofos griegos, que cristalizó la axiomatización y que constituye parte del legado griego a la cultura occidental.

El estudiante debe lograr el manejo de los cálculos matemáticos comunes en las escuelas pitagórica y platónica y de las bases matemáticas necesarias para reformular las paradojas de Zenón. Debe ser capaz de ilustrar con ejemplos apropiados el silogismo aristotélico y los modos indemostrables de los estoicos; y además, de advertir falacias en la argumentación.

El segundo curso comienza con el estudio de la axiomatización de la geometría realizada por Euclides en los *Elementos*, estudio que se realiza al rededor de un análisis de su demostración del teorema de Pitágoras. Prosigue, luego, con la evolución producida gracias a las tentativas de convertir el quinto de los postulados de Euclides en teorema, hasta el desenlace de tal intento, que fue la creación de las geometrías no euclidianas. Entre tanto, Kant había encontrado en la geometría euclidiana el paradigma de un saber que parecía exigir la admisión de juicios sintéticos a priori, juicios sobre cuya existencia fundamentó la posibilidad de una metafísica. La reflexión por parte de diversos matemáticos sobre este desenvolvimiento de la geometría y sobre la comprehensión epistemológica de su propia disciplina conduce a Hilbert al completamiento de la axiomatización euclidiana, y de allí, a dar un lugar preeminente al problema de no contradicción y a la teoría de la demostración. (Para esto es conveniente dominar al menos los cálculos más sencillos de la geometría cartesiana). El movimiento de fundamentación de la matemática hace crisis con la aparición de las paradojas de la teoría de conjuntos y alcanza un momento cimero con los teoremas de Gödel. En seguida el grupo Bourbaki forja su designio de exponer los elementos de la matemática conocida hasta entonces, siguiendo el método de Hilbert y privilegiando una presentación mediante estructuras.

Al terminar este curso, el estudiante debe tener muy claramente comprendido lo que tiene en común y lo que no las tres axiomatizaciones: la de Euclides, la de Hilbert y la de Bourbaki.

El tercer curso se propone hacer un estudio de los cálculos lógicos más conocidos. En particular, el estudiante debe relacionar lo estudiado sobre la argumentación en el primer curso con sus experiencias personales en la discusión racional y con el adiestramiento que recibe en este tercer curso en el manejo de algunos cálculos lógicos contemporáneos. Por ejemplo, el cálculo de la deducción natural fue creado por Gentzen (1934) como una axiomatización de la lógica que buscaba reflejar lo más exactamente posible los razonamientos lógicos realmente utilizados en la demostración matemática.

El cuarto curso se propone recoger el debate suscitado por la crisis de los fundamentos, examinar algunas de las soluciones propuestas y mostrar la matemática como estudio de estructuras, de manera que el estudiante quede habilitado para apreciar algunos aspectos del trabajo matemático actual y para usar algunos de sus métodos. En particular la estructura de grupo (quintaesencia de la matemática contemporánea según Poincaré) permite captar regularidades comunes a la lógica, los numeros reales, la geometría, la física, la antropología, la música,...

Estos cuatro cursos forman una unidad en el sentido de que no puede suprimirse uno de ellos sin echar a tierra todo el plan. Cada uno tiene una finalidad específica, pero existe un hilo conductor para los cuatro: el proceso de axiomatización.

El núcleo del programa es el tercer curso. Los dos primeros, empero, son tan indispensables como aquél. El primero para que los estudiantes tengan una idea de la matemática conocida por pensadores griegos cuya filosofía estudian. El segundo para desposeer a los estudiantes de la idea muy difundida de que la matemática no evoluciona. El cuarto para entrever el estado actual de la evolución de la matemática. Todos en conjunto contribuyen a la mejor comprehensión de algunos problemas de la teoría del conocimiento. Esquemáticamente, el primer curso considera la matemática en las etapas preliminares a la axiomatización; el segundo estudia la primera axiomatización y los intentos de perfeccionarla, surgidos veinte siglos después; el tercero presenta los sistemas lógicos que permiten afinar la argumentación y avanzar en la axiomatización; el cuarto muestra las dificultades aparecidas con los ensayos de reconstrucción axiomática de la lógica y de la matemática.

Al culminar los cuatro cursos, el estudiante debe dar prueba de aquella madurez que no se adquiere sino a fuerza de estudio y reflexión sobre conceptos pertinentes y del manejo oral y escrito, no meramente ocasional, de sus diversas formas de expresión.

PROGRAMACION DE LOS CURSOS.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas y Estadística

Lógica y Matemática para la carrera de Filosofía

Lógica y matemática I: **Introducción a la lógica y la matemática griegas antes de Euclides**

Código: 15421 01

Intensidad: 5 horas por semana

Programación: todos los semestres

Requisitos: ninguno

Capítulo I. Los presocráticos.

Capítulo II. Los sofistas.

Capítulo III. Platón.

República: 508-535 (Libros VI-VII).

Timeo: 28-57.

Eutidemo.

Otros diálogos cuyo estudio cumple con el objetivo asignado a esta parte del curso son éstos: Protágoras, Teeteto, Gorgias, Sofista, Menón, Cratilo, Hipias menor, Hipias mayor.

Capítulo IV. Aristóteles.

Peri hermenias. Especialmente: capítulos 5-8, 10, 11, 14. Primeros Analíticos. Libro I. Capítulos 1-7. Refutación de los sofismas (relación con el diálogo Eutidemo). Diversos pasajes sobre el infinito.

Capítulo V. Estoicos y megáricos.

Modos indemostrables.
Enunciados condicionales.

La crítica escéptica de los métodos demostrativos, transmitida entre otros por Sexto Empírico, será utilizada como material de ejercicios.

Texto: Alberto Campos. Introducción a la lógica y la matemática griegas antes de Euclides.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas y Estadística

Lógica y Matemática para la carrera de Filosofía

Lógica y Matemática II: **Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.**

Código: 15422 01

Intensidad: 5 horas por semana

Programación: todos los semestres

Requisitos: 15421 01

1. Axiomatización a la manera de Euclides. Los Elementos.
2. La demostración del teorema de Pitágoras en el libro I de *los Elementos.*
3. El quinto postulado, motor en la evolución axiomática de la geometría.
4. Kant: ¿Cómo es posible la matemática pura?
5. Geometrías no euclidianas.
6. Imperfecciones axiomáticas en los Elementos.
7. La crisis de los fundamentos de la matemática.
8. El capítulo primero de los *Fundamentos de la Geometría*, de David Hilbert.
9. Axiomatización a la manera de Hilbert.
10. El segundo problema de Hilbert. (París. 1900): la no contradicción de la matemática. La metamatemática.
11. Gödel: limitaciones internas de los formalismos.
12. Klein: La geometría mediante grupos de trasnformaciones.
13. Axiomatización a la manera de Bourbaki: Hilbert y Estructuras.
14. Experiencia, intuición, axiomatización. Sistemas formales.
15. Hacia una filosofía de la matemática.

Texto: Alberto Campos. Axiomática y geometría desde Eulides hasta Hilbert y Bourbaki.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas y Estadística

Lógica y matemática para la carrera de Filosofía

Lógica y Matemática III: **Introducción a la Lógica contemporánea.**

Código: 15423 01

Intensidad: 5 horas por semana

Programación: todos los semestres

Requisitos: 15422 01

I. lenguaje corriente. Discusión. Sofisma. Argumentación. Lenguajes artificiales.

II.lógica. Metalógica.

III. Cálculo proposicional. El cálculo de la deducción natural de Gentzen.

IV. Las nuevas lógicas.

V. Cálculo de conjuntos.

VI. Cálculo restringido de predicados.

VII. Cálculo generalizado de predicados. Las paradojas.

Textos:

John Anderson, and Henty Johnstone. Natural deduction. The logical basis of axiom systems. 1963. Belmont (California). Wadsworht. xii+418 pp.

Irving Copi. Introducción a la lógica. (1972. Ediciion inglesa revisada). 1985. Buenos Aires. EUDEBA. xiv+614 pp.

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas y Estadística

Lógica y matemática para la carrera de Filosofía

Lógica y Matemática IV: **Introducción a la matemática contemporánea.**

Código: 15424 01

Intensidad: 5 horas por semana

Programación: todos los semestres

Requisitos: 15423 01

1. Escuelas formalista, intuicionista, logicista. Su relación con la historia de la lógica y de la matemática a partir de Boole. B VI.

2. Tesis específicas de las tres escuelas respecto a la filosofía de la matemática. Crítica de algunas de las soluciones propuestas a la crisis de los fundamentos. B III.

3. Otras dificultades en la reconstrucción axiomática de la lógica y la matemática.

4. Grupo y lógica. B IX. Especialmente: pp.88-90, 306-310, 338-339.

5. Números reales: aspecto genético.

6. Números reales: aspecto axiomático.

7. Grupo y números reales.

8. Orden y números reales. B X. B V.

9. Grupo y antropología. B VII. Especialmente: pp. 278-286.

10. Grupo y física. B IV. B XII.

11. Grupo y música. B II. pp. 429-450. Ver también: pp. 451-479.

12. Grupo y psicología. B IX p.276. B VIII. B I.

13. Grupo y simetría. B XI. BXII.

14. Sistema, génesis, estructura, función. Estructuralismo, según Piaget: autorregulación, totalidad, transformación. B VIII.

15. Estructuralismo y filosofía. B VIII.

# BIBLIOGRAFIA

I. Marc Barbut, *Problemas del estructuralismo*, Les Temps Modernes. No 246. Novembre. 1966. pp. 94–119 Tercera edición de la traducción española, Siglo XXI, México, 1969, p. 182.

II. F.J. Budden, *The fascination of groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1972, pp. xviii+596.

III. Newton C.A. da Costa, *Introdução aos fundamentos da matemática*, Hucitec, São Paulo, 1977, pp. xi+65.

IV. Albert Einstein, *La relatividad (1916)*, Grijalbo, México, 1970, pp. 202.

V. Mary Falk de Losada, *Introducción a la matemática contemporánea.*

VI. William y Martha Kneale, *El desarrollo de la lógica (1961)*, Tecnos, Madrid, 1972, pp. xiv + 705.

VII. Claude Levi Strauss, *Las estructuras elementales del parentesco (1949). 1969*, Volúmenes 16 y 17 de la colección Obras Maestras del Pensamiento Contemporáneo. 1985. Barcelona. Planeta Agostini, Paidos, Buenos Aires, pp. 575.

VIII. Jean Piaget, *Le structuralisme*, Hay traducción española, PUF, Paris, 1968, pp. 125.

IX. Jean Piaget, *Essai de logique opératoire (1949)*, Deuxieme édition, Dunod, Paris, 1972, pp. xvi+398.

X. Bertrand Russell, *Introducción a la filosofía matemática. (1919)*, Losada, Buenos Aires, 1945, pp. 287.

XI. Hermann Weyl, *Simetría. (1952)*, Nueva Visión, Buenos Aires, 1958, pp. 132.

XII. Hermann Weyl, *Filosofía de las matemáticas y de la ciencia natural*, UNAM, México, 1949, pp. xii+354.