Boletín de Matemáticas
Vol. XXI, Nº 2,3 1987 **APUNTES**

TRISECCION CON LA HIPERBOLA

René W. Sandoval

Siempre es un placer y una profunda emoción recorrer, y volver a recorrer, los caminos que abrieran los Grandes.

En la historia de las Matemáticas hay tres problemas que se volvieron famosos y ocuparon los esfuerzos mentales del hombre por más de dos mil años.

1. La *duplicación del cubo*, o sea, el problema de encontrar el lado de un cubo cuyo volumen es el doble del volumen de un cubo dado.

2. La *trisección de un ángulo*, o sea, el problema de dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales

3. La *cuadratura del círculo*, o sea, el problema de construir un cuadrado que tenga igual área

que un círculo dado.

Estos tres problemas surgieron en las épocas entre Thales y Euclides y su particularidad radica en que se proponía encontrar su solución usando solamente las herramientas geométricas de que se disponía en aquel tiempo, esto es, la regla y compás, llamadas desde entonces las herramientas de Euclides.

El deseo de encontrar soluciones a estos problemas se tornó en una verdadera obsesión y matemáticos de todas las tallas, genios y aficionados, buscaron su solución. No fue sino en el siglo XIX que se llegó a demostrar la imposibilidad de realizar dichas construcciones geométricas bajo las condiciones ya mencionadas. Mientras tanto, los esfuerzos dedicados a esta investigación habían llevado a los matemáticos por infinidad de caminos, en que se recogieron hermosos trofeos, como la invención de las secciones cónicas, la solución de las ecuaciones cúbicas y cuárticas, la creación de varias curvas trascendentes y el planteamiento de muchas otras teorías que llevaron a las matemáticas a ocupar el puesto de líder que hoy ocupan en el desarrollo de las ciencias. La moderna teoría de grupos fue justamente la que permitió dilucidar definitivamente estos problemas, estableciendo su imposibilidad.

Algunas curvas trascendentes, como la cisoide de Diocles (180 A.C.), la concoide de Nicómedes (240 A.C.), la cuadratriz de Hippias (425 A.C.), la espiral de Arquímedes (225 A.C.) resuelven uno y aún dos de los problemas propuestos. Pero, recuérdese nuevamente que la condición es resolverlos sólo con ayuda de las herramientas de Euclides.

Algunos eminentes matemáticos del siglo XVII, entre ellos Newton, Huygens, Descartes, Grégoire de Saint-Vincent, dieron su contribución en el problema de la duplicación del cubo.

Las trisectrices de Maclaurin resuelven el problema de la trisección de un ángulo.

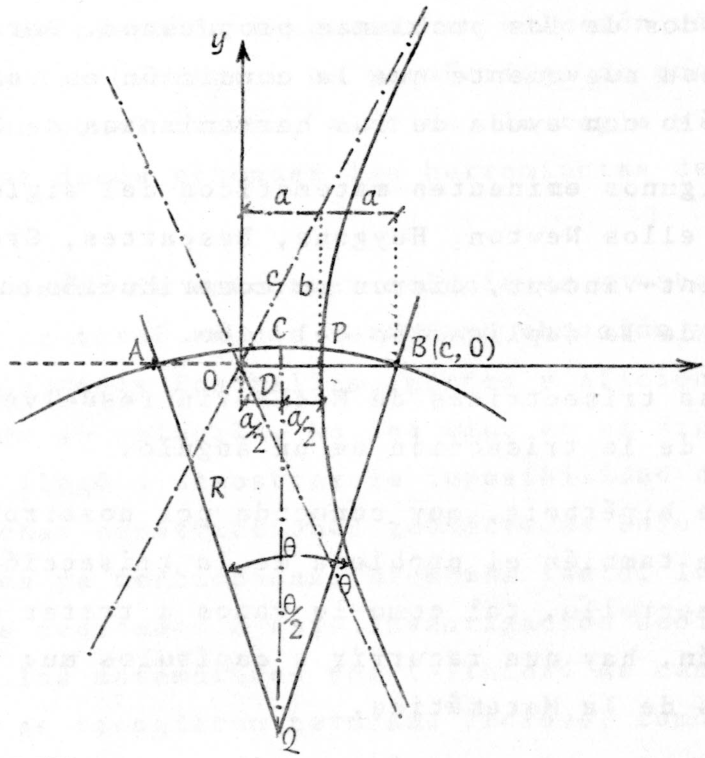
La hipérbola, muy conocida por nosotros, resuelve también el problema de la trisección y en su desarrollo, tal como lo vamos a tratar a continuación, hay que recurrir a capítulos muy interesantes de la Matemática.

LA CONSTRUCCION DE PAPPUS (300 D.C.)

"Sea AQB el ángulo central de un círculo y QC su bisectriz. Trácese una rama de hipérbola de excentricidad dos con el punto B como foco y QC como directriz. La hipérbola cortará el arco AB *en un punto* P, el cual triseca el ángulo AQB".

Demostracion. En la figura adjunta (pag.138), sea

B el foco de la hipérbola y QC su directriz. El sistema de coordenadas XOY es tal que su eje OX pasa por los puntos A y B y su eje OY es paralelo a QC.



§1. ECUACION DE LA HIPERBOLA.

Por la geometría analítica conocemos que la ecuación de la hipérbola en su forma canónica es

(1) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde los semi-ejes a y b satisfacen la relación

(2) $$a^2 + b^2 = c^2$$

Una hipérbola de excentricidad $e = 2$ se obtiene cuando $e = \frac{c}{a} = 2$, esto es, $c = 2a$.

También conocemos que las directrices de una hipérbola son las rectas de ecuaciones $x = \pm \frac{a}{e}$, de manera que siendo QC una de las directrices de la hipérbola de excentricidad 2, su ecuación es $x = \frac{a}{2}$, lo cual permite plantear la ecuación (1) en función del ángulo θ. Así

$$\overline{DB} = \frac{3}{2}a = R\,sen\frac{\theta}{2}$$

$$a = \frac{2R}{3}sen\frac{\theta}{2}$$

$$c = \frac{4R}{3}sen\frac{\theta}{2}$$

$$b = \sqrt{\frac{16R^2}{9}sen^2\frac{\theta}{2} - \frac{4R^2}{9}sen^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2R\sqrt{3}}{3}sen\frac{\theta}{2}\ .$$

Entonces la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{9x^2}{4R^2 sen^2\frac{\theta}{2}} - \frac{9y^2}{12R^2 sen^2\frac{\theta}{2}} = 1$$

o también, sin perder generalidad, adoptando $R = 1$:

$$\boxed{\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = \frac{4}{9}sen^2\frac{\theta}{2}} \tag{3}$$

Nuestro objetivo es calcular las coordenadas del punto P, punto de intersección entre la circunferencia de centro en Q y radio 1 y la hipérbola dada por la ecuación (3) y demostrar entonces que la longitud del arco PB es un tercio de la del arco AB.

§2. ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA.

Su centro es de coordenadas

$$Q(\frac{a}{2}, -R\cos\frac{\theta}{2}) \quad \text{ó}$$

$$Q(\frac{R}{3}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}, -R\cos\frac{\theta}{2})$$

y el radio $R = 1$, de donde se obtiene la ecuación

$$\boxed{(x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2})^2 + (y + \cos\frac{\theta}{2})^2 = 1} \tag{4}$$

§3. PUNTO DE INTERSECCION P.

La resolución del sistema de ecuaciones (3) y (4) conduce a la siguiente ecuación cúbica en y:

$$4y^3 + 12y^2\cos\frac{\theta}{2} + (9 - 12\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2})y - 4\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = 0. \tag{5}$$

La resolución de esta ecuación por la fórmula de Cardano, obliga a que eliminemos el término en y^2, lo cual es posible, como se sabe, haciendo $y = z + k$ y buscando este valor de k para que desaparezca el término de segundo grado. Así, el reemplazo de $y = z + k$ en (5), después de las respectivas simplificaciones y la agrupación de términos de igual grado da:

$$4z^3 + 12(k+\cos\frac{\theta}{2})z^2 + (12k^2 + 24k\cos\frac{\theta}{2} - 12\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + 9)z +$$

$$(6) \qquad 4k^3 + 12k^2\cos\frac{\theta}{2} + (9 - 12\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2})k - 4\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = 0.$$

El término de segundo grado se elimina si $k = -\cos\frac{\theta}{2}$.

El reemplazo de este valor en los demás términos de la ecuación (6) conduce a una nueva ecuación cúbica en z cuya forma es:

$$(7) \qquad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

La aplicación de la fórmula de Cardano

$$z = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

para una ecuación cúbica de la forma

$$(8) \qquad z^3 + pz + q = 0$$

con $p = -\frac{3}{4}$ y $q = -\frac{1}{4}\cos\frac{\theta}{2}$, como es el caso de la ecuación (7), nos da:

$$(9) \qquad z = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - 1}} + \sqrt[3]{\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - 1}}\right)$$

Obsérvese que se produce aquí el caso irreducible de la solución de Cardano; esto es, hay raíces imaginarias pues $(\cos^2\frac{\theta}{2} - 1)$ es menor que cero para todo valor de θ, excepto para $\theta = 0$. El caso $\theta = 0$ lo dejamos para el lector. En lo que sigue se discutirá el caso de raíces imaginarias.

La solución (9) puede también escribirse en la forma compleja

(10) $$z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,sen\frac{\theta}{2}\right)^{1/3} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} - i\,sen\frac{\theta}{2}\right)^{1/3}$$

en la cual, a su vez, podemos usar la fórmula de Euler

(11) $$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen\,x\,.$$

Entonces

$$z = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta/2}\right)^{1/3} + \frac{1}{2}\left(e^{-i\theta/2}\right)^{1/3}$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\theta/6} + \frac{1}{2}e^{-i\theta/6}\,,$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{6} + i\,sen\frac{\theta}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{6} - i\,sen\frac{\theta}{6}\right)$$

de lo cual se obtiene

(12) $$\boxed{z = \cos\frac{\theta}{6}}$$

(13) $$\boxed{y = \cos\frac{\theta}{6} - \cos\frac{\theta}{2}}$$

La abscisa del punto P puede calcularse fácilmente a partir de (4) con el valor de y obtenido en (13). El cálculo da:

(14) $$\boxed{x = \frac{1}{3}Sen\frac{\theta}{2} + Sen\frac{\theta}{6}}$$

Obsérvese la gran utilidad de la fórmula de Euler para salvar el grave escollo de las raíces imaginarias en la expresión (10), escollo que Cardano no pudo salvar causándole perplejidad.

§4. CALCULO DEL ARCO PB.

La parte final de la demostración consiste en calcular la longitud del arco BP y mostrar que es un tercio de θ.

Recurrimos ahora al cálculo integral usando la fórmula para longitud de arco muy conocida por todos los estudiante:

$$\widehat{PB} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \ . \tag{15}$$

En la cual los límites x_1 y x_2 son las abscisas de los puntos P y B, ambas conocidas ya.

$$x_1 = \frac{1}{3} sen\frac{\theta}{2} + sen\frac{\theta}{6}$$

$$x_2 = \frac{4}{3} sen\frac{\theta}{2}$$

La derivada y' se obtiene de la ecuación (4)tomando $y > 0$, como corresponde a todo el arco AB, se obtiene

$$\text{(16)} \quad \begin{aligned} y &= - cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{3} sen\frac{\theta}{2}\right)^2} \\ y' &= - \frac{3x - sen(\theta / 2)}{\sqrt{9 - (3x - sen\,\theta/2)^2}} \end{aligned}$$

El reemplazo de (16) en (15) conduce a una integral de la forma:

$$\widehat{PB} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{3dx}{\sqrt{9 - (3x - sen\,\theta/2)^2}}$$

la cual con el reemplazo $3x - sen\frac{\theta}{2} = 3 sen w$ y

.... $dx = \cos w\,dw$ da finalmente la integral definida

$$\widehat{PB} = \int_{\theta/6}^{\theta/2} dw = \Big[w\Big]_{\theta/6}^{\theta/2} = \frac{\theta}{3},$$

resultado que completa la demostración.

* * *

Vicente Pajuelo Nº403
Urbanización "Mexterior"
Quito, Ecuador.