Boletín de Matemáticas
Vol. XXI Nº 2,3 1987

APORTES

ANALISIS COMPLEJO Y ESCISION EN LA HOMOLOGIA DE ARTIN*

Jairo A. Charris y Carlos A. Ortíz

ABSTRACT. Homology and cohomology groups for open domains of the plane are defined in terms of the concept of index of a curve with respect to a point. A Mayer-Vietoris sequence is established for both homology and cohomology by means of simple results of elementary complex analysis. Some applications are given.

RESUMEN. Se definen grupos de homología y cohomología para dominios del plano por medio de la noción de índice de una curva con respecto a un punto. Se

AMS-MOS Subject Classifications: Primary 55N35.
Secondary 55N30.

* Este trabajo presenta parte de los resultados obtenidos en la tesis de Magister en Matemáticas de C.A. Ortíz. La tesis fue realizada bajo la dirección de J.A. Charris.

dan algunas aplicaciones.

§1. INTRODUCCION

El uso de métodos topológicos en análisis es de vieja data. La homología singular y la cohomología con valores en un haz juegan papeles útiles e importantes en ciertos aspectos del Análisis Complejo. Los métodos topológicos han sugerido con frecuencia resultados en análisis y, a su vez, técnicas analíticas han mostrado ser eficientes en el establecimiento de propiedades topológicas.

La noción de homología basada en el índice, la cual puede atribuirse a E. Artin y C. Caratheodory dada la importancia que estos matemáticos atribuyeron al concepto de índice de una curva y al papel que éste jugaba en la Teoría de Cauchy, no ha sido, hasta donde llega nuestro conocimiento, explotada sistemáticamente. Esto nos parece inapropiado, pues dicha homología es comparativamente más simple y natural que la homología singular en el caso de los dominios del plano. Tal noción de homología, definida al fin y al cabo por un cierto tipo de grado topológico, es, como demostró D. Mond, equivalente, aunque no trivialmente, a la homología singular.

El objeto principal de este trabajo es mostrar cómo una sucesión de escisión para la homología de Artin, sucesión del tipo Mayer-Vietoris, sugiere algunos resultados en Análisis Complejo. Luego veremos cómo estos equivalen a la exactitud de dicha sucesión. Finalmente daremos demostraciones puramente analíticas de estos resultados, obteniendo de esta manera una demostración, también analítica, de la exactitud de la sucesión de escisión para la homología de Artin. Módulo el resultado de Mond, esto implica la exactitud de la sucesión de Mayer-Vietoris para la homología singular.

Nos parece que todo esto representa un ejemplo relativamente simple del papel complementario que técnicas analíticas y técnicas topológicas juegan dentro del análisis moderno. Algunos de los resultados obtenidos han mostrado además ser de alguna utilidad, especialmente en la teoría de las ecuaciones diferenciales complejas.

Supondremos conocidas del lector las nociones básicas de la teoría de la homotopía, incluyendo la definición y propiedades elementales del grupo fundamental, así sea sólo para dominios del plano. Si Ω es un dominio del plano, $C(\Omega)$ será el conjunto de las curvas cerradas de Ω, es decir, de las aplicaciones continuas $\alpha: I \to \Omega$ tales que $\alpha(0) = \alpha(1)$. Aquí, $I = [0,1]$. Si $a \in \Omega$, con $C(\Omega,a)$ denotaremos el subconjunto de $C(\Omega)$ de las curvas cerradas con origen en a: $a = \alpha(0) = \alpha(1)$. Si $\alpha, \beta \in C(\Omega,a)$, diremos que α *es homótopa a* β *en* Ω y escribiremos $\alpha \approx \beta(\Omega)$, si existe $\sigma: I \times I \to \Omega$, continua, tal que

$\sigma(\theta,0) = \sigma(\theta,1) = a$ para todo $\theta \in I$ y que $\sigma(0,t) = \alpha(t)$, $\sigma(1,t) = \beta(t)$, $t \in I$. Se dice que σ *es una homotopía* de Ω que deforma a α en β. La relación $R = \{(\alpha,\beta) | \alpha \approx \beta(\Omega)\}$ es una relación de equivalencia en $C(\Omega,a)$. El conjunto cociente

$$(1.1) \qquad \pi_1(\Omega,a) = C(\Omega,a)/R$$

tiene una estructura natural de grupo. Si para $\alpha \in C(\Omega,a)$ denotamos con $[\alpha]_a$ la clase módulo R de α, la ley de composición en $\pi_1(\Omega,a)$ está dada por

$$(1.2) \qquad [\alpha]_a[\beta]_a = [\alpha\beta]_a$$

donde $\alpha\beta(t) = \alpha(2t)$, $0 \leq t \leq 1/2$, $(\alpha\beta)(t) = \beta(2t-1)$, $1/2 \leq t \leq 1$. Si $\gamma_a(t) = a$ para todo $t \in I$, $1_a = [\gamma_a]_a$ es el elemento neutro de $\pi_1(\Omega,a)$; y si $\alpha \in C(\Omega,a)$, entonces $[\alpha^{-1}]_a$, donde $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$, es el inverso de $[\alpha]_a$.

El grupo $\pi_1(\Omega,a)$ se denomina el *grupo fundamental* o *grupo de homotopía de Ω relativo al punto a*. No es difícil demostrar que si también $b \in \Omega$ entonces $\pi_1(\Omega,b) \approx \pi_1(\Omega,a)$, razón por la cual se habla del grupo $\pi_1(\Omega)$ sin especificar el punto al cual se refiere.

Dada la extensión del presente artículo hemos resuelto, atendiendo la solicitud de los editores de recortarlo, suprimir buena parte de las demostraciones. Esto nos parece apropiado, pues éstas, largas y aburridas, son más un ejercicio de paciencia que de pericia. Nigún lector interesado tendrá dificultades serias al intentar reproducirlas, si para ello dispone de una cierta dosis del primer ingrediente.

§2. NOCIONES BASICAS DE ANALISIS COMPLEJO.

El objeto de esta sección es fijar el lenguaje y la forma de los resultados de análisis complejo necesarios en el resto del trabajo, y que algunas veces no es la corriente en los textos usuales.

En todo lo que sigue, y salvo advertencia expresa de lo contrario, Ω sera un *dominio del plano*. Es decir, un abierto conexo y no vacío de $\mathbb{C}$. Supondremos también que toda curva γ de Ω está parametrizada por el intervalo $[0,1]$.

Si f es una función analítica en Ω, es posible definir

$$\int_\gamma f\,dz$$

donde γ es cualquier curva de Ω. Basta en efecto tomar

$$\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_0} f\,dz, \tag{2.1}$$

donde γ_0 es cualquier poligonal de Ω tal que $\gamma_0(0) = \gamma(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma(1)$ y que

$$|\gamma(t)-\gamma_o(t)| < r/4, \quad t \in [0,1],$$

siendo r la distancia de $\gamma([0,1])$ a $\mathbb{C}-\Omega$. Se ve fácilmente que (2.1) no depende de γ_o en tanto γ_o sea poligonal de aproximación.

Es fácil ver que si γ es una curva cerrada de Ω entonces (ver [2],[5])

$$Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}, \quad a \in \mathbb{C}-\gamma([0,1]),$$

el cual se denomina el *índice de* γ *con respecto al punto* a, es siempre un entero, y que la aplicación

$$Ind_\gamma : \mathbb{C}-\gamma(I) \to \mathbb{Z}$$
$$a \mapsto Ind_\gamma(a)$$

es continua. Tal aplicación es entonces constante sobre toda componente conexa de $\mathbb{C}-\gamma(I)$, y evidentemente nula sobre la componente conexa no acotada de este conjunto. Si $E(\gamma)$ es el conjunto de puntos de $\mathbb{C}-\gamma(I)$, donde Ind_γ se anula e $I(\gamma) = \mathbb{C}-\gamma(I)-E(\gamma)$, entonces $C(\gamma)$ e $I(\gamma)$ son abiertos de $\mathbb{C}$, denominados respectivamente el *exterior* y el *interior* de γ. Es claro que $\overline{I(\gamma)} = I(\gamma) \cup \gamma(I)$ es compacto. El número $Ind_\gamma(a)$ se interpreta usualmente como el número neto de vueltas que γ da alrededor de a.

Si γ es una curva cerrada de Ω, se dice que γ es *nul-homóloga u homóloga a cero en* Ω si $I(\gamma) \subseteq \Omega$, es decir, si $Ind_\gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$. Es corrien te escribir $\gamma \sim 0(\Omega)$ para indicar esto. Más generalmente, si γ_1 y γ_2 son curvas cerradas de Ω tales que $Ind_{\gamma_1}(a) = Ind_{\gamma_2}(a)$ para todo $a \notin \Omega$, se dice que γ_1 *es homóloga* a γ_2 en Ω, y se escribe $\gamma_1 \sim \gamma_2(\Omega)$. Si para cada $b \in \mathbb{C}$ γ_b denota la curva $\gamma_b(t) = b$, $t \in I$, entonces $\gamma \sim 0(\Omega)$ si y sólo si $\gamma \sim \gamma_b(\Omega)$ para todo $b \in \Omega$. Por otra parte, si γ_1 y γ_2 son curvas cerradas de Ω y α es una curva de Ω tal que $\alpha(0) = \gamma_1(0)$ y $\alpha(1) = \gamma_2(0)$, entonces $\gamma_1\alpha\gamma_2\alpha^{-1}$ es una curva cerrada de Ω y $\gamma_1 \sim \gamma_2(\Omega)$ si y sólo si $\gamma_1\alpha\gamma_2\alpha^{-1} \sim 0(\Omega)$.

La *versión homológica del Teorema de Cauchy* afirma que si γ_1 y γ_2 son curvas cerradas de Ω entonces $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si y sólo si

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$$

para toda función analítica f en Ω. En particular,

$$\int_{\gamma_1} f dz = 0$$

para toda función analítica f en Ω si y sólo si $\gamma_1 \sim 0(\Omega)$. Al respecto de la versión homológica del Teorema de Cauchy pueden consultarse [1], [2], [5], [30]. Una demostración simple puede basarse en el Lema 2.2 siguiente, como lo observaremos en la Nota 2.1.

Si γ_1 y γ_2 son cerradas y γ_1 es homótopa a γ_2 en Ω, la versión homotópica del Teorema de Cauchy implica que $Ind_{\gamma_1}(a) = Ind_{\gamma_2}(a)$ para todo $a \notin \Omega$, o sea, que $\gamma_1 \sim \gamma_2(\Omega)$. La versión homológica del Teorema de Cauchy implica entonces la versión homotópica.

Si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$, se dice que Ω es *simplemente conexo* si existe a en Ω tal que toda curva cerrada γ de origen en a es nul-homótopa. Se dice también que Ω es *contraíble al punto* a. En tal caso, si α es cualquier curva cerrada de Ω y δ es una trayectoria de Ω con $\delta(0) = a$ y $\delta(1) = \alpha(0)$, entonces $\delta\alpha\delta^{-1}$ es nul-homótopa, así que

$$\int_\alpha f dz = \int_{\delta\alpha\delta^{-1}} f dz = 0.$$

No es difícil ver que si Ω es simplemente conexo, no importa cual sea el origen de la curva cerrada γ, γ es nul-homótopa en Ω.

Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$. Se dice que Ω es n-conexo si $\mathbb{C}-\Omega$ tiene n componentes conexas acotadas. Es posible en tal caso que $\mathbb{C}-\Omega$ tenga infinitas componentes conexas no acotadas. Si $\mathbb{C}_\infty$ denota la *esfera de Riemann*, es decir, el compactado de Alexandroff de $\mathbb{C}$ ([32],Cap.3), se puede demostrar (ver [4]), que Ω es n-conexo si y sólo si $\mathbb{C}_\infty - \Omega$ tiene exactamente $n+1$ componentes conexas. En particular, Ω es 0-conexo si $\mathbb{C} - \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas. Si γ es entonces una curva cerrada de Ω, necesariamente $\mathbb{C} - \Omega \subseteq E(\gamma)$, así que $I(\gamma) \subseteq \Omega$ y $\gamma \sim 0(\Omega)$. Por lo tanto,

$$\int_\gamma f dz = 0$$

para toda función analítica f en Ω.

Si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$, denotaremos con $\mathcal{O}(\Omega)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de las funciones analíticas u holomorfas en Ω. De hecho, $\mathcal{O}(\Omega)$ es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, pues el producto de funciones holomorfas es una función holomorfa. Los siguientes resultados del análisis complejo elemental serán frecuentemente usados en lo que sigue.

LEMA 2.1. (Morera) *Si f es continua en Ω e $\int_\gamma f dz = 0$ para toda trayectoria cerrada γ de Ω, entonces existe $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que*

$$F'(z) = f(z)$$

para todo $z \in \Omega$. En particular, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
Por lo tanto:

COROLARIO 2.1. Si Ω es 0-conexo o simplemente conexo, y si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, existe $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que

$$F'(z) = f(z)$$

para todo $z \in \Omega$.

Sea $\mathcal{O}^*(\Omega)$ el conjunto de las funciones holomorfas que no se anulan en ningún punto z de Ω. El conjunto $\mathcal{O}^*(\Omega)$ tiene una estructura natural de grupo abeliano multiplicativo: si $f, g \in \mathcal{O}^*(\Omega)$,

$$(fg)(z) = f(z)g(z), \quad z \in \Omega.$$

La estructura de Z-módulo está determinada por la ley externa

$$(n,f) \longrightarrow f^n, \quad n \in \mathbf{Z},\ f \in O^*(\Omega),$$

donde $f^n(z) = (f(z))^n$, $z \in \Omega$.

Del Corolario 2.1 se deduce sin más que

COROLARIO 2.2. *Sean $f \in O^*(\Omega)$, γ una curva cerrada de Ω. Entonces,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)}$$

es un entero. Este entero es nulo para toda curva cerrada γ de Ω si y sólo si existe g en $O(\Omega)$ tal que

$$f(z) = e^{g(z)}$$

para todo $z \in \Omega$.

El siguiente resultado es fundamental. Demostraciones detalladas pueden encontrarse en [5] y [30].

LEMA 2.2. Sean Ω un abierto de $\mathbf{C}$, K un subconjunto de Ω. Entonces existen trayectorias cerradas $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ de $\Omega - K$ tales que

$$(2.2)\qquad f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

para todo $a \in K$ *y toda función holomorfa* f *en* Ω.

NOTA 2.1. Es posible deducir del resultado anterior la versión homológica del Teorema de Cauchy. En efecto, si γ es una curva cerrada y $\gamma \sim 0(\Omega)$, entonces $K = \overline{I(\gamma)}$ es un subconjunto compacto de Ω y existen $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$, trayectorias cerradas de $\Omega - K$, tales que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \qquad z \in K.$$

Se deduce que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \{f(\xi) \int_\gamma \frac{dz}{\xi - z}\} d\xi$$

Pero, dado que $\gamma_k(I) \cap I(\gamma) = \Phi$, $k = 1,2,\ldots,n$, es claro que

$$\int_\gamma dz/(\xi - z) = -2\pi i Ind_\gamma(\xi) = 0, \ \xi \in \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k(I).$$

Entonces

$$\int_\gamma f dz = 0$$

NOTA 2.2. En vista de lo anterior, la condición (2.2) en el lema es equivalente a la siguiente;

$$(2.3)\qquad \sum_{k=1}^{n} Ind_{\gamma_k}(b) = \begin{cases} 1, & b \in K. \\ 0, & b \notin \Omega. \end{cases}$$

NOTA 2.3. Del lema 2.2 es fácil concluir que si Ω es simplemente conexo entonces Ω es 0-conexo. La afirmación recíproca, tambien válida, es consecuencia del Teorema de Conformidad de Riemann (Rudin [30], Cap. 13).

§3. EL GRUPO DE HOMOLOGIA DE ARTIN

Si $C(\Omega)$ es el conjunto de las curvas cerradas de un abierto Ω de $\mathbb{C}$, y

$$h = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta \in C(\Omega) \text{ y } \alpha \sim \beta(\Omega)\},$$

entonces h es una relación de equivalencia en $C(\Omega)$. El conjunto cociente

$$(3.1)\qquad H_1(\Omega) = C(\Omega)/h$$

tiene una estructura natural de grupo abeliano. Si $\alpha \in C(\Omega)$ y $\langle\alpha\rangle$ denota su clase módulo h, tal estructura está determinada por la ley de composición $\langle\alpha\rangle + \langle\beta\rangle = \langle\alpha\gamma\beta\gamma^{-1}\rangle$, donde γ es cualquier trayectoria de Ω que una $\alpha(0)$ con $\beta(0)$. El elemento neutro de este grupo es $0 = \langle\gamma_a\rangle$, donde a es cualquier punto de Ω y $\gamma_a(t) = a$ para todo $t \in I$. Además, $-\langle\gamma\rangle = \langle\gamma^{-1}\rangle$.

Como grupo abeliano, $H_1(\Omega)$ tiene una estructura natural de $\mathbb{Z}$-módulo. La ley externa está determinada por $(n,\langle\alpha\rangle) \to n\langle\alpha\rangle = \langle\alpha^n\rangle$. Obsérvese que $Ind_{\alpha^n}(a) = nInd_\alpha(a)$, $a \notin \Omega$.

DEFINICION 3.1. El $\mathbb{Z}$-módulo $H_1(\Omega)$ se denomina el *grupo de homología de Artin de* Ω.

Si α,β son curvas cerradas de Ω y $\alpha \sim \beta(\Omega)$, el Teorema de Cauchy asegura que $\alpha \sim \beta(\Omega)$. La aplicación natural

$$\psi : \pi_1(\Omega\ a) \longrightarrow H_1(\Omega)$$

dada por

$$(3.2) \qquad \psi([\alpha]_a) = \langle\alpha\rangle$$

está entonces bien definida, es sobreyectiva y evidentemente un homomorfismo de las estructuras de grupo.

NOTA 3.1. Sean $\alpha,\alpha_1, \ldots ,\alpha_m$ curvas cerradas de Ω y $n_1, \ldots ,n_m$ números enteros. La notación

$$(3.3) \qquad \alpha \sim n_1\alpha_1 + \ldots + n_m\alpha_m(\Omega)$$

significará que

$$Ind_\alpha(a) = \sum_{k=1}^{m} n_k Ind_{\alpha_k}(\Omega)$$

para todo $a \notin \Omega$; es decir que

$$<\alpha> = n_1<\alpha_1> + n_2<\alpha_2> + \ldots + n_m<\alpha_m> .$$

Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ trayectorias de Ω tales que $\gamma_k(0) = \alpha(0)$, $\gamma_k(1) = \alpha_k(0)$, $k = 1,2,\ldots,m$. Entonces (3.3) vale si y sólo si

$$\alpha \sim (\gamma_1\alpha_1^{n_1}\gamma_1^{-1}) \ldots (\gamma_m\alpha_m^{n_m}\gamma^{-1})(\Omega).$$

Supóngase que Ω es n-conexo y que $K_1,\ldots,K_n$ son las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C} - \Omega$. Entonces $K_1,\ldots,K_n$ son subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Si $1 \leqslant p \leqslant n$, es posible demostrar (ver [4]) que $\Omega' = \Omega \cup K_1 \cup \ldots \cup K_p$ es aún un dominio de $\mathbb{C}$, el cual es $n-p$ conexo, y $K_{p+1},\ldots,K_n$ son las componentes compactas de $\mathbb{C} - \Omega'$. En particular $\hat{\Omega} = \Omega \cup K_1 \cup \ldots \cup K_n$ es un dominio 0-conexo de $\mathbb{C}$, es decir, $\mathbb{C}_\infty - \hat{\Omega}$ es conexo.

Si Ω es 0-conexo entonces $H_1(\Omega) = \{0\}$, pues si $\gamma \in C(\Omega)$ entonces $\gamma \sim 0(\Omega)$. Se concluye que si Ω es simplemente conexo, también $H_1(\Omega) = \{0\}$. La construcción necesaria para la demostración del siguiente Teorema se basa en el Lema 2.2.

TEOREMA 3.1. *Sea Ω un dominio n-conexo, $n > 1$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $K_1,\ldots,K_n$ las componentes conexas compactas de $\mathbb{C} - \Omega$. Entonces, existen trayectorias cerradas γ_k en Ω, con $\gamma_k(0) = z_0$, $k = 1,2,\ldots,n$, tales que*

$$(3.4) \qquad Ind_{\gamma_j}(a) = \begin{cases} 1, & a \in K_j \\ 0, & a \in \mathbb{C} - \Omega \cup K_j \end{cases}$$

COROLARIO 3.1. *Sea Ω un dominio n-conexo. Entonces $H_1(\Omega)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre de dimensión n sobre $\mathbb{Z}$. Si $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ son trayectorias cerradas de Ω con $\gamma_k(0) = z_o \in \Omega$, las cuales satisfacen (3.4), entonces $<\gamma_1>,\ldots,<\gamma_n>$ es una base de $H_1(\Omega)$ sobre $\mathbb{Z}$.*

COROLARIO 3.2. *Si Ω es un abierto n-conexo de $\mathbb{C}$, $H_1(\Omega)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^n$. Si Ω es 1-conexo, $H_1(\Omega)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. En este último caso, un isomorfismo de $H_1(\Omega)$ sobre $\mathbb{Z}$ es la aplicación*

$$Ind_a : H_1(\Omega) \to \mathbb{Z}$$

dada por

$$Ind_a(<\gamma>) = Ind_\gamma(a),$$

donde a es cualquier punto en la componente conexa acotada de $\mathbb{C} - \Omega$.

§4. GRUPOS DE COHOMOLOGIA DE ARTIN.

Denotaremos con $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ al $\mathbb{Z}$-módulo de las aplicaciones $\mathbb{Z}$-lineales de $H^1(\Omega)$ en $\mathbb{Z}$:

$$(4.1) \qquad H^1(\Omega,\mathbb{Z}) = Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(\Omega),\mathbb{Z}).$$

A su vez, $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ será el $\mathbb{Z}$-módulo de las aplicaciones $\mathbb{Z}$-lineales de $H_1(\Omega)$ en $\mathbb{C}$:

$$(4.2) \qquad H^1(\Omega,\mathbb{C}) = Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(\Omega),\mathbb{C}).$$

El grupo abeliano $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ tiene una estructura natural de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, estando dada la ley externa por $(\lambda I)(\langle\alpha\rangle) = \lambda(I(\langle\alpha\rangle))$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$, $I \in H^1(\Omega,\mathbb{C})$. Es claro que $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ es un subgrupo de $H^1(\Omega,\mathbb{C})$. Es claro además que $H^1(\Omega,\mathbb{Z}) = \{0\} = H^1(\Omega,\mathbb{C})$ cuando Ω es 0-conexo (o simplemente conexo). Los grupos $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ y $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ se denominan los *grupos de cohomología de Artin con coeficientes en* $\mathbb{Z}$ *y* $\mathbb{C}$ *, respectivamente.*

Supóngase que Ω es n-conexo y sean $a_1,\ldots,a_n$ puntos en cada una de las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C}-\Omega$. Sean $I_1, \ldots ,I_n$ en $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ dadas por

$$(4.3) \qquad I_k(\langle\alpha\rangle) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{dz}{z-a_k} = Ind_\alpha(a_k), \; k=1,2,\ldots,n.$$

Evidentemente las I_k están bien definidas, son $\mathbb{Z}$-lineales, e $(I_1,\ldots,I_n)$ es una base sobre $\mathbb{Z}$ de $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$, dual de la base $(\langle\gamma_1\rangle, \ldots ,\langle\gamma_n\rangle)$ de $H_1(\Omega)$ dada por el Teorema 3.1 y el Corolario 3.1. Nótese, en efecto, que $I_k(\langle\gamma_j\rangle) = \delta_{kj}$.

También $(I_1,\ldots,I_n)$ es una base sobre $\mathbb{C}$ de $H^1(\Omega,\mathbb{C})$. En efecto, las relaciones anteriores implican que $I_1, \ldots, I_n$ es un sistema libre de $H^1(\Omega,\mathbb{C})$, y si $I \in H^1(\Omega,\mathbb{C})$ y $\lambda_k = I(<\gamma_k>)$ entonces $I = \lambda_1 I_1 + \ldots + \lambda_n I_n$.

Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$. La versión homológica del Teorema de Cauchy permite definir sin ambigüedad aplicaciones

$$\mathbf{I} : \mathcal{O}(\Omega) \to H^1(\Omega,\mathbb{C}), \quad \mathbf{J} : \mathcal{O}^*(\Omega) \to H^1(\Omega,\mathbb{Z})$$

por

$$\mathbf{I}(f)(<\gamma>) = \int_\gamma f dz. \tag{4.4}$$

y

$$\mathbf{J}(g)(<\gamma>) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz \tag{4.5}$$

Evidentemente $\mathbf{I}$ es $\mathbb{C}$-lineal. Como

$$\int_\gamma \frac{(gh)'}{(gh)} dz = \int_\gamma \frac{g'}{g} dz + \int_\gamma \frac{h'}{h} dz,$$

se tiene también que J es $\mathbb{Z}$-lineal.

No es difícil verificar que

TEOREMA 4.1. *Si Ω es un dominio de conexión finita la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{\partial/\partial z} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{\mathbf{I}} H^1(\Omega,\mathbb{C}) \longrightarrow 0, \tag{4.6}$$

donde i es la inclusión natural e $\mathbf{I}$ está dada por (4.4), es exacta.

NOTA 4.1. Como $\operatorname{Ker} \mathbf{I} = \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{O}'(\Omega)$, se deduce que la aplicación

$$\tilde{\mathbf{I}} : \mathcal{O}(\Omega) / \mathcal{O}'(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega, \mathbb{C}),$$

obtenida de $\mathbf{I}$ por paso a los cocientes, es un isomorfismo.

NOTA 4.2. Si Ω no es de conexión finita, la aplicación $\mathbf{I}$ no es, en general, sobreyectiva. La exactitud de (4.6) en las otras instancias es clara, aún en este caso.

También es fácil verificar que:

TEOREMA 4.2. *Si Ω es un dominio de conexión finita, la sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos*

$$(4.7) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{\ E\ } \mathcal{O}^*(\Omega) \xrightarrow{\ \mathbf{J}\ } H^1(\Omega, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{O}^*(\Omega)$ es el $\mathbb{Z}$-módulo de las aplicaciones holomorfas que no se anulan en ningún punto de Ω, i es la inclusión natural, $E(f) = \operatorname{Exp}(2\pi i f)$ y $\mathbf{J}(f)$ está dada por (4.5), es exacta.

NOTA 4.3. La aplicación

$$\tilde{\mathbf{J}} : \mathcal{O}^*(\Omega) / E(\mathcal{O}(\Omega)) \longrightarrow H^1(\Omega, \mathbb{Z}),$$

obtenida de $\mathbf{J}$ por paso a los cocientes, es un isomorfismo.

NOTA 4.4. Si Ω no es de conexión finita, la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{E} \mathcal{O}^*(\Omega) \xrightarrow{J} H^1(\Omega,\mathbb{Z})$$

es aún exacta. Sin embargo, J no es, en general, sobreyectiva.

NOTA 4.5. Obsérvese la exactitud de las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{E} \mathcal{O}^*(\Omega) \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{\partial/\partial z} \mathcal{O}^*(\Omega) \longrightarrow 0,$$

cuando Ω es simplemente conexo.

§5. DE LA TOPOLOGIA AL ANALISIS.

En esta sección Ω será, salvo advertencia de lo contrario, un dominio de $\mathbb{C}$ de conexión finita.

DEFINICION 5.1. Se dice que una pareja (Ω_1,Ω_2) de dominios de $\mathbb{C}$ es una *escisión* de Ω si Ω_1 y Ω_2 son ambos de conexión finita, $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ tiene sólo un número finito de componentes conexas, y $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Necesariamente toda componente conexa de Ω_{12} es un dominio de conexión finita (ver [4]). Si Ω_{12} es conexo, se dice que la *escisión es conexa*.

Es evidente que una partición de Ω no es necesariamente una escisión. Es también evidente que algunas escisiones pueden ser conexas y otras no.

Sea (Ω_1,Ω_2) una escisión de Ω. Considérese la sucesión

$$(5.1)\quad 0 \longrightarrow H_1(\Omega_{12}) \xrightarrow{P} H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2) \xrightarrow{Q} H_1(\Omega_o)$$

donde $\Omega_o = \Omega$ y P, Q están definidas de la siguiente manera: denotando por $\langle\alpha\rangle_i$, $i = 0,1,2,12$, la clase de homología singular de $\alpha \in C(\Omega_i)$, entonces,

$$(5.2)\quad P(\langle\alpha\rangle_{12}) = (\langle\alpha\rangle_1,\langle\alpha\rangle_2),\quad Q(\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2) = \langle\alpha\rangle_o - \langle\beta\rangle_o$$

$$= \langle\alpha\rangle - \langle\beta\rangle.$$

En lo que sigue de la presente sección supondremos que (5.1) es una sucesión exacta y estudiaremos implicaciones de este hecho en análisis complejo. Veremos como ciertos resultados que se deducen de tal hipótesis equivalen a dicha exactitud. En la próxima sección daremos demostraciones analíticas de tales resultados.

La sucesión (5.1) origina, por paso a los duales, la sucesión exacta

$$(5.3)\qquad H^1(\Omega,\mathbb{Z}) \xrightarrow{Q_*} H^1(\Omega_1,\mathbb{Z})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{P_*} H^1(\Omega_{12},\mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Hemos identificado $H^1(\Omega_1,\mathbb{Z})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{Z})$ con $Hom_{\mathbb{Z}}(H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2),\mathbb{Z})$ de la siguiente manera: si $\langle,\rangle$ denota el paréntesis de dualidad,

$$H^1(\Omega_i,\mathbf{Z})\times H_1(\Omega_i) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

$$(I,\langle\alpha\rangle_i) \longrightarrow I(\langle\alpha\rangle_i),$$

es decir, si

(5.4) $\quad \langle I,\langle\alpha\rangle_i\rangle = I(\langle\alpha\rangle_i), \quad i = 0,1,2,12,$

sea

(5.5) $\quad \Delta : H_1(\Omega_1,\mathbf{Z})\oplus H_1(\Omega_2,\mathbf{Z}) \to Hom_{\mathbf{Z}}(H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2),\mathbf{Z})$

definida, cualesquiera que sean $\alpha \in C(\Omega_1)$, $\beta \in C(\Omega_2)$, por

(5.6) $\quad \langle\Delta(I_1,I_2), (\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2)\rangle = I_1(\langle\alpha\rangle_1) - I_2(\langle\beta\rangle_2).$

La aplicación Δ es evidentemente lineal. Es inyectiva, pues $I_1(\langle\alpha\rangle_1) = I_2(\langle\beta\rangle_2)$ para todo $\alpha \in C(\Omega_1)$, $\beta \in C(\Omega_2)$ es posible si y sólo si $I_1 = I_2 = 0$. Por otra parte, si $L : H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2) \to \mathbf{Z}$ es lineal y definimos $L_i : H_1(\Omega_i) \to \mathbf{Z}$, $i = 1,2$, por

$$L_1(\langle\alpha\rangle_1) = L(\langle\alpha\rangle_1,0), \quad L_2(\langle\beta\rangle_2) = L(0,\langle\beta\rangle_2),$$

evidentemente

$$L = \Delta(L_1 - L_2).$$

Se concluye que Δ es un isomorfismo.

La aplicación $P*$ está dada por

(5.7) $$\langle P*(I_1,I_2),\langle\gamma\rangle_{12}\rangle = \langle(I_1,I_2),P(\langle\gamma\rangle_{12})\rangle$$

$$= \langle(I_1,I_2),(\langle\gamma\rangle_1,\langle\gamma\rangle_2)\rangle$$

$$= I_1(\langle\gamma\rangle_1) - I_2(\langle\gamma\rangle_2),$$

donde en la última igualdad hemos hecho uso de la identificación (5.5). Por otra parte, $\mathcal{Q}^*$ es:

$$(5.8)\qquad \langle \mathcal{Q}^*(I),(\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2)\rangle = \langle I,\mathcal{Q}(\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2)\rangle$$
$$= \langle I,\langle\alpha\rangle_o - \langle\beta\rangle_o\rangle$$
$$= I(\langle\alpha\rangle_o) - I(\langle\beta\rangle_o).$$

En el siguiente diagrama, las aplicaciones verticales son sobreyectivas y los cuadrados son conmutativos. Si $f_i = f|_{\Omega_i}$, $i = 1,2$, las aplicaciones p,q están definidas por

$$(5.9)\qquad q(f) = (f_1,f_2),\quad p(f,g) = f/g.$$

El diagrama es:

$$(5.10)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}^*(\Omega) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\mathbb{J}_o"] & \mathcal{O}^*(\Omega_1)\oplus\mathcal{O}^*(\Omega_2) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathbb{J}_1\oplus\mathbb{J}_2"] & \mathcal{O}^*(\Omega_{12}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{J}_{12}"] & 0 \\ & H^1(\Omega,\mathbf{Z}) \arrow[r, "\mathcal{Q}^*"] & H^1(\Omega_1,\mathbf{Z})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbf{Z}) \arrow[r, "P^*"] & H^1(\Omega_{12},\mathbf{Z}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

La exactitud de (5.1), los resultados básicos de análisis complejo en la sección 2, y algo de paciencia, permiten demostrar los dos teoremas siguientes. Detalles pueden encontrarse en [37].

TEOREMA 5.1. *Sean $f_1 \in \mathcal{O}^*(\Omega_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}^*(\Omega_2)$, y supóngase que existe $g \in \mathcal{O}(\Omega_{12})$ tal que*

$$f_1(z) / f_2(z) = e^{g(z)}, \quad z \in \Omega_{12}.$$

Entonces existen $h_i \in \mathcal{O}^*(\Omega_i)$, $i = 1,2$ y $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ tales que

$$f = e^{h_i} f_i, \quad \text{en } \Omega_i, \quad i = 1,2.$$

TEOREMA 5.2. *Si $f \in \mathcal{O}^*(\Omega_{12})$, existen $f_1 \in \mathcal{O}^*(\Omega_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}^*(\Omega_2)$ y g en $\mathcal{O}(\Omega_{12})$ tales que*

$$f(z) = e^{g(z)} f_1(z) / f_2(z), \quad z \in \Omega_{12}.$$

Los resultados contenidos en los dos teoremas anteriores son los mejores que pueden obtenerse por argumentos topológicos. Esto es consecuencia del siguiente teorema, recíproco de ellos, y cuya demostración es también un ejercicio de paciencia (ver [37]).

TEOREMA 5.3. *Sean Ω de conexión finita y (Ω_1, Ω_2) una escisión de Ω. Supóngase que:*

(1) *Si $f_i \in \mathcal{O}^*(\Omega_i)$, $i = 1,2$, y, en Ω_{12},*

$$f_1 / f_2 = e^g, \quad g \in \mathcal{O}(\Omega_{12}),$$

siempre existen $f \in \mathcal{O}^*(\Omega)$ y $h_i \in \mathcal{O}^*(\Omega_i)$ tales que

$$f = e^{h_i} f_i, \quad \text{en } \Omega_i.$$

(2) *Si* $f \in O^*(\Omega_{12})$, *existen* $f_i \in O^*(\Omega_i)$, $i = 1,2$, *y* $g \in O^*(\Omega_{12})$, *tales que*

$$f = e^g(f_1 / f_2), \quad \text{en } \Omega_{12}.$$

Entonces, la sucesión (5.3) *es exacta.*

NOTA 5.1. Si Ω_{12} es conexo entonces Q_* es inyectiva.

Sea Ω un dominio n-conexo. El espacio vectorial $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ se identifica naturalmente con el $\mathbb{C}$-espacio $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\Omega,\mathbb{Z})$. En efecto, la aplicación

$$\mathbb{C}\times H^1(\Omega,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathbb{Z})$$

$$(\lambda,I) \longrightarrow \lambda I,$$

donde λI está definida como en 4, es bilineal, e induce entonces una aplicación lineal

$$\mathbb{C}\otimes H^1(\Omega,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathbb{C}).$$

$$\lambda\otimes I \longrightarrow \lambda I$$

Tal aplicación es un isomorfismo que transforma la $\mathbb{C}$-base $(1\otimes I_1,\dots,1\otimes I_n)$ de $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ en la $\mathbb{C}$-base $(I_1,\dots,I_n)$ de $H^1(\Omega,\mathbb{C})$. Aquí, I_k, $k = 1,2,\dots,n$, está dada por (4.3). Identificaremos a $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}} H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ con $H^1(\Omega,\mathbb{C})$ mediante tal isomorfismo (de modo que $\lambda\otimes I = \lambda I$). Como $\mathbb{Z}$ es un anillo principal y $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo sin torsión, de la exactitud de (5.3) se deduce que si (Ω_1,Ω_2) es una escisión de Ω, la sucesión

$$(5.11)\quad H^1(\Omega,\mathbb{C}) \xrightarrow{Q^*} H^1(\Omega_1,\mathbb{C})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{C}) \xrightarrow{P^*} H^1(\Omega_{12},\mathbb{C}) \longrightarrow 0,$$

en la cual $P^* = 1\otimes P_*$, $Q^* = 1\otimes Q_*$ y 1 es la identidad de $\mathbb{C}$, es exacta (ver Lang [21], p.566).

De nuevo identificaremos $H^1(\Omega_1,\mathbb{C})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{C})$ con $Hom_{\mathbb{C}}(H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2),\mathbb{C})$ mediante la aplicación

$$(5.12)\quad \Delta : H_1(\Omega_1,\mathbb{C})\oplus H_1(\Omega_2,\mathbb{C}) \to Hom_{\mathbb{C}}(H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2),\mathbb{C})$$

definida por

$$(5.13)\quad \Delta(I_1,I_2)((\langle\alpha\rangle_1,\langle\alpha\rangle_2)) = I_1(\langle\alpha\rangle_1) - I_2(\langle\alpha\rangle_2).$$

NOTA 5.2. Obsérvese que en el diagrama

$$(5.14)\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & O(\Omega) & \xrightarrow{q} & O(\Omega_1)\oplus O(\Omega_2) & \xrightarrow{p} & O(\Omega_{12}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle I_0} & & \downarrow{\scriptstyle I_1\oplus I_2} & & \downarrow{\scriptstyle I_{12}} & & \\ & & H^1(\Omega,\mathbb{C}) & \xrightarrow{Q^*} & H^1(\Omega_1,\mathbb{C})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{C}) & \xrightarrow{P^*} & H^1(\Omega_{12},\mathbb{C}) & \to & 0, \end{array}$$

en el cual

$$q(f) = (f|_{\Omega_1}, f|_{\Omega_2}), \quad p(f,g) = f - g,$$

y

$$I_i(f)(\langle\sigma\rangle_i) = \int_\sigma f dz, \quad i = 0,1,2,12, \quad \Omega = \Omega_0,$$

los cuadrados son conmutativos y, siendo (Ω_1,Ω_2) una escisión de Ω, las aplicaciones de I_i son sobre yectivas, así que $I_1 \oplus I_2$ también lo es.

Los siguientes resultados son consecuencia de la exactitud de (5.11) y de los resultados básicos de análisis complejo de la Sección Nº 2. En cierta forma son versiones aditivas de los Teoremas 5.1 y 5.2. Sus demostraciones se obtienen con un poco de paciencia y cuidado.

TEOREMA 5.4. *Sean (Ω_1, Ω_2) una escisión de Ω. Entonces, si $f_1 \in \mathcal{O}(\Omega_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$, $g \in \mathcal{O}(\Omega_{12})$ y $f_1 - f_2 = g'$ en Ω_{12}, existen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y h_i en $\mathcal{O}(\Omega_i)$, $i = 1,2$, tales que*

$$f - f_i = h_i', \quad \text{en } \Omega_i, \quad i = 1,2.$$

TEOREMA 5.5. *Sean (Ω_1, Ω_2) una escisión de Ω, $f \in \mathcal{O}(\Omega_{12})$. Entonces, existen $f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, $i = 1,2$, y $h \in \mathcal{O}(\Omega_{12})$, tales que*

$$f = f_1 - f_2 + h', \quad \text{en } \Omega_{12}.$$

COROLARIO 5.1. *Bajo la hipótesis del teorema, para todo $n \geq 1$ existen $f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, $i = 1,2$, y $h \in \mathcal{O}(\Omega_{12})$ tales que*

$$f = f_1 - f_2 + h^{(n)}, \quad \text{en } \Omega_{12}.$$

El siguiente resultado muestra que la conjunción de los resultados en los Teoremas 5.4 y 5.5 equivale a la exactitud de (5.11). Los detalles de la demostración pueden encontrarse en [37].

TEOREMA 5.6. *Sean Ω un dominio de conexión finita, (Ω_1,Ω_2) una escisión de Ω. Supóngase que*

(1) Dadas $f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, $i = 1,2$ tales que

$$f_1 - f_2 = g', \quad \text{en } \Omega_{12}, \quad g \in \mathcal{O}(\Omega_{12}),$$

siempre existen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $h_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$ tales que

$$f = f_i + h'_i$$

en Ω_i, $i = 1,2$.

(2) Dada $f \in \mathcal{O}(\Omega_{12})$, existen $f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, $i = 1,2$, y $g \in \mathcal{O}(\Omega_{12})$ tales que

$$f = f_1 - f_2 + g'$$

en Ω_{12}.

Entonces, la sucesión (5.11) es exacta.

NOTA 5.3. Si Ω_{12} es conexo entonces $\mathcal{Q}^*$ es inyectiva.

§6. DEL ANALISIS A LA TOPOLOGIA.

En esta sección daremos demostraciones analíticas de los resultados contenidos en los Teoremas 5.1 y 5.2, así como en los Teoremas 5.4 y 5.5, comenzando con estos últimos.

En lo que sigue, usaremos repetidas veces el siguiente lema, demostraciones del cual pueden encontrarse en [5], [10], [15].

LEMA A. (Dolbeault). *Sea* g *de clase* C^p, $1 \leq p \leq \infty$, *en el abierto* Ω *de* $\mathbb{C}$. *Entonces existe* f, *de clase* C^{p+1} *en* Ω, *tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = g(z)$$

para todo $z \in \Omega$.

También haremos uso del siguiente resultado sobre *particiones suaves de la unidad.* **Recordamos** que una familia $(\phi_i)_{i \in I}$ de funciones C^∞ definidas en Ω es una *partición suave de la unidad en* Ω, si

(1) Para todo $z \in \Omega$, $\phi_i(z) \geq 0$.

(2) Para todo $z \in \Omega$, $\phi_i(z) = 0$ salvo para un número finito de índices $i \in I$.

(3) Para todo $z \in \Omega$, $\sum_{i \in I} \phi_i(z) = 1$.

Una demostración del siguiente lema puede encontrarse en Lang [20].

LEMA B. (De Rahm, Schwartz, Dieudonné). *Si* $(U_j)_{j \in J}$ *es un recubrimiento de* Ω *por conjuntos abiertos, existe una partición suave de la unidad* $(\phi_i)_{i \in I}$ *en* Ω, *subordinada a* $(U_j)_{j \in J}$ *en el sentido siguiente: para todo* $i \in I$ *existe* $j \in J$ *tal que*

$$Supp\,\phi_i = \overline{\{z \mid \phi_i(z) \neq 0\}} \subseteq U_j.$$

La demostración de nuestro primer resultado es adaptación de ciertas técnicas usadas por Hörmander en la teoría de cohomología con coeficientes en el haz $\mathcal{O}$ de las funciones holomorfas sobre una variedad analítica compleja ([16], Cap.I,Theorem 1.4.5). Los detalles, que pueden encontrarse en [37], son aplicaciones directas de los Lemas A y B.

TEOREMA 6.1. *Dados dominios Ω_1, Ω_2 del plano y $f \in \mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, existen $g \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ y $h \in \mathcal{O}(\Omega_2)$, tales que*

$$f = g - h .$$

NOTA 6.1. Es claro que el Teorema 6.1 generaliza, aunque no en forma tan precisa, el teorema de Laurent del análisis complejo elemental.

Sean entonces (Ω_1, Ω_2) una escisión de Ω, $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$. El Teorema 5.5 es consecuencia inmediata del 6.1, con $h = 0$; es decir, el Teorema 6.1 es más fuerte que el Teorema 5.5. Es también fácil ver que el Teorema 6.1 implica el 5.4.

TEOREMA 6.2. *La sucesión (5.11) es exacta.*

Se obtiene así una demostración puramente analítica de la exactitud de (5.11). También hemos establecido el siguiente

TEOREMA 6.3. *Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$, Ω_1 y Ω_2 subdominios de Ω tales que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Sea $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$.*

Entonces, la sucesión

$$(6.1)\quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \xrightarrow{p} \mathcal{O}(\Omega_1)\oplus\mathcal{O}(\Omega_2) \xrightarrow{q} \mathcal{O}(\Omega_{12}) \longrightarrow 0,$$

donde

$$p(f) = (f|_{\Omega_1}, f|_{\Omega_2}); \quad q(f_1, f_2) = f_1 - f_2, \quad \text{en } \Omega_{12},$$

es exacta.

Sean $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ discos abiertos de $\mathbb{C}$ y sea f en $\mathcal{O}^*(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2)$. Entonces $f = e^F$, donde $F \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2)$, pues $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ es simplemente conexo. Del Teorema 6.1 se deduce que, en $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, $F = G - H$, donde $G \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_1)$ y $H \in \mathcal{O}(\mathcal{D}_2)$. Se concluye, tomando $g = e^G$, $h = e^H$, que en $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

$$f = g / h,$$

donde $g \in \mathcal{O}^*(\mathcal{D}_1)$, $h \in \mathcal{O}^*(\mathcal{D}_2)$.

Sean ahora Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{C}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Sean f en $\mathcal{O}^*(\Omega_{12})$ y $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de Ω por discos abiertos tales que, para todo $i \in I$, existe $k_i = 1$ ó $k_i = 2$ tal que $\mathcal{D}_i \subseteq \Omega_{k_i}$. Sean además $f_{11} = 1$ en Ω_1, $f_{22} = 1$ en Ω_2, $f_{12} = f$, $f_{21} = 1/f$ en Ω_{12}. Nótese que

$$f_{ij} f_{ji} = 1, \quad \text{en } \Omega_i \cap \Omega_j$$

y que

$$f_{ij} f_{jk} f_{ki} = 1, \quad \text{en } \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k,$$

$i, j, k = 1,2$. A su vez, sea g_{ij} definida en $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j$, si $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \neq \Phi$, por

$$g_{ij} = f_{k_i k_j}, \quad i, j \in I,$$

de tal manera que si $\mathcal{D}_i \not\subseteq \Omega_2$ y $\mathcal{D}_j \not\subseteq \Omega_1$ entonces

$$g_{ij} = f_{12} = f, \quad \text{en } \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j.$$

Nótese que

$$g_{ij} g_{ji} = 1, \quad \text{en } \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j,$$

y que

$$g_{ij} g_{jk} g_{ki} = 1, \quad \text{en } \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k,$$

$i, j, k \in I$. En virtud de la discusión anterior, existen funciones g_i en $\mathcal{O}^*(\mathcal{D}_i)$ tales que

$$g_{ij} = g_i / g_j, \quad \text{en } \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j (i, j \in I).$$

Sea $g \in \mathcal{O}^*(\Omega_1)$ definida por

$$g(z) = f_{1k_i}(z) g_i(z)$$

si $z \in \mathcal{D}_i$, $z \in \Omega_1$. Veamos que g está bien definida, es decir, que no depende de $i \in I$. Nótese que en $\Omega_1 \cap \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_{k_i} \cap \Omega_{k_j}$ se tiene que

$$f_{1k_i} g_{ij} f_{k_j 1} = f_{1k_i} f_{k_i k_j} f_{k_j 1} = 1,$$

o sea, que

$$f_{1k_i} g_i / g_j f_{k_j 1} = 1.$$

De esto,

$$f_{1k_i} g_i = g_j \cdot 1 / f_{k_j 1} = f_{1k_j} g_j.$$

Por lo tanto, si también $z \in \mathcal{D}_j$, entonces

$$f_{1k_i}(z) g_i(z) = f_{1k_j}(z) g_j(z).$$

Definiendo $h \in \mathcal{O}^*(\Omega_2)$ por

$$h(z) = f_{2k_i}(z)g_i(z),$$

si $z \in D_i$, $i \in I$, se tiene, para $z \in \Omega_{12}$, $z \in D_i$, que

$$g(z)\,/\,h(z) = f_{1k_i}(z)g_i(z)\,/\,f_{2k_i}(z)g_i(z) = f_{1k_i}(z)f_{k_i2}(z)$$

$$= f_{12}(z) = f(z).$$

Hemos demostrado, entonces, el siguiente

TEOREMA 6.4. *Si Ω_1, Ω_2 son abiertos de $\mathbb{C}$ y $f \in O^*(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, existen $g \in O^*(\Omega_1)$ y $h \in O^*(\Omega_2)$ tales que*

$$f(z) = g(z)\,/\,h(z)$$

para todo $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

NOTA 6.3. Es claro que el Teorema 6.4 implica el Teorema 5.2. Del Teorema 6.4 se deduce, sin mucho esfuerzo, que

COROLARIO 6.1. *La sucesión*

$$(6.2)\quad 0 \longrightarrow O^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) \xrightarrow{p^*} O^*(\Omega_1)\oplus O^*(\Omega_2) \xrightarrow{q^*} O^*(\Omega_1 \cap \Omega_2) \longrightarrow 0$$

donde $p^*(f) = (f_1, f_2)$, siendo f_i la restricción de f a Ω_i, $i = 1,2$, y donde $q^*(f,g)(z) = f(z)\,/\,g(z)$ para $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ es exacta.

NOTA 6.4. Sean Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{C}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ y $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Si $f_i \in O^*(\Omega_i)$, $i = 1,2$, son tales que $f_1\,/\,f_2 = e^g$, en Ω_{12}, donde $g \in O(\Omega_{12})$, entonces existen $h_i \in O(\Omega_i)$, $i = 1,2$, y $f \in O^*(\Omega)$, tales que $f = f_i e^{h_i}$, en Ω_i, $i = 1,2$. En efecto, existen $h_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, $i = 1,2$, tales que $g = h_2 - h_1$ en Ω_{12}. Entonces $f_1 e^{h_1} = f_2 e^{h_2}$, en Ω_{12}, así que

$$f = \begin{cases} f_1 e^{h_1}, & \text{en } \Omega_1 \\ f_2 e^{h_2}, & \text{en } \Omega_2, \end{cases}$$

es holomorfa en Ω. El Teorema 6.4 implica entonces, también, el Teorema 5.1. Se concluye, del Teorema 5.3, que

TEOREMA 6.5. *Si Ω es un dominio de $\mathbb{C}$ y (Ω_1,Ω_2) es una escisión de Ω, entonces la sucesión (5.3) es exacta.*

Sean ahora

$$(6.3) \qquad H_1^*(\Omega,\mathbf{Z}) = Hom_{\mathbf{Z}}(H^1(\Omega,\mathbf{Z}), \mathbf{Z})$$

el módulo bidual de $H_1(\Omega)$, Q_{**} la aplicación dual de Q_* (es decir, la aplicación bidual de Q), P_{**} la aplicación dual de P_*.

Sea Ω de conexión finita y sea

$$(6.4) \qquad \Gamma : H_1(\Omega) \longrightarrow H_1^*(\Omega,\mathbf{Z}),$$

definida de la siguiente manera: si $\alpha \in C(\Omega)$ e $I \in H^1(\Omega,\mathbb{Z})$, entonces

$$(6.5) \qquad \Gamma(\langle\alpha\rangle)(I) = \langle I,\langle\alpha\rangle\rangle.$$

No es difícil verificar que Γ es un isomorfismo.

Si (Ω_1,Ω_2) es una escisión de Ω, en el diagrama

$$
(6.6)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & H_1(\Omega_{12}) & \xrightarrow{P} & H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2) & \xrightarrow{Q} & H_1(\Omega) & \\
& \Big\downarrow \Gamma_{12} & & \Big\downarrow \Gamma_1\oplus\Gamma_2 & & \Big\downarrow \Gamma_o & \\
0 \longrightarrow & H_1^*(\Omega_{12},\mathbb{Z}) & \xrightarrow{P_{**}} & H_1^*(\Omega_1,\mathbb{Z})\oplus H_1^*(\Omega_2,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{Q_{**}} & H_1^*(\Omega,\mathbb{Z}) & ,
\end{array}
$$

en el cual $\Gamma_i : H_1(\Omega_i) \to H_1^*(\Omega_i,\mathbb{Z})$ son las aplicaciones dadas por (6.5) para $\Omega = \Omega_i$, $i = 0,1,2,12$, la fila inferior es exacta y los cuadrados son conmutativos. Como las aplicaciones verticales son isomorfismos, podemos concluir que

TEOREMA 6.6. *Si Ω es de conexión finita y (Ω_1,Ω_2) es una escisión de Ω, la sucesión (5.1) es exacta.*

Se obtiene así, por métodos esencialmente analíticos, la exactitud de (5.1). La sucesión (5.1) es parte de una sucesión más larga, conocida como la Sucesión de Mayer-Vietoris. En la próxima sección nos ocuparemos de la exactitud de tal sucesión. Veremos cómo los métodos analíticos son también útiles en tal caso. Para terminar esta sección, establezcamos algunas consecuencias de la exactitud de (5.1)

TEOREMA 6.7. *Sean $\alpha \in C(\Omega_1)$, $\beta \in C(\Omega_2)$ y supóngase que $\alpha \sim \beta(\Omega)$. Entonces existe $\gamma \in C(\Omega_{12})$ tal que*

$$\alpha \sim \gamma(\Omega_1), \quad \beta \sim \gamma(\Omega_2).$$

Demostración. Si $\alpha \sim \beta(\Omega)$ entonces $\mathcal{Q}(\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2) = \langle\alpha\rangle_o - \langle\beta\rangle_o = 0$, ó sea, $(\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2) \in Ker\mathcal{Q}$. Se deduce que $(\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2) \in ImP$, así que, para alguna $\gamma \in C(\Omega_{12})$, $(\langle\alpha\rangle_1,\langle\beta\rangle_2) = P(\langle\gamma\rangle_{12}) = (\langle\gamma\rangle_1,\langle\gamma\rangle_2)$. Entonces $\langle\alpha\rangle_1 = \langle\gamma\rangle_1$ y $\langle\beta\rangle_2 = \langle\gamma\rangle_2$. Esto demuestra el teorema. ▲

Esencialmente el mismo tipo de argumentos de la anterior demostración muestra que

TEOREMA 6.8. Si Ω es un dominio de conexión finita y (Ω_1,Ω_2) es una escisión conexa de Ω, entonces la sucesión

$$(6.7) \qquad 0 \longrightarrow H_1(\Omega_1 \cap \Omega_2) \xrightarrow{P} H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2) \xrightarrow{\mathcal{Q}} H_1(\Omega) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Si $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$ no es conexo, es falso, en general, que $\mathcal{Q}$ sea sobreyectiva.

EJEMPLO 6.1. Si $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$, $\Omega_1 = \mathbb{C} - \{\lambda \mid \lambda < 0\}$, $\Omega_2 = \mathbb{C} - \{\lambda \mid \lambda \geq 0\}$. Entonces Ω es 1-conexo, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, Ω_1 y Ω_2 son 0-conexos, y $\Omega_{12} = \{z \mid Im\ z > 0\} \cup \{z \mid Im\ z < 0\}$. Entonces

$$H_1(\Omega_{12}) = H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2) = \{0\},$$

pero $H_1(\Omega) \neq \{0\}$. Por lo tanto, $\mathcal{Q}$ no puede ser sobreyectiva.

TEOREMA 6.9. *Si Ω es n-conexo, $n > 1$, no puede existir una escisión (Ω_1,Ω_2) de Ω formada por dominios 0-conexos Ω_1 y Ω_2 tales que Ω_{12} sea conexo.*

Demostración. Bajo la hipótesis de que Ω_{12} sea conexo, Q es sobre. Esto es absurdo, pues $H_1(\Omega_1) = H_1(\Omega_2) = H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2) = \{0\}$, pero $H_1(\Omega) \neq \{0\}$. ▲

En particular, es imposible obtener una escisión conexa de una corona $\{z \mid 0 \leqslant r < |z-a| \leqslant R \leqslant \infty\}$, la cual esté formada por conjuntos simplemente conexos. También se deduce, de la exactitud de (5.1), que

TEOREMA 6.10. *Si Ω es n-conexo, (Ω_1,Ω_2) es una escisión conexa de Ω y Ω_i es n_i-conexo, $i = 1,2,12$, entonces*

$$n_1 + n_2 - n_{12} = n. \tag{6.8}$$

En particular,

$$n_{12} \leqslant n_1 + n_2 \text{ y } n_1 + n_2 \geqslant n. \tag{6.9}$$

Demostración. En efecto, como Q es sobreyectiva y $\operatorname{Ker} Q = P(H(\Omega_{12}))$, se tiene que

$$H_1(\Omega) \approx \frac{H_1(\Omega_1)\oplus H_1(\Omega_2)}{P(H_1(\Omega_{12}))}.$$

Además, P es inyectiva, así que

$$H_1(\Omega_{12}) \approx P(H_1(\Omega_{12})).$$

Esto demuestra el teorema. ▲

NOTA 6.5. El resultado del teorema anterior es falso si (Ω_1,Ω_2) no es una escisión conexa.

§7. LAS SUCESIONES DE MAYER-VIETORIS.

Definiremos en esta sección grupos de homología y cohomología de Artin en dimensión 0. Luego extenderemos las sucesiones (5.1), (5.3) y (5.11) en sucesiones exactas del tipo de Mayer-Vietoris. Daremos también algunas aplicaciones.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, no necesariamente conexo, y sea $H^0(\Omega,\mathbb{Z})$ el $\mathbb{Z}$-módulo de las aplicaciones continuas de Ω en $\mathbb{Z}$, es decir, de las aplicaciones de Ω en $\mathbb{C}$ que son constantes sobre cada componente conexa de Ω y que toman únicamente valores enteros. Claramente $H^0(\Omega,\mathbb{Z}) \subset \mathcal{O}(\Omega)$. Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ es la familia de las componentes conexas de Ω y, para cada $i \in I$, $\delta_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ está dada por

$$\delta_i(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_i, \\ 0, & z \notin \Omega_i, \end{cases}$$

entonces $(\delta_i)_{i\in I}$ es una base del $\mathbb{Z}$-módulo $\bigoplus_{i\in I} H^0(\Omega_i,\mathbb{Z})$, y es claro que si I es infinito entonces $H^0(\Omega,\mathbb{Z}) \neq \bigoplus_{i\in I} H^0(\Omega_i,\mathbb{Z})$. Si $I = \{1,2,\ldots,n\}$, la aplicación

$$(7.1)\qquad \begin{aligned} \mathbb{Z}^n &\longmapsto H^0(\Omega,\mathbb{Z}) \\ (m_1,\ldots,m_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

DEFINICION 7.1. **El $\mathbb{Z}$-módulo $H^{0}(\Omega,\mathbb{Z})$ se denomina el** ***grupo de cohomología de Artin, en dimensión*** **0, de Ω.**

Sea (Ω_1,Ω_2) una escisión de Ω y sea $f \in H^{0}(\Omega_{12},\mathbb{Z})$. En virtud del Teorema 6.1, existen $f_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, $i = 1,2$, tales que $f = f_1 - f_2$. Sea

$$(7.2)\qquad \hat{f}(z) = \begin{cases} e^{2\pi i f_1(z)}, & z \in \Omega_1, \\ e^{2\pi i f_2(z)}, & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

Puesto que $f(z) \in \mathbb{Z}$ para todo $z \in \Omega_{12}$, $e^{2\pi i f_1(z)} = e^{2\pi i f_2(z)}$ si $z \in \Omega_{12}$, de lo cual $\hat{f}$ es analítica en Ω. Si también $f = g_1 - g_2$, $g_i \in \mathcal{O}(\Omega_i)$, y

$$\hat{g}(z) \begin{cases} e^{2\pi i g_1(z)}, & z \in \Omega_1, \\ e^{2\pi i g_2(z)}, & z \in \Omega_2, \end{cases}$$

entonces

$$\frac{\hat{f}}{\hat{g}}(z) = \begin{cases} e^{2\pi i (f_1 - g_1)(z)}, & z \in \Omega_1 \\ e^{2\pi i (f_2 - g_2)(z)}, & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

Pero $f_1 - g_1 = f_2 - g_2$ en Ω_{12}. Por lo tanto,

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z), & z \in \Omega_1, \\ f_2(z) - g_2(z), & z \in \Omega_2, \end{cases}$$

es analítica en Ω. Se deduce que

$$\hat{f} / \hat{g}(z) = e^{2\pi i h(z)}, \quad z \in \Omega,$$

de lo cual

$$\mathbb{J}(\hat{f}) = \mathbb{J}(\hat{g}).$$

Aquí, $\mathbb{J} : \mathcal{O}^*(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ está dada por (4.5).

Definamos entonces $\delta_* : H^o(\Omega_{12},\mathbb{Z}) \longmapsto H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ por

(7.3) $$\delta_*(f) = \mathbb{J}(\hat{f}).$$

En virtud de la discusión anterior, δ_* está bien definida. Un poco de paciencia demuestra el siguiente lema. Los detalles se encuentran en [37].

LEMA 7.1. *Sean Ω un dominio de conexión finita de $\mathbb{C}$, (Ω_1,Ω_2) una escisión de Ω, $\Omega_{12} = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Sean $\delta_* : H^o(\Omega_{12},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathbb{Z})$, $Q_* : H^1(\Omega,\mathbb{Z}) \to H^1(\Omega_1,\mathbb{Z}) \oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{Z})$ dados respectivamente por (7.3) y (5.8). Entonces,*

$$Im\delta_* = KerQ_*.$$

Sea ahora

$$\varepsilon_* : H^o(\Omega_1,\mathbb{Z}) \oplus H^o(\Omega_2,\mathbb{Z}) \longmapsto H^o(\Omega_{12},\mathbb{Z})$$

dada por

(7.4) $$\varepsilon_*(f,g) = f - g.$$

Los mismos ingredientes usados en la demostración del lema anterior demuestran que

LEMA 7.2. *Bajo las hipótesis del Lema 7.1,*

$$Im\varepsilon_* = Ker\delta_*.$$

Sea finalmente $\eta_* : H^o(\Omega,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^o(\Omega_1,\mathbb{Z})\oplus H^o(\Omega_2,\mathbb{Z})$ dada por

(7.5) $$\eta_*(f) = (f|_{\Omega_1}, f|_{\Omega_2}).$$

La sucesión

(7.6) $$0 \longrightarrow H^o(\Omega,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta_*} H^o(\Omega_1,\mathbb{Z})\oplus H^o(\Omega_2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^o(\Omega_{12},\mathbb{Z})$$

es evidentemente exacta. Por lo tanto, en virtud de los Lemas 7.1 y 7.2, se concluye que

TEOREMA 7.1. *Si (Ω_1,Ω_2) es una escisión del dominio de conexión finita Ω, entonces*

(7.7) $$0 \longrightarrow H^o(\Omega,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta_*} H^o(\Omega_1,\mathbb{Z})\oplus H^o(\Omega_2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^o(\Omega_{12},\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{\delta_*} H^1(\Omega,\mathbb{Z}) \xrightarrow{Q_*} H^1(\Omega_1,\mathbb{Z})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{P_*} H^1(\Omega_{12},\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

La sucesión exacta del corolario anterior se denominará *la sucesión exacta de Mayer-Vietoris de Ω, relativa a (Ω_1,Ω_2), para la cohomología de Artin.* Escribiendo $H^o(\Omega_i,\mathbb{C}) = H^o(\Omega_i,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$, $i = 0,1,2,12$ $(\Omega_o = \Omega)$ y $\eta^* = \eta_*\otimes 1$, $\varepsilon^* = \varepsilon_*\otimes 1$, $\delta^* = \delta_*\otimes 1$, se deduce que

COROLARIO 7.1. *Si (Ω_1,Ω_2) es una escisión de Ω, entonces*

(7.8) $$0 \longrightarrow H^o(\Omega,\mathbb{C}) \xrightarrow{\eta^*} H^o(\Omega_1,\mathbb{C})\oplus H^o(\Omega_2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^o(\Omega_{12},\mathbb{C})$$
$$\xrightarrow{\delta^*} H^1(\Omega,\mathbb{C}) \xrightarrow{Q^*} H^1(\Omega_1,\mathbb{C})\oplus H^1(\Omega_2,\mathbb{C}) \xrightarrow{P^*} H^1(\Omega_{12},\mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Tanto (7.7) como (7.8) tienen aplicaciones interesantes, las cuales son difíciles de obtener por otros medios. Por ejemplo:

TEOREMA 7.2. *Sean Ω un dominio de conexión finita n, (Ω_1,Ω_2) una escisión de Ω tal que Ω_1, Ω_2 son simplemente conexos. Entonces Ω_{12} tiene $n+1$ componentes conexas.*

Demostración. Es claro que $H^0(\Omega,\mathbb{Z}) \approx H^0(\Omega_1,\mathbb{Z}) \approx H^0(\Omega_2,\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ y que $H^1(\Omega_1,\mathbb{Z}) = H^1(\Omega_2,\mathbb{Z}) = \{0\}$. Se tiene entonces la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \longrightarrow H^0(\Omega_{12},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\Omega,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

de la cual se deduce que

$$1 - 2 + \mathrm{Dim}_{\mathbb{Z}}(H^0(\Omega_{12},\mathbb{Z})) - n = 0.$$

Entonces

$$\mathrm{Dim}_{\mathbb{Z}}(H^0(\Omega_{12},\mathbb{Z})) = n+1,$$

así que Ω_{12} tiene exactamente $n+1$ componentes conexas. ▲

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, y defínase

$$H_0(\Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^0(\Omega,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}). \tag{7.9}$$

El $\mathbb{Z}$-módulo $H_0(\Omega)$ se denomina el grupo de homología en dimensión 0 de Ω. Supóngase ahora que (Ω_1,Ω_2) es una escisión del dominio Ω, y sean $\varepsilon = \varepsilon_{**}$, $\eta = \eta_{**}$ las aplicaciones

$$(7.10) \qquad \varepsilon : H_o(\Omega_{12}) \longrightarrow H_o(\Omega_1) \oplus H_o(\Omega_2)$$

y

$$(7.11) \qquad \eta : H_o(\Omega_1) \oplus H_o(\Omega_2) \longrightarrow H_o(\Omega)$$

duales de ε_* y η_*, respectivamente. Si (Ω_1, Ω_2) es estricta, podemos también definir $\delta = \delta_{**}$, la aplicación dual de δ_*, así que, siendo Ω de conexión finita,

$$(7.12) \qquad \delta : H_1(\Omega) \longrightarrow H_o(\Omega_{12}),$$

como resulta de la identificación $H_1(\Omega) = Hom_{\mathbb{Z}}(H^1(\Omega, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$.

Por paso a los duales se tiene entonces que

TEOREMA 7.3. *Si Ω es de conexión finita y (Ω_1, Ω_2) es una escisión de Ω, la sucesión*

$$0 \longrightarrow H_1(\Omega_{12}) \xrightarrow{P} H_1(\Omega_1) \oplus H_1(\Omega_2) \xrightarrow{Q} H_1(\Omega) \xrightarrow{\delta} H_o(\Omega_{12})$$
$$\xrightarrow{\varepsilon} H_o(\Omega_1) \oplus H_o(\Omega_2) \xrightarrow{\eta} H_o(\Omega) \longrightarrow 0$$

es exacta.

La anterior es entonces una *sucesión exacta de Mayer-Vietoris para la homología de Artin.*

Sea $\pi_1(\Omega)$ el grupo fundamental de Ω y sea $\phi : \pi_1(\Omega) \mapsto H_1(\Omega)$ la aplicación que a la clase de homotopía $[\alpha]$ de $\alpha \in C(\Omega)$ hace corresponder la clase de homología $\langle\alpha\rangle$. Que ϕ está bien definida es consecuencia de la versión homotópica del Teorema de Cauchy. Evidentemente ϕ es un homomorfismo so-

breyectivo de grupos. D. Mond [26] ha demostrado que el núcleo $Ker\phi$ de ϕ coincide con el subgrupo derivado, o subgrupo de los conmutadores $\pi_1'(\Omega)$ de $\pi_1(\Omega)$. Como en virtud del Lema de Poincaré (Greenberg and Harper [13]), el grupo de homología singular $\hat{H}_1(\Omega)$ es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(\Omega)/\pi_1'(\Omega)$, entonces $\hat{H}_1(\Omega) \approx H_1(\Omega)$, y el isomorfismo hace corresponder a la clase de homología singular $\{\alpha\}$ de $\alpha \in C(\Omega)$ la clase $<\alpha>$. Esto permite fácilmente establecer una sucesión de Mayer-Vietoris para la homología singular usual a partir de la sucesión (5.1) y, a partir de ella, sucesiones para las cohomologías singulares. Por otra parte, es posible deducir el resultado de Mond, al menos en el caso de conexión finita, a partir de la exactitud de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris para la homología singular. Detalles pueden encontrarse en [37].

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

[1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*, 3a. Edición, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1979.

[2] Apostol, T.M., *Mathematical Analisis*, 2a. Edición, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

[3] Caratheodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, Chelsea, New York, N.Y. 1954.

[4] Charris, J.A., Izquierdo, E., *Algunas propieda*

des de conexión de los espacios localmente compactos y de sus compactados de Alexandroff. Por aparecer.

[5] Charris, J.A., Quintero, J., Rodrigues, G., *Teoría de Cauchy y Fundamentos del Análisis Complejo*, Public. III Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Univ.Dis. Fco. J. de Caldas, Univ. Nal. de Colombia, Univ. Pedagógica de Colombia,Bogotá, 1986.

[6] Conway, J.B., *Functions of one Complex Variable*, 2a. Edición, Springer, Berlin, 1978.

[7] Copson, E.T., *Functions of a Complex Variable*, Clarendon, Oxford, 1935.

[8] Dettman, J.W., *Applied Complex Analysis*, Dover, New York, N.Y., 1965.

[9] Dixon, J.D., Proc. Amer. Math. Soc., Vol.29, pp. 625-626. 1971.

[10] Fortster, O., *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer, Berlin, 1981.

[11] Hocking, J., Young, G., *Topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.

[12] Grabiner, S., Amer. Math. 83(1976), 807-808.

[13] Greenberg, M., Harper, J., *Algebraic Topology*, Benjamin, New York, N.Y., 1981.

[14] Grove, E.A., Ladas, G., *Introduction to Complex Variables*, Houghton, Boston, Mass., 1974.

[15] Gunning, R.G., *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1966.

[16] Hormander, L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966.

[17] Hormander, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin, 1963.

[18] Knopp, K., *Theory of Functions*, I,II, Dover, New York, N.Y., 1966.

[19] Lang, S., *Complex Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[20] Lang, S., *Real Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1983.

[21] Lang, S., *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.

[22] Mayer, J., *Algebraic Topology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.

[23] Mackey, G., *The Theory of Functions of a Complex Variable*, D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1967.

[24] Markuchevich, A.I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, I,II,III, Prentice Hall. Englewood Cliffs, N.J., 1967-1969.

[25] Massey, W.S., *Algebraic Topology*, Harcourt-Brace, New York, N.Y., 1967.

[26] Mond , D., Revista Col. de Mat. Vol.XIII, 1979. pp. 121-138, 1979.

[27] Nahrasimhan, R., *Complex Analysis in one Variable*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1985.

[28] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3a. Edición, McGraw-Hill, New York, N.Y. 1976.

[29] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1966.

[30] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 2a. Edición, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1974.

[31] Sacks, S., Zygmund, A., *Analytic Functions*, Monografie Matematyczne, Vol. 28, Warsaw, 1952.

[32] Simmons, G.F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1963.

[33] Singer, I.M., Thorpe, J., *Lecture Notes in Elementary Topology and Geometry*, M.I.T. press, Cambridge, Mass., 1970.

[34] Spivac, M., *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, N.Y., 1965.

[35] Titchmarsh, E.C., *The Theory of Functions*, Clarendon, Oxford, 1935.

[36] Vick, J.W., *Homology Theory*, Academic Press, New York, N.Y., 1973.

[37] Ortiz, C., *Análisis Complejo y Escisión en la Homología de Artin*, Tesis de Magister, Departamento de Matemática y Estadística, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

*

Dpto. de Matemáticas y Estadística. U. Nal. Bogotá, D.E.

Dpto. de Matemáticas. Univ. Tec. de los Llanos Orientales. Villavicencio.