Boletín de Matemáticas
Vol. XXI, Nº 1, (1987) APUNTES

LA CONEXIDAD Y EL AXIOMA DE COMPLETEZ

Rafael Ahumada

1. INTRODUCCION.

En el artículo "El axioma de Completez" del profesor Yu Takeuchi, se presentan ocho equivalencias de dicho axioma. En este trabajo exhibiremos otra equivalencia relacionada con la conexidad.

TEOREMA. Sea $K(+,\cdot,<)$ un cuerpo ordenado. Entonces: K satisface el axioma de completez si y sólo si K es conexo (según la topología de orden).

Demostración. "$\Rightarrow$" Supongamos que K satisface el axioma de completez. Sea F un subconjunto abierto y cerrado en K. Si F no es vacío existe $t \in K$ tal que $t \in F$. Veamos que $F = K$. Asumamos que $F \subsetneq K$, entonces existe $x \in K$ tal que $x \notin F$.

Así que $x \neq t$. Digamos que $t < x$. En tal caso llamemos $S = \{y \in F \mid y < x\}$, entonces $S \neq \phi$ (pues $t \in S$) y está acotado superiormente (por x). Por el axioma de completez existe $z \in K$, $z = \operatorname{Sup} S$. Como $\forall s \in S$, $s < x$ entonces $z \leqslant x$.

Si $z \notin F$ entonces $z \in F^c$ y como F^c es abierto existirá $r > 0$ tal que $(z-r, z+r) \subseteq F^c$. Pero, $z = \operatorname{Sup} S \Rightarrow \exists s_o \in S$: $z-r < s_o \leqslant z$, lo que constituye una contradicción ya que $s_o \in F$, y, $s_o \in (z-r, z+r)$. (Consideramos a K dotado de la topología de orden), así que $z \in F$ con lo que $z < x$ ($x \notin F$). Como F es abierto existe $\delta > 0$ tal que $(z-\delta, z+\delta) \subseteq F$.

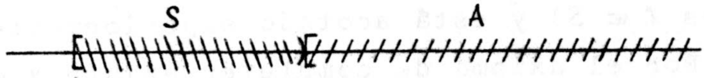
Tomemos $\lambda = \min\{\delta, x-z\}$. Entonces $(z-\lambda, z+\lambda) \subseteq F$. Luego si μ es tal que $z < \mu < z+\lambda$ entonces $\mu \in F$, y, $\mu < z+\lambda \leqslant x$, o sea que $\mu \in S$ con $z = \operatorname{Sup} S < \mu$. Concluimos que $F = K$ ó $F = \phi$, lo que implica que K es conexo.

(Si $x < t$ llamamos $S = \{y \in F \mid y > x\}$, usamos el hecho de que, por el axioma de completez, S tiene extremo inferior y procedemos análogamente hasta llegar a que $F = K$).

"$\Leftarrow$" Supongamos que K es conexo y sea $S \neq \phi$, $S \subseteq K$, S acotado superiormente.

Llamemos:

$A = \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ es cota superior de } S\}$



Entonces $A \neq \phi$ y $A \subsetneq K$ porque $S \subsetneq K$ (K no tiene máximo) y $S \neq \phi$. Si existe $s_o \in A$ tal que $s_o \in S$ entonces $s_o = \text{Sup}S$.

Asumamos que $\forall s \in S$, $s \notin A$ y veamos que A es cerrado en K. Sea $t \in A^c$. Entonces t no es cota superior de S y por lo tanto existe $s_o \in S$ con $t < s_o$. Llamemos $r = s_o - t > 0$ y mostremos que $(t-r, t+r) \subseteq A^c$:

Si $y \in (t-r, t+r)$ entonces $y < t+r = s_o$ con $s_o \in S$ y entonces y no puede ser cota superior de S. Se sigue que $y \in A^c$. Luego A^c es abierto, es decir, A es cerrado.

Como A es cerrado, $\phi \subsetneq A \subsetneq K$ y K conexo, entonces A no puede ser abierto. Por tanto existe $\alpha_o \in A$ tal que $\forall r \in K^+$: $(\alpha_o - r, \alpha_o + r) \nsubseteq A$. Concluyamos que $\alpha_o = \text{Sup}S$. Como $\alpha_o \in A$, α_o es cota superior de S.

Sea a cualquier cota superior de S ($a \in A$). Si se tuviera $a < \alpha_o$ entonces $r = \alpha_o - a > 0$ y por tanto $(a, \alpha_o + r) = (\alpha_o - r, \alpha_o + r) \nsubseteq A$, lo que es un absurdo ya que al ser a cota superior de S cada $x \geq a$ también lo será.

Luego, $\alpha_o \leq a$, esto es, α_o es la menor de las cotas superiores de S. ▲

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Takeuchi, Y., *Axioma de Completez*, Boletín de Matemáticas, Vol. XX, Nº 2, 1986.

[2] Linés, E., *Principios de Análisis Matemático*, E. Reverté S.A., España 1983.

* *

Departamento de Matemáticas
Universal Nacional.
Medellín.