Boletín de Matemáticas
Vol. XXI, Nº 1, (1987) **APORTES**

ALTERNATIVA DE FREDHOLM
PARA
OPERADORES MONOTONOS

Darío Sánchez Hernández

ABSTRACT. Several conditions are imposed on a non-linear operator of a reflexive Banach Space into its dual which allow to establish a Fredholm alternative for such an operator. Then an application is given to a problem in Algebraic Geometry.

RESUMEN. Se dan condiciones para que un operador no lineal de un espacio de Banach reflexivo en su dual satisfaga la alternativa de Fredholm. Se usa luego el resultado para responder a una pregunta en Geometría Algebraica.

§1. **INTRODUCCION.** El estudio de los operadores monótonos se originó en investigaciones sobre desigualdades variacionales y es de utilidad en

---

AMS-MOS Subject classification, 47H06, 47H15.

el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Tiene además otras aplicaciones interesantes, como es el caso en el análisis de la siguiente pregunta en geometría algebraica:

Sea $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una aplicación cuyos componentes son polinomios en* n *variables. Supóngase que para el jacobiano* ∇T *se tiene que*

$$\det(\nabla T(x)) \neq 0, \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

¿Es T *un homeomorfismo de* $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}^n$*?*

Si E es un espacio de Banach real y E^* es su dual topológico, un operador $T:E \to E^*$ es un operador monótono si $(Tx-Ty, x-y) \geqslant 0$ para todo $x, y \in E$. Aquí (z^*, x) denota la imagen de $x \in E$ por el funcional $z^* \in E^*$. Por otra parte, se dice que T es de tipo polinómico si para algún par $v, \omega \in E$ el hecho de que

$$\limsup_{t \to \infty} |(T(\omega + tv), v)| < \infty$$

asegura que $(T(\omega+tv), v)$ es constante en la variable $t \in \mathbb{R}$.

Es un hecho interesante que la alternativa de Fredholm sea válida para operadores monótonos de tipo polinómico que satisfagan además una desigualdad del tipo de "Gärding" (estas son generalizaciones de la desigualdad de Rellich) o alguna condición análoga de semicoercitividad, como fue observado alrededor de 1977 por varios investigadores. Dentro de este contexto la propiedad de Fredholm es equivalente a la linealidad cerrada del recorrido $R(T)$ del operador.

El propósito de este artículo es enunciar y demostrar un teorema de Fredholm bajo situaciones ligeramente diferentes, muy elegantes, que se originan en un teorema de Landesman y Lazer [2] sobre dicha alternativa para ecuaciones elípticas con parte principal no lineal.

§2. ELEMENTOS DE OPERADORES MONOTONOS.

Sean E un espacio de Banach real, E^* su dual topológico y $T:E \to E^*$ un operador no lineal (o, mejor, no necesariamente lineal) de E en E^*. El operador $T:E \to E^*$ es *monótono* si

(M1) $\quad (Tx-Ty,x-y) \geq 0$ para todo $x,y \in E$

Aquí, (z^*,x) denota la imagen de $x \in E$ por la funcional $z^* \in E^*$. El operador $T:E \to E^*$ es *coer* *citivo* si

$$(C1)\qquad \frac{(Tx,x)}{\|x\|} \to +\infty \quad \text{cuando } \|x\| \to +\infty .$$

Si E es el sistema de los números reales, T es simplemente una función real definida sobre los números reales, y decir que T es un operador monótono equivale a decir que T es una función monótona no-decreciente:

$$Tx \geqslant Ty \quad \text{para} \quad x \geqslant y .$$

La coercitividad de T se traduce en que $Tx \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$ y $Ty \to -\infty$ cuando $y \to -\infty$.

Una aplicación $T:E \to E^*$ es *fuertemente monótona* si existe una constante $C > 0$ tal que

$$(MF)\qquad (Tx-Ty,x-y) \geqslant C\|x-y\|^2 \quad \text{para todo} \quad x,y \in E.$$

Es fácil ver que una aplicación fuertemente monótona es coercitiva. En efecto, usando (MF) con $y = 0$ tenemos $(Tx-T0,x) \geqslant C\|x\|^2$, lo cual implica que $T(x,x) \geqslant (C\|x\|-\|T0\|)\|x\|$.

Para dar respuesta a la pregunta formulada en §1, recordemos un resultado muy útil en la teoría de los problemas elípticos no lineales con valores de frontera.

AFIRMACION. Si E es un espacio de Banach reflexivo con espacio dual E^* y $T:E \to E^*$ es una aplicación continua que satisface la condición de monotonía (M1) y la condición de coercitividad (C1), entonces T es sobreyectiva.

Este resultado fue ampliamente estudiado por D.G. de Figueiredo [1] en 1974. Muchas generalizaciones de la afirmación se han dado posteriormente.

En las aplicaciones a la teoría de las ecuaciones elípticas, el espacio E es usualmente un subespacio cerrado del espacio de Sobolev $H^{1,p}(\Omega)$, donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$, que contiene el espacio $C_o^\infty(\Omega)$ de las funciones de prueba. Por otra parte, el operador T es generalmente de la forma

$$(1) \quad (Tu,v) = \sum_\alpha \int_\Omega A_\alpha(x,u,\ldots,\nabla^m u)\partial^\alpha v dx, \; (|\alpha| \leqslant m), \; v \in E.$$

La notación usa multi-índices $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n)$, la abreviatura $\partial^\alpha = \Pi(\partial/\partial x_i)^{\alpha_i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ y una función apropiada A_α de $m+1$ variables. Condiciones apropiadas de elipticidad y crecimiento conducen a la coercitividad completa de T. También se han estudiado condiciones que sólo conducen a desigualdades del tipo de Gärding que, como se dijo, son generalizaciones de la desigualdad de Rellich. Estas desigualdades de Gärding son usualmente de la forma

$$(2) \qquad (Tu,u) \geqslant C\|u\|_{m,p}^{p} - k\|u\|_{p}^{p} - k$$

para constantes positivas C y k. Aquí

$$\|u\|_p = (\int |u|^p dx)^{1/p}, \quad \|u\|_{m,p} = \sum_i \|\nabla^i u\|_p \qquad (i = \ , \dots, m)$$

Como T es un operador lineal, la desigualdad (2) da la clave para la demostración de la siguiente forma de la alternativa de Fredholm:

"Si el recorrido $R(T)$ de T tiene codimensión finita, la ecuación $Tu = f$ es soluble si y sólamente si $f \perp R(T)^{\perp}$".

Para dar un tratamiento alternativo a este famoso resultado, generalizaremos ligeramente algunas de las propiedades del operador $T: E \to E^*$, siendo E, como lo hemos dicho antes, un espacio de Banach reflexivo.

i) Se dice que T es un operador *normal*, si

$$(3) \qquad T(0) = 0 .$$

ii) Si para cada $v \in E$,

$$(4) \qquad \liminf_{\|u\| \to \infty} \frac{(Tu-Tv,u-v)}{\|u\|} \geq 0,$$

diremos que T es *monótonamente asintótico*.

iii) Si T es tal que el hecho de que para algún par $v,\omega \in E$

$$(5) \qquad \limsup_{t \to +\infty} |(T(\omega+tv),v)| < \infty$$

asegura que $(T(\omega+tv),v)$ es constante en la variable $t \in \mathbb{R}$, diremos que T es de *tipo polinómico*.

iv) Si la función ψ definida por

$$(6) \qquad \psi(t) = (T(t\omega),v)$$

es diferenciable en $t = 0$ para todo $v \in E$ y $\omega \in F$, donde F es un subconjunto denso de E, diremos que T es *débilmente diferenciable en* 0.

v) Si para todo subconjunto cerrado, acotado y convexo $D \subseteq E$ y toda $f \in E^*$ la desigualdad variacional

$$(7) \qquad (Tu-f,u-v) \leq 0 \quad \text{para todo } v \in D$$

tiene una solución $u \in D$, diremos que T es un operador *regular*.

vi) Si existe una proyección lineal continua $Q:E \to E$ tal que

$$(8)\quad \begin{cases} \dim QE < \infty \\ \sup\left\{\dfrac{\|u\|}{(\|Qu\|+1)} : \dfrac{(Tu,u)}{\|u\|} < k,\ u \in E\right\} < \infty \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{para todo } k > k_o, \end{cases}$$

diremos que T es *semi-coercitivo*.

§3. TEOREMA DE FREDHOLM.

En esta sección enunciaremos y demostraremos el teorema principal de este trabajo. Supondremos que T es un operador definido en un espacio de Banach reflexivo E con valores en su dual E^*, y que T satisface las propiedades (i) a (vi) del final del parágrafo anterior.

Para facilitar la demostración haremos uso de dos lemas preliminares, que de inmediato pasamos a considerar.

LEMA 1. Sean $\nu \in E$ y $k \in \mathbb{R}$ tales que

$$(9)\qquad (T\omega,\nu) \leqslant k, \quad \omega \in E.$$

Supóngase además que $T:E \to E^*$ es continua y satisface las propiedades (i) a (iv) del §2. Entonces, $v \perp R(T)$.

Demostración. Sea $\omega \in E$ y defínase

$$g(t) := (T(\omega + tv), v), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces, $g(t) \leq k$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por la monotonía asintótica (ii) de T se tiene que

$$\liminf_{t \to \infty} t^{-1}(T(\omega + tv) - T\omega, tv) \geq 0,$$

así que, si $c(\omega) < 0$, entonces

$$-c(\omega) \leq (T(\omega + tv), v) \leq k, \quad t \geq t_o,$$

o sea

$$|T(\omega + tv), v| \leq \max\{c(\omega), k\}, \quad t \geq t_o.$$

Esto asegura que

$$\limsup_{t \to \infty} |T(\omega + tv), v)| < +\infty$$

y, como T es de tipo polinómico, entonces

(10) $\quad g(t) = \text{constante} = (T\omega, v), \quad t \in \mathbb{R}$

De la monotonía asintótica (ii) se deduce también que

$$\liminf_{t\to\pm\infty} |t|^{-1}(T(\omega+t\nu)-T(\alpha\omega),(1-\alpha)\omega+t\nu) \geqslant 0,$$

y un cálculo elemental muestra que

$$\liminf_{t\to\pm\infty} \left[(1-\alpha)|t|^{-1}(T(\omega+t\nu),\omega+t\nu) + \alpha|t|^{-1}(T(\omega+t\nu),t\nu) - |t|^{-1}(T(\alpha\omega),t\nu)\right] \geqslant 0.$$

En virtud de (10) obtenemos de esta última desigualdad que

$$\alpha\sigma(T\omega,\nu) - \sigma(T(\alpha\omega),\nu)$$

$$\geqslant (\alpha-1) \liminf_{t\to\pm\infty} \left[|t|^{-1}(T(\omega+t\nu),\omega+t\nu)\right]$$

donde $\sigma = 1$ si $t \to \infty$ y $\sigma = -1$ si $t \to -\infty$.

Para $\alpha \geqslant 1$ el término de la derecha en la última desigualdad es no negativo, como se deduce de la condición (4). Esto conduce a la desigualdad

$$\alpha\sigma(T\omega,\nu)-\sigma(T(\alpha\omega),\nu) \geqslant 0,\ \sigma = \pm 1,\ \alpha \geqslant 1,$$

de la cual se deduce que

$$(11) \qquad \alpha(T\omega,\nu) = (T(\alpha\omega),\nu),\ \alpha \geqslant 1.$$

Haciendo uso nuevamente de la hipótesis (9), obtenemos que

$$\alpha(T\omega,\nu) \leqslant k,\ \alpha \geqslant 1,$$

y pasando al límite cuando $\alpha \to \infty$, que

$$(12) \qquad (T\omega,\nu) \leqslant 0, \ \omega \in E.$$

Tomando $\beta = 1/\alpha$, $\omega = (1/\alpha)z$, $\alpha \geqslant 1$, obtenemos de (11) que

$$\beta(Tz,\nu) = (T(\beta z),\nu), \quad 0 < \beta \leqslant 1.$$

Por lo tanto,

$$(13) \qquad \lim_{\beta \to 0^+} \beta^{-1}(T(\beta z),\nu) = (Tz,\nu).$$

Por otra parte, la hipótesis (iv) asegura que la función ψ definida para $\beta \in \mathbb{R}$ por

$$\psi(\beta) = (T(\beta z),\nu)$$

es diferenciable en $\beta = 0$ si $z \in F$. Puesto que $\psi(0) = 0$, la condición de normalidad (i) de T permite concluir de (12), que ψ tiene un máximo en $\beta = 0$. Por lo tanto, la derivada $\psi'(0)$ es nula, de lo cual

$$\lim_{\beta \to 0} \beta^{-1}(T(\beta z),\nu) = 0$$

De (13) concluimos entonces que

$$(Tz,\nu) = 0, \ z \in F,$$

y puesto que F es denso en E y T es continua, necesariamente $\nu \perp R(T)$.

LEMA 2. Sea $T: E \to E^*$ un operador semicoercitivo en el sentido de (vi). Entonces,

$$\operatorname{dom} R(T)^{\perp} \leqslant \dim QE$$

Demostración. Sean $n = \dim QE$ y $z_i \in R(T)^{\perp}$, $i = 1,2,\ldots,n+1$. Probaremos que los z_i son linealmente independientes. Puesto que $\dim QE = n$, existen escalares λ_i tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i Q z_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i| \neq 0.$$

Sea $z = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_i$. Puesto que $z \perp R(T)$, tenemos que

$$(T(tz), tz) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

y, por la semicoercitividad, que

$$\sup\left\{\frac{\|tz\|}{(1+\|Q(tz)\|}: t \in \mathbb{R}\right\} < \infty .$$

Puesto que

$$Q(tz) = t \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i Q z_i = 0,$$

concluimos que $z = 0$. Por lo tanto no pueden existir más de n vectores linealmente independientes en $R(T)^{\perp}$. Esto demuestra el lema.

TEOREMA 1. Sea $T:E \to E^*$ un operador continuo de un espacio de Banach reflexivo en su dual, el cual cumple las propiedades (i) a (vi) del §2. Entonces, el recorrido $R(T)$ es un espacio lineal cerrado de E^*, de codimensión finita.

Demostración. La finitud de $\dim R(T)^{\perp}$ resulta del Lema 2, ya que

$$\dim R(T)^{\perp} \leqslant \dim QE < \infty .$$

La demostración de que $R(T)$ es lineal y cerrado se reduce a probar la siguiente afirmación:

"*La ecuación* $Tu = f$ *es soluble si y sólamente si* $f \perp R(f)^{\perp}$".

La parte "solamente si" de la anterior afirmación es trivial. Para la parte "si", supongamos que $f \perp R(T)^{\perp}$ y que la ecuación $Tu = f$ no es soluble. Por inducción construiremos vectores linealmente independientes $z_i \perp R(T)$, $i = 1,2,..,m$ $m = 1+\dim Q$, lo cual estará en contradicción con el Lema 2.

Si $i \in \{1,2,...\}$ y si $i \geqslant 2$, supongamos que se han podido construir los elementos linealmente independientes $z_j \perp R(T)$, $j = 1,2,...,i-1$. Sean $V_1 = 0$, y V_i = subespacio generado por $\{z_1, z_2, ..., z_{i-1}\}$, si $i \geqslant 2$.

Sea W el complemento lineal cerrado del subespacio V_i. Por la condición (v) de T, para todo $r > 0$ existe un $u_r \in B_r \cap W$ tal que

(14) $$(Tu_r - f, u_r - x) \leqslant 0, \quad x \in B_r \cap W,$$

donde
$$B_r = \{x \in E : \|x\| \leqslant r\}.$$

Si para algún $r > 0$ podemos tomar u_r de tal manera que $\|u_r\| < r$, entonces $Tu_r - f \perp W$. Pero entonces $Tu_r - f \perp W + V_i$, ya que $R(T) - f \perp V_i$ por la hipótesis de inducción y $f \perp V_i$. Así, $Tu_r - f \perp E$, o sea, $Tu_r = f$, lo cual contradice la hipótesis de que la ecuación $Tu = f$ no tiene solución en este caso. Queda entonces por considerar el caso en que $\lim\limits_{r\to\infty} \|u_r\|/r = 1$, (el cual ocurre, por ejemplo, si $\|u_r\| = r$ para todo $r > 0$). Puesto que E es reflexivo, existen un elemento $z \in E$ y una sucesión $\|u_r\|^{-1} u_r$ convergente débilmente a z. Haciendo $x = 0$ en (14) obtenemos que

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{(Tu_r, u_r)}{\|u_r\|} < \infty,$$

y de la condición de semicoercitividad de T se tiene entonces que

$$\|u_r\| \leqslant C\|Qu_r\| + C \qquad (r \to \infty)$$

para alguna constante $C > 0$. Por lo tanto,

$$1 \leqslant C\|u_r\|^{-1}\|Qu_r\| + C\|u_r\|^{-1},$$

de lo cual

$$C^{-1} - \|u_r\|^{-1} \leqslant \|u_r\|^{-1}\|Qu_r\| = \|Q(\|u_r\|^{-1}u_r)\|.$$

Pasando al límite cuando $r \to \infty$ tenemos que

$$C^{-1} \leqslant \|Q(z)\|,$$

pues Q es completamente continua. Se deduce que $z \neq 0$. De la condición de monotonía asintótica se concluye que

$$\liminf_{r \to \infty} \frac{(Tu_r - T\omega, u_r - \omega)}{\|u_r\|} \geqslant 0.$$

Por otra parte, de la desigualdad variacional (14) y de las relaciones de ortogonalidad $V_i \perp R(T)$, $V_i \perp f$ se concluye que $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in E$, donde $\omega_1 \in W \cap B_r$, $\omega_2 \in V_i$, y, además que

(15) $$(Tu_r - f, u_r - \omega) \leqslant 0$$

De (15) tenemos que

$$\liminf_{r \to \infty} \|u_r\|^{-1}(f - T\omega, u_r - \omega) \geqslant 0$$

y así

$$(\mathfrak{f}-T\omega,z) \geqslant 0, \quad \omega \in E$$

Del Lema 1 concluimos entonces que $z \perp R(T)$, y por hipótesis $\mathfrak{f} \perp z$. Puesto que $z \in W$ y $z \neq 0$, tenemos que $z \notin V_i$; es decir z no depende linealmente de $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$. Tomando $z_i = z$, completamos la construcción de los z_j, obteniendo así una contradicción. El teorema queda demostrado.

Una consecuencia del Teorema 1 es la siguiente respuesta a la pregunta formulada al comienzo del artículo:

TEOREMA 2. Sea $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación polinómica tal que, para todo x, $\nabla T(x)$ está positivamente definido. Entonces, T es sobreyectiva.

Demostración. Por el Teorema 1, el recorrido de T es lineal y por lo tanto cerrado. Por ser $\det(\nabla T(x)) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, T es además abierta. Por lo tanto, T aplica $\mathbb{R}^n$ sobre todo $\mathbb{R}^n$.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] De Figueiredo, D.G., "An introduction to the theory of monotone operators", Sociedad

Brasileira de Matemáticas. Reunião de Análise Funcional, Julho de 1974.

[2] Landesman-Lazer, "Non-linear perturbations of linear eliptic boundary value problems at resonance", J. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.

[3] Sánchez, D., "Analisis Funcional en Ecuaciones Diferenciales Parciales", Seminario de Ecuaciones Diferenciales, 1984, Universidad Nacional.

[4] Browder, F.E., "Landesman-Lazer alternative theorem for a class of non-linear functional equations", Math. Ann. 238 (1978), 59-65.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E. Colombia.