Boletín de Matemáticas
Vol. XX, N° 3 (1986)

APORTES

ALGUNOS ESPACIOS SEUDOMETRICOS Y LA TOPOLOGIA $\mathcal{C}$ DE $\mathbb{R}^*$

José M. Muñoz Q. - Ignacio Mantilla

RESUMEN. En el presente trabajo se demuestra que la topología seudométrica sobre un conjunto X obtenida a partir de una función $f:X \to \mathbb{R}$, coincide con la topología inicial sobre X inducida por la misma función; se caracterizan sus conjuntos compactos y se demuestra que cuando f es sobreyectiva, la topología usual de $\mathbb{R}$ es la cociente por la relación que identifica puntos de X que poseen la misma imagen por f.

Se demuestra además que la topología $\mathcal{C}$ sobre los reales no-estándar finitos $\mathbb{R}_F^*$, es la topología seudométrica obtenida a partir de $Est:\mathbb{R}_F^* \to \mathbb{R}$, función que asocia a cada α de $\mathbb{R}_F^*$,

su parte estándar. Con esto y los resultados anteriores, se obtienen demostraciones sencillas de algunas caracterizaciones en [3].

I. SEUDOMETRICAS.

Una seudométrica sobre un conjunto X es una función d de $X \times X$ en los reales, con las siguientes propiedades:

1) $d(x,y) \geqslant 0$ y $d(x,x) = 0$ para todo x,y en X.

2) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo x, y en X.

3) $d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$ para todo x,y,z en X.

Si además $x \neq y$ implica $d(x,y) > 0$, se dice que d es una métrica.

Es conocido (ver [2] p.9) que cualquier función $f: X \to \mathbb{R}$ induce la siguiente seudométrica:

$$d_f(x,y) = |f(x)-f(y)|.$$

Claramente si f es inyectiva, entonces d_f es una métrica. Es igualmente conocido que si d es una seudométrica sobre X, la colección de todas las bolas

$$B_d(x,r) = \{y \in X: d(x,y) < r\}$$

cuando x varía en X y r en los reales positivos, es una base para una topología sobre X. Se dice que (X,d) es un espacio seudométrico cuando X está dotado de la topología generada por la base anterior.

Para la topología seudométfica d_f, se tendrá

$$B_f(x,r) = \{y \in X: |f(x)-f(y)| < r\}.$$

Nótese además que

$$\begin{aligned} y \in B_f(x,r) &\Leftrightarrow |f(x)-f(y)| < r \\ &\Leftrightarrow f(y) \in B(f(x),r) \\ &\Leftrightarrow y \in f^{-1}(B(f(x),r)), \end{aligned}$$

lo cual pone de presente que

$$B_f(x,r) = f^{-1}(B(f(x),r))$$

donde $B(z,r)$ es la bola correspondiente a la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Se deduce de la igualdad anterior que *la topología definida sobre X por la seudométrica d_f, es precisamente la topología inicial sobre X inducida por f*, o sea, la menos fina de las topologías sobre X que dejan continuas a f (ver [1] pp. 30-32). En consecuencia, los abiertos de X para dicha topología, son las imágenes recíprocas por

f de los abiertos de la topología usual sobre $\mathbb{R}$.

Análogamente, como $f^{-1}(\mathbb{R}-A) = X-f^{-1}(A)$, también los cerrados de X son las imágenes recíprocas por f de los cerrados de $\mathbb{R}$.

Además, si (Y,τ) es un espacio topológico cualquiera, una función $g:(Y,\tau) \to (X,d_f)$ será continua si y sólo si $f\circ g:(Y,\tau) \to \mathbb{R}$ lo es.

NOTA 1. Si se generaliza la situación anterior a una función $f:X \to (Y,d)$, donde Y es un espacio métrico cualquiera con métrica d, podemos definir sobre X la seudométrica $d_f(x,y) = d(f(x),f(y))$.

Entonces,

$$\begin{aligned} y \in B_f(x,r) &\Leftrightarrow d(f(x),f(y)) < r \\ &\Leftrightarrow f(y) \in B_d(f(x),r) \\ &\Leftrightarrow y \in f^{-1}(B_d(f(x),r)). \end{aligned}$$

Es decir, $B_f(x,r) = f^{-1}(B_d(f(x),r))$ y la topología seudométrica sobre X aún sigue siendo la topología inicial inducida por f a partir de la topología métrica de Y. Además, la función f no sólo resulta ser continua para esta topología, sino también uniformemente continua, ya que si

$d_f(x,y) < \delta$ entonces trivialmente,

$$d(f(x),f(y)) < \delta. \quad \blacktriangle$$

PROPOSICION 1. Sea $f:X \to \mathbb{R}$. Un subconjunto C de X es compacto (o cuasicompacto, en la terminología de N. Bourbaki) para la topología seudométrica d_f, si y sólo si $f(C)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (con su topología usual).

Demostración. Como la topología seudométrica es la misma inicial inducida por f, entonces f resulta ser continua, de manera que si C es un subconjunto compacto de X, es inmediato que $f(C)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Recíprocamente, supongamos que $f(C)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Sea $(A_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de C. De lo dicho anteriormente se sigue que $A_i = f^{-1}(B_i)$, con B_i abierto en $\mathbb{R}$. Puesto que $C \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$, se tiene que

$$f(C) \subseteq f\Big(\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)\Big) = \bigcup_{i\in I} f(f^{-1}(B_i)) \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$$

Como hemos supuesto que $f(C)$ es compacto, existe un subcubrimiento finito $(B_{ik})_{k=1,2,\dots,n}$ de $f(C)$; es decir, $f(C) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{ik}$, de donde,

$$C \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_{ik}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(B_{ik}) = \bigcup_{k=1}^{n} A_{ik}$$

obteniéndose así la compacidad de C. ▲

COROLARIO 1.1. Bajo las condiciones de la proposición 1, un subconjunto C de X es compacto si y sólo si $f^{-1}(f(C))$ lo es.

Demostración. Por la proposición 1, $f^{-1}(f(C))$ es compacto si y sólo si $f(f^{-1}(f(C)))$ lo es. Pero este último conjunto es $f(C)$, y nuevamente por la proposición 1, es compacto si y sólo si C lo es. ▲

En general, no todo subconjunto compacto de X es la imagen recíproca por f de un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, si f no es inyectiva y a, b son tales que $f(a) = f(b)$, entonces $\{a\}$ es un subconjunto compacto de X que no es imagen recíproca por f de un compacto de $\mathbb{R}$.

PROPOSICION 2. Sea $f: X \to \mathbb{R}$ sobreyectiva. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es abierto para su topología usual, si y sólo si $f^{-1}(A)$ es abierto para la topología seudométrica d_f.

Demostración. Si A es un abierto de $\mathbb{R}$, entonces $f^{-1}(A)$ es un abierto de X, ya que la topología seudométrica d_f coincide con la inicial sobre X inducida por f.

Recíprocamente, si $f^{-1}(A)$ es un abierto de X, entonces es imagen recíproca de un abierto de $\mathbb{R}$; es decir, existe $B \subseteq \mathbb{R}$ abierto en $\mathbb{R}$, tal que $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$. Luego, $f(f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(B))$, o sea, $A = B$ por ser f sobreyectiva. Por consiguiente A es abierto. ▲

COROLARIO 1.2. Si $f:X \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva y a X se le dota de la topología d_f, entonces la topología usual de $\mathbb{R}$ coincide con la topología final de $\mathbb{R}$ determinada por f.

Demostración. Es evidente ya que $A \subseteq \mathbb{R}$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(A)$ es un abierto de (X, d_f) (ver [1], pp.33,34). ▲

Definamos en X la relación de equivalencia

$$x \underset{f}{\approx} y \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) = f(y).$$

Dotemos al conjunto cociente $X/\underset{f}{\approx}$ de la topología final determinada por la función $\phi : X \to X/\underset{f}{\approx}$ que a cada elemento x le hace corresponder su clase $[x]$ de equivalencia correspondiente a $\underset{f}{\approx}$. Llamemos al espacio topológico así obtenido el espacio cociente de X por $\underset{f}{\approx}$.

Aún en el caso descrito en la Nota 1 ($f:X \to (Y,d)$), si $y \underset{f}{\approx} y'$, se tiene $f(y) = f(y')$. Luego, $d(f(y),f(x)) = d(f(y'),f(x))$. Se sigue que si $y \underset{f}{\approx} y'$, entonces $y \in B_f(x,r)$ si y sólo si $y' \in B_f(x,r)$. Es decir $B_f(x,r)$ es saturada para $\underset{f}{\approx}$, lo cual implica que la topología cociente en $X/\underset{f}{\approx}$ coincide con la definida por la métrica cociente $\bar{d}$, donde $\bar{d}([x],[y]) = d_f(x,y) = d(f(x),f(y))$ ya que $B_{\bar{d}}([x],r) = \phi(B_f(x,r))$.

COROLARIO 1.3. Si $f:X \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva y se considera a X con la topología seudométrica d_f, entonces el espacio cociente $X/\underset{f}{\approx}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Demostración. En la descomposición canónica:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathbb{R} \\ & X/\underset{f}{\approx} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

con $g([x]) = f(x)$,

se sabe (ver [1], p.44) que g es una biyección. De acuerdo con el Corolario 1.1, una función $h:\mathbb{R} \to Z$ (siendo Z un espacio topológico cualquiera), es continua si y sólo si $h \circ f$ lo es. Si $S:\mathbb{R} \to X$ es tal que $S \circ f$ es identidad de X. Ésta es necesariamente continua. Por lo tanto, toda inversa a izquierda S de f es continua y en consecuencia ([1], p.45, Prop.9) g es un homeomorfismo. ▲

NOTA 2. Al analizar las demostraciones de las proposiciones 1 y 2, así como sus corolarios, resulta evidente su validez cuando se reemplaza $\mathbb{R}$ por cualquier espacio métrico (Y,d), definiéndose, claro está, d_f como en la Nota 1.

Además $g:(X/\tilde{\approx}_f, \bar{d}) \to (Y,d)$ es una isometría, ya que $\bar{d}([x],[z]) = d_f(x,z) = d(f(x),f(z)) = d(g([x]),g([z]))$. ▲

II. LA TOPOLOGIA $\mathcal{C}$ SOBRE $\mathbb{R}_F^*$

Particularicemos los anteriores resultados al caso de la función $f = \text{Est}:\mathbb{R}_F^* \to \mathbb{R}$ que a cada número real no-estándar finito α, le hace corresponder su parte estándar, $\text{Est}(\alpha)$. Una base de la topología seudométrica de $\mathbb{R}_F^*$ está constituída por las bolas

$$\begin{aligned} B_{\text{Est}}(\alpha,r) &= \{\tau \in \mathbb{R}_F^*: |\text{Est}(\alpha) - \text{Est}(\tau)| < r\} \\ &= \{\tau \in \mathbb{R}_F^*: |\text{Est}(\alpha-\tau)| < r\} \\ &= \{\tau \in \mathbb{R}_F^*: \text{Est}|\alpha-\tau| < r\}\ . \end{aligned}$$

Las dos últimas igualdades son consecuencia de la linealidad de Est y de su conmutatividad con el valor absoluto.

Recordemos que los abiertos de la topología $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{R}_F^*$ son los subconjuntos A de $\mathbb{R}_F^*$ tales que para todo σ de A, existe un real positivo r tal que

$$\{\tau \in \mathbb{R}_F^* : \sigma - r < \tau < \sigma + r\} \subseteq A.$$

PROPOSICION 3. La topología $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}_F^*$ es precisamente la topología seudométrica determinada sobre $\mathbb{R}_F^*$ por d_{Est}.

***Demostración.* a)** Sean $B_{\mathrm{Est}}(\alpha,h)$, con $\alpha \in \mathbb{R}_F^*$ y h real positivo, una bola y $\beta \in B_{\mathrm{Est}}(\alpha,h)$. Como ésta es abierta en $(\mathbb{R}_F^*, d_{\mathrm{Est}})$, existe un real positivo r tal que

$$B_{\mathrm{Est}}(\beta,2r) \subseteq B_{\mathrm{Est}}(\alpha,h).$$

Veamos que $\{\tau \in \mathbb{R}_F^* : \beta - r < \tau < \beta + r\} = (\beta - r, \beta + r)^*$ es un subconjunto de $B_{\mathrm{Est}}(\beta,2r)$, con lo cual quedará demostrado que $B_{\mathrm{Est}}(\alpha,h)$ es un $\mathcal{C}$-abierto.

Si $\tau \in (\beta - r, \beta + r)^*$, entonces $\beta - r < \tau < \beta + r$, o sea,

$$-r < \tau - \beta < r. \tag{1}$$

Pero la diferencia $Est(\tau-\beta)-(\tau-\beta)$ es un infinitesimal y, en consecuencia, menor en valor absoluto que r. Es decir,

$$-r < Est(\tau-\beta)-(\tau-\beta) < r. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene

$$-2r < Est(\tau-\beta) < 2r,$$

o equivalentemente, $|Est(\tau-\beta)| < 2r$. Luego, $\tau \in B_{Est}(\beta,2r)$.

b) Recíprocamente, sean A un subconjunto $\mathcal{C}$-abierto de $\mathbb{R}_F^*$ y $\alpha \in A$. Existe un real positivo r tal que $(\alpha-2r,\alpha+2r)^* \subseteq A$.

Un argumento similar al anterior nos permite concluir que $B_{Est}(\alpha,r) \subseteq (\alpha-2r, \alpha+2r)^* \subseteq A$. Luego A es abierto para la topología seudométrica de $\mathbb{R}_F^*$.

III. CONSECUENCIAS.

Muchas propiedades importantes de la topología $\mathcal{C}$ pueden obtenerse de manera sencilla usando las características de la topología seudométrica. Por ejemplo, si A es $\mathcal{C}$-abierto, entonces es abier to para la topología inicial inducida por la función Est. Por lo tanto existe A_o abierto en $\mathbb{R}$ tal que

$$A = \mathrm{Est}^{-1}(A_o) = \bigcup_{x\in A_o} \mathrm{Est}^{-1}(x) = \bigcup_{x\in A_o} E(x),$$

ya que $\mathrm{Est}^{-1}(x)$ es precisamente la mónada de x.

Un resultado análogo vale para los subconjuntos $\mathcal{C}$-cerrados de $\mathbb{R}_F^*$. La proposición 1 antes demostrada, caracteriza los subconjuntos $\mathcal{C}$-compactos de $\mathbb{R}_F^*$ como sigue:

C es $\mathcal{C}$-compacto si y sólo si $\mathrm{Est}(C) = \{\mathrm{Est}(\tau):\tau \in C\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ (para la topología usual). Estos resultados ya habían sido obtenidos en [3] por métodos completamente diferentes.

Otras consecuencias inmediatas de las propiedades obtenidas en II, son las siguientes:

Una función $g:(Y,\tau) \to (\mathbb{R}_F^*,\mathcal{C})$ es continua si y sólo si $\mathrm{Est}\circ g:(Y,\tau) \to \mathbb{R}$ lo es.

La topología usual de $\mathbb{R}$ es la topología cociente de $(\mathbb{R}_F^*,\mathcal{C})$ por la relación $\underset{\mathrm{Est}}{\approx}$ que identifica puntos infinitamente próximos.

Además, a pesar de que $(\mathbb{R}^*_F, \mathcal{C})$ no es Hausdorff y no se puede aplicar el lema de Uryshon, en este espacio la separación de cerrados disyuntos se puede lograr mediante funciones $\mathcal{C}$-continuas de codominio $[0,1]$.

Sean H, F cerrados disyuntos en $\mathbb{R}^*_F$. Existen H_o, F_o subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que $H = \mathrm{Est}^{-1}(H_o)$ y $F = \mathrm{Est}^{-1}(F_o)$. Naturalmente, H_o y F_o también son disyuntos. Ahora bien, sea $f:\mathbb{R} \to [0,1]$ continua que separa a H_o y F_o. (Es decir, $f(H_o) = \{0\}$ y $f(F_o) = \{1\}$). Entonces, $f \circ \mathrm{Est} : \mathbb{R}^*_F \to [0,1]$, que es $\mathcal{C}$-continua en virtud de que Est lo es, separa a H y F.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Bourbaki, N., *Topologie Générale,* Chap. I Structures Topologiques. Hermann, París, 1961.

[2] Bourbaki, N., *Topologie Générale,* Chap. IX, Utilization des nombres réels en topologie générale. Hermann, París, 1958.

[3] Mantilla, Muñoz, Takeuchi. *La topología $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^*$*, Boletín de Matemáticas, Vol.XX, Nº 2, 1986.

José M. Muñoz Q.
Profesor Asociado
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional.

Ignacio Mantilla.
Profesor Asistente
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional.