Boletín de Matemáticas
Vol. XX, Nº 2 (1986)

APUNTES

AXIOMA DE COMPLETEZ

Yu Takeuchi

§1. INTRODUCCION.

En la mayoría de los libros del análisis real, se adopta, como el axioma de completez (o completitud) la existencia del Sup y del Inf para todo subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$, y luego se estudian algunas propiedades de $\mathbb{R}$ derivadas de dicho axioma. Por lo general no se aclara la equivalencia entre estas propiedades y por esta razón, solamente muy pocos profesores y estudiantes conocen las otras maneras de enunciarlo. En el presente trabajo se trata de dar, en forma sistemática, los axiomas equivalentes al de completez.

Una estructura matemática K es un "cuerpo ordenado" si existen en K las cuatro operaciones algebraicas "+, ×, -, ÷" con sus respectivas propiedades bien conocidas, y el orden (o desigualdad) "$<$" *compatible* con las cuatro operaciones, es decir, si $a < b$ entonces $a+c < b+c$; $a \cdot c < b \cdot c$ para $c > 0$ y $b \cdot c < a \cdot c$ para $c < 0$. La estructura de orden nos permite definir en K el *valor absoluto* en la forma usual, y en consecuencia *conceptos topológicos* tales como "conjuntos abiertos", "conjuntos cerrados", "conjuntos compactos", "puntos de acumulación", "convergencia de sucesiones", etc.

Para un cuerpo ordenado K son equivalentes las siguientes seis propiedades:

(1) Todo subconjunto no-vacío y acotado superiormente de K posee extremo superior en K (Axioma de Completez)

(2) Toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K (Teorema de Weierstrass).

(3) Todo subconjunto infinito y acotado de K, tiene por lo menos un punto de acumulación en K (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

(4) Dada una sucesión decreciente de subconjuntos acotados, cerrados y no vacíos de K, la intersección total no es vacía (Teorema de encaje de Cantor).

(5) Todo subconjunto acotado y cerrado de K es compacto (Teorema de Heine-Borel).

(6) Si (A,B) es una cortadura de K (*Nota 1*), entonces A tiene máximo o B tiene mínimo.

NOTA 1. *Una pareja (A,B) de subconjuntos no-vacios de K se llama una cortadura de K si (i) $A<B$ (esto es, $a<b$ para todo $a \in A$, $b \in B$), (ii) $A \cup B = K$.*

Sea e el elemento neutro para la multiplicación en K, entonces $e+e$ $(=2e)$, $e+e+e$ $(=3e)$,... pertenecen a K, *o sea que K contiene un subconjunto* ***isomorfo*** *al conjunto de los números naturales* $(\mathbb{N})$(*). En consecuencia, K contiene un cuerpo ordenado isomorfo al conjunto de todos los números racionales $(\mathbb{Q})$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer siempre que K contiene a $\mathbb{Q}$.

Además de las seis propiedades antes mencionadas, el axioma de completez "*implica*" las siguientes tres propiedades:

(7) K es ***arquimediano***; esto es, para cada $x \in K$ con $x > 0$ existe un ***número natural*** n tal que $x < n$.

(*) Esto se tiene porque todo cuerpo ordenado es de característica cero, de manera que ninguno de los elementos $e+e+e \ldots +e$ será cero; se sigue que todo cuerpo de característica cero tiene un subcuerpo isomorfo a los racionales ([3]) p.77).

(8) $\mathbb{Q}$ es *denso* es K; esto es, para todo $x, y \in K$ con $x < y$ existe $q \in \mathbb{Q}$ comprendido entre x, y.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (en K), es decir, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ para todo $n > N_0$.

Obsérvese que ε es *cualquier elemento* positivo de K.

Nótese que estas tres últimas propiedades son equivalentes mutuamente (*Nota* 2), pero evidentemente éstas no son equivalentes a las primeras seis propiedades; en efecto, $\mathbb{Q}$ es arquimediano pero $\mathbb{Q}$ *no satisface* el axioma de completez. El axioma de completez es equivalente a las siguientes propiedades:

(10) K es arquimediano y, toda sucesión de Cauchy converge en K.

Decimos que un cuerpo ordenado K es "*algebraicamente completo*" si no existe una extensión propia de K a otro cuerpo ordenado donde K sea denso.

El axioma de completez es también equivalente a:

(11) K es arquimediano y algebraicamente completo.

Citamos como ejemplo el libro "Análisis Matemático" de T.M. Apostol (2a. Edición, Ed. Reverté, 1976), donde se adopta la propiedad (1) como axioma de completez para $\mathbb{R}$ (p.11, Axioma 10), y luego se demuestran solamente las siguientes implicaciones:

(1)$\Rightarrow$(7) (Teorema 1-18, p.13).

(1)$\Rightarrow$(3) (Teorema 3-24, p.66).

(3)$\Rightarrow$(4) (Teorema 3-25, p.68).

(4),(8)$\Rightarrow$(5) (Teorema 3-29, p.70).

(3)$\Rightarrow$(10) (Teorema 4-8, p.88).

(1)$\Rightarrow$(2) (Teorema 8-6, p.225).

En el siguiente parágrafo daremos demostraciones de las implicaciones: (2)$\Rightarrow$(1), (10)$\Rightarrow$(1), (1)$\Rightarrow$(6), (6)$\Rightarrow$(2), (5)$\Rightarrow$(3), (3)$\Rightarrow$(2), (4)$\Rightarrow$(8), (2)$\Rightarrow$(11), (11)$\Rightarrow$(1), las cuales, junto con las implicaciones mencionadas en el libro de T. Apostol, garantizan la equivalencia de las 8 propiedades (1)—(6), (10) y (11) para un cuerpo ordenado K.

NOTA 2. *(Equivalencia de* (7), (8) *y* (9)*).*

(8)$\Rightarrow$(7). *Sea* $x \in K$, $x > 0$; *por la propiedad* (8) *existen* $n, k \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$x < \frac{n}{k} < x + 1,$$

luego:

$$x < \frac{n}{k} \leqslant n \qquad \text{(propiedad (7)).}$$

(7)$\Rightarrow$(9) *Dado* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$ *existe* N_0 *tal que*

$$N_0 > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{(por la propiedad (7)),}$$

por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > N_0$ *se tiene que*

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon \ \text{(propiedad (9)).}$$

(9)$\Rightarrow$(8) *Sean* $x, y \in K$, *para mayor sencillez supongamos que* $0 \leqslant x < y$ *(en los otros casos la demostración es similar).*

Por la propiedad (9) *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{n} < y - x$$

Aplicando nuevamente la propiedad (9) *existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{ny}\ ,\ o\ sea\ ,\quad y \leqslant \frac{k}{n}$$

esto es, el conjunto $I = \{k \in \mathbb{N} / \ \frac{k}{n} \geqslant y\}$ *no es vacío. Sea* m = Mínimo *de* I, *entonces*

$$\frac{m}{n} \geqslant y, \quad \frac{m-1}{n} < y,$$

luego:

$$\frac{m-1}{n} - x = \frac{m}{n} - x - \frac{1}{n} \geqslant y - x - \frac{1}{n} > 0 \ ,$$

esto es:

$$x < \frac{m-1}{n} < y \quad \textit{(propiedad (8))}.$$

§2. DEMOSTRACIONES.

(i) (2)⇒(1). Supongamos (2). Evidentemente, toda sucesión decreciente e inferiormente acotada también converge en K.

- Primero, demostremos que K es arquimediano (o lo que es lo mismo, la propiedad (9)). Por hipótesis la sucesión $(\frac{1}{n})$ converge:

$$(\frac{1}{n}) \to c(\geqslant 0).$$

Si $c > 0$ existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\frac{1}{n} - c| < \frac{1}{2}c \quad \text{para todo } n > N.$$

o sea,

$$\frac{1}{2}c < \frac{1}{n} < c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}c \quad \text{para todo } n > N.$$

Como $4n > n > N$ se tendría que

$$\frac{1}{2}c < \frac{1}{4n} \quad \text{o sea,} \quad 2c < \frac{1}{n}$$

luego: $2c < \frac{1}{n} < \frac{3}{2}c$. **absurdo!**

Por lo tanto se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

- Supongamos ahora que A es un subconjunto de K no-vacío y acotado superiormente; sean $x_1 \in A$, y_1 = una cota superior de A, y consideremos el punto $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$.

- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ es una cota superior de A, sean

$$x_2 = x_1 \ ; \quad y_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 + y_1).$$

- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ no es una cota superior de A, sean

$$x_2 \in A, \quad x_2 > \tfrac{1}{2}(x_1 + y_1); \quad y_2 = y_1.$$

Así sucesivamente se obtienen dos sucesiones monótonas (x_n), (y_n), la primera creciente y la segunda decreciente tales que

$$x_n \in A, \ y_n \text{ es una cota superior de } A,$$

$$0 < y_n - x_n \leqslant \tfrac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) \leqslant (\tfrac{1}{2})^{n-1}(y_1 - x_1). \qquad (1)$$

Por la hipótesis (2) las sucesiones (x_n), (y_n) convergen en K. Sean:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_o, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_o, \quad x_o, y_o \in K$$

Por la propiedad arquimediana del cuerpo ordenado K se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-1} (y_1 - x_1) = 0,$$

luego: $x_o = y_o$. Evidentemente se tiene que x_o es cota superior de A y que si M es otra cota superior de A entonces $x \leq M$, por lo tanto:

$$x_o = y_o = \text{Sup } A.$$

(ii) (10)$\Rightarrow$(1). Sea A un subconjunto de K, no-vacío y acotado superiormente. En la demostración anterior las sucesiones (x_n), (y_n) *son de Cauchy* ya que, por (1) se tiene que para todo $k \geq n$:

$$0 \leq y_n - x_k \leq y_n - x_n \leq (\tfrac{1}{2})^{n-1}(y_1 - x_1),$$

además, por la propiedad arquimediana de K:

$$(\tfrac{1}{2})^{n-1} (y_1 - x_1) \to 0 \qquad (\text{cuando } n \to \infty).$$

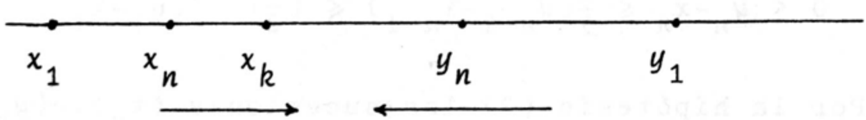

Fig. 1

Por la hipótesis (10) las sucesiones (x_n), (y_n) convergen, y, $x_o = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ es el supre mo del conjunto A.

(iii) (1)$\Rightarrow$(6). Supongamos (1), evidentemente todo conjunto no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior.

Sea (A,B) una cortadura de K; para todo $a \in A$, $b \in B$ tenemos: $a < b$, luego:

$$\sup A \leqslant b \quad \text{para todo } b \in B,$$

por lo tanto

$$\text{Sup } A \leqslant \text{Inf } B.$$

Como $A \cup B = K$ entonces hay dos posibilidades:

- Sup $A \in A$; en este caso A tiene máximo.
- Sup $A \in B$; en este caso Inf $B \in B$, luego B tiene mínimo.

Nótese que en cualquier caso se debe tener que Sup$A$ = Inf$B$ ya que $A \cup B = K$.

(iv) (6)$\Rightarrow$(2). Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada, si

$$A = \{x \in K / x \leqslant a_n \text{ para } algún\ n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x \leqslant a_n\}$$

$$B = \{x \in K / x > a_n \text{ para } todo\ n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x > a_n\}$$

entonces $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ya que la sucesión (a_n) es creciente y acotada. Evidentemente $A < B$, y, $A \cup B = K$, luego (A,B) es una cortadura de K. Por la hipótesis (6), A tiene máximo ó B tiene mínimo. Supongamos que A tiene máximo M; como $M \in A$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $M \leqslant a_m$. Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, $M+\varepsilon \in B$, luego:

$$a_n < M+\varepsilon \quad \text{para } todo \quad n \in \mathbb{N},$$

por lo tanto:

$$M \leqslant a_n < M+\varepsilon \text{ para } todo \quad n \geqslant m,$$

esto es

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M.$$

De la misma manera se demuestra que (a_n) converge en K para el caso en que B tiene mínimo.

(v) (5)$\Rightarrow$(3). Sea S un subconjunto de K, acotado e infinito. Primero, como S es acotado existe un intervalo $[a,b] = \{x \in K / a \leqslant x \leqslant b\}$ que contiene a S. Dado $x \in K$, si x *no es* punto de acumulación del conjunto S, entonces existe una vecindad de x, digamos $V(x;\delta(x)) = (x-\delta(x), x+\delta(x))$, que contiene un número "*finito*" de puntos de S. Es evidente que

$$[a,b] \subset K \subseteq \bigcup_{x\in K} V(x;\delta(x))$$

Por la *compacidad* del intervalo $[a,b]$ (hipótesis (5)) existen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tales que

$$S \subset [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} V(x_k;\delta(x_k))$$

esta última contenencia implicaría que S es un conjunto "*finito*" **(absurdo!)**

Por lo tanto, algún punto de K debe ser punto de acumulación del conjunto S.

(vi) (3)⇒(2). Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada superiormente. Si el conjunto $\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ es "*finito*" entonces la sucesión es "*constante*" a partir de algún término y por lo tanto converge. Si el conjunto $\{a_n/n \in \mathbb{N}\}$ es "*infinito*", entonces tiene por lo menos un punto de acumulación (por la hipótesos (3)) el cual es evidentemente el límite de la sucesión (a_n).

En el libro de T.M. Apostol se demuestra que a partir de (4) (teorema del encaje de Cantor), utilizando *adicionalmente* el teorema de Lindelöf (que es una consecuencia de la propiedad arquimediana (8), *Nota 4*), se obtiene el teorema de Heine-Borel (propiedad (5)). Con el fin de obtener *directamente* la implicación (4)⇒(5) es *necesario* demostrar que (8) es una consecuencia de (4).

(vii) (4)$\Rightarrow$(8). Supongamos (4); si K no fuera arquimediano existiría $b \in K$ tal que $b > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto acotado:

$$S = \{x \in K / x \leqslant n \text{ para } \textit{algún } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K / x \leqslant n\}$$

entonces S es un *conjunto cerrado*. En efecto, $x \in K\text{-}S$ entonces:

$$x > n+1 \quad \text{para } \textit{todo } n \in \mathbb{N},$$

luego

$$x-1 > n \quad \text{para } \textit{todo } n \in \mathbb{N},$$

esto es

$$(x-1,\ x+1) \subset K\text{-}S\ ,$$

por lo tanto, $K\text{-}S$ es *abierto*, luego S es *cerrado*.

Sean

$$S_n = S \cap \{x \in K / x \geqslant n\} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

entonces (S_n) es una sucesión *decreciente* de subconjuntos de K. Además, $S_n \neq \emptyset$ ya que $n \in S_n$. S_n es "*cerrado*" por ser intersección de dos subconjuntos cerrados de K; además S_n es acotado. Por la hipótesis (4):

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$$

Pero, se tiene que:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{x \in K / x \geqslant n \text{ para } todo\ n \in \mathbb{N}\} \cap \{x \in K / x \leqslant n \text{ para } algún\ n\} = \emptyset$$

(absurdo!). Por lo tanto, K debe ser arquimediana, o sea que $\mathbb{Q}$ es denso en K.

(viii) (2)⇒(11). Recordemos que la hipótesis (2) garantiza la propiedad *arquimediana* del cuerpo ordenado K. Sea F una extensión del cuerpo ordenado K tal que K es *denso* en F, entonces $\mathbb{Q}$ es *denso* en F (esto es, F es arquimediano). Dado $x \in F$ existe una sucesión creciente (a_n) de elementos en K tal que

$$x - \frac{1}{n} < a_n \leqslant x \quad \text{para } todo\ n \in \mathbb{N}$$

o sea que $(a_n) \to x$ (en F). Por la hipótesis (2), la sucesión (a_n) *converge en* K, digamos $(a_n) \to a$ (en K). Como K es denso en F entonces se tiene que: $(a_n) \to a$ (en F), luego $x = a \in K$, esto es $F = K$. Por lo tanto, K es algebraicamente completo.

Antes de demostrar la implicación (11)⇒(1), recordemos que el sistema numérico real $\mathbb{R}$, construido por cortaduras de $\mathbb{Q}$, ó, por sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$, es un cuerpo ordenado que satisface el axioma de completez. Tenemos el siguiente lema:

LEMA. Todo cuerpo arquimediano K es un *subcuerpo* ordenado de $\mathbb{R}$ (en el sentido de isomorfismo).

En efecto, como $\mathbb{Q}$ es denso en K, entonces dado $x \in K$ existe una sucesión (r_n) de elementos en $\mathbb{Q}$ que converge a x (en K). La sucesión (r_n) es de Cauchy en $\mathbb{Q}$, luego (r_n) converge en $\mathbb{R}$, digamos $(r_n) \to y$ (en $\mathbb{R}$). Es fácil ver que "y" *no depende* de la escogencia de la sucesión (r_n) que tiende a "x" en K, esto es, tenemos una función de K en $\mathbb{R}$ que hace corresponder $x \in K$ a $y \in \mathbb{R}$. Evidentemente, esta función es *uno a uno* y *respeta* las operaciones algebraicas y el orden del cuerpo ordenado. De esta manera, se ve que $\mathbb{R}$ posee un subcuerpo ordenado "isomorfo" a K.

(ix) (11)$\Rightarrow$(1). Supongamos que K es un cuerpo arquimediano y algebraicamente completo; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$ (por el lema anterior). Si $K \neq \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R}$ es una *extensión propia* del cuerpo ordenado K donde K es denso en $\mathbb{R}$, luego K no es algebraimente completo. Por lo tanto, la hipótesis (11) implica que K es isomorfo al cuerpo real $\mathbb{R}$, esto es, K satisface el axioma de completez.

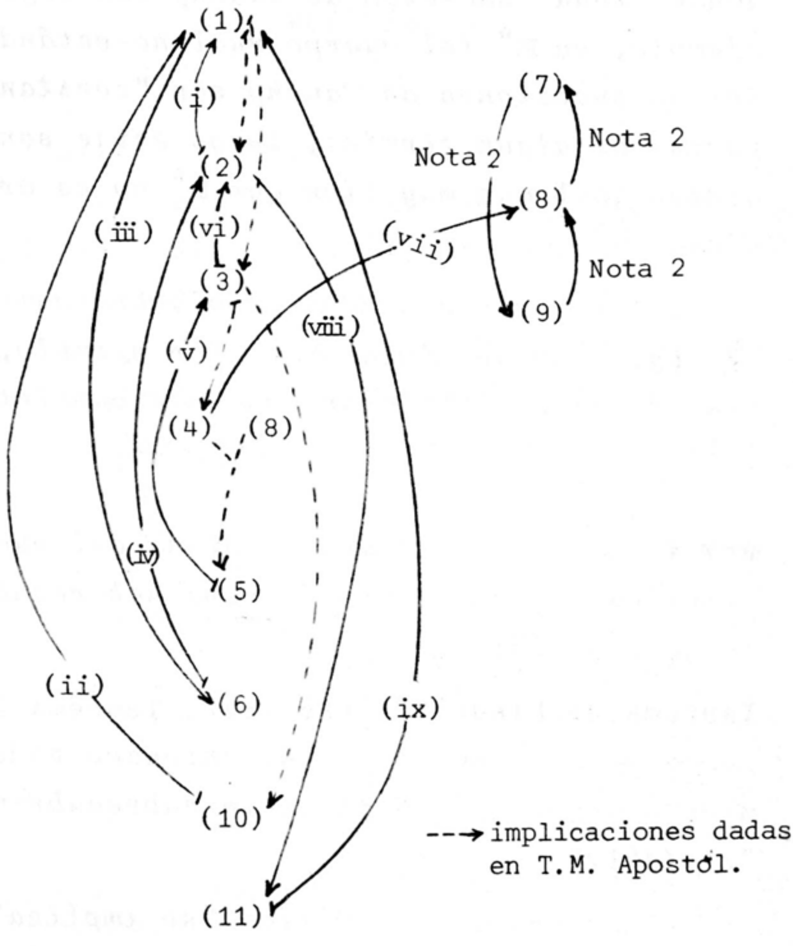

Fig. 2

NOTA 3. *Las propiedades* (1) *a* (6) *implican la propiedad arquimediana del cuerpo ordenado* K. *Sin embargo, anotamos:*

- *Existen cuerpos ordenados "no arquimedianos"* *donde "toda" sucesión de Cauchy converge. Por ejemplo, en* $\mathbb{R}^*$ *(el cuerpo real no-estándar) las únicas sucesiones de Cauchy son "constantes" a partir de algun têrmino, luego estas son convergentes. Sabemos muy bien que* $\mathbb{R}^*$ *no es arquimediano.*

- Existen cuerpos ordenados algebraicamente completos, y no arquimedianos. Por ejemplo, el completado $\overline{\mathbb{R}^*}$ *de* $\mathbb{R}^*$ *es algebraicamente completo (ver [2])*

NOTA 4. *La propiedad arquimediana del cuerpo K "implica" el siguiente teorema del recubrimiento de Lindelöf.*

Teorema de Lindelöf. (Apostol, Teorema 3-28,p.70) *Sea S un subconjunto de K, entonces todo recubrimiento abierto de S posee un subrecubrimiento "contable".*

Sin embargo, esto último "no implica" la propiedad arquimediana del cuerpo K. Por ejemplo, consideremos en $\mathbb{R}^*$ *un subcuerpo* $K = \mathbb{Q}(\lambda)$ *donde* λ *es un infinito positivo, entonces K es un cuerpo ordenado "contable", por lo tanto en K se satisface el teorema de Lindelöf. Evidentemente, K no es arquimediano.*

REFERENCIAS

[1] Apostol, T.M., *Análisis Matemático*, 2a. Edición, Editorial Reverté, España, 1976.

[2] Herstein, I.N., *Algebra Moderna*, Ed. Trillas, Mexico, 1976.

[3] Lang, Serge, *Algebra*, Adison Wesley Reading, 1969.

[4] Linero T., L.A., *Enunciados equivalentes al axioma de completez en un campo ordenado*, Tesis de Magisier en Docencia Matemática, U.P.N., 1984.

[5] Takeuchi, Y., "Completado Secuencial de $\mathbb{R}^*$", Bol. de Mat., Vol. XX, Nº 1, 1986, U.Nal...

*

Profesor Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTA. D.E. Colombia.