Boletín de Matemáticas **APUNTES**
Vol. XX, Nº 2 (1986)

LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA, LA FFT Y LA SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES*

Héctor M. Mora E.

1. LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA.

La transformada de Fourier Discreta, TFD, es una función $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}^N$ en $\mathbb{C}^N$ definida por

$$z=(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}) \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} (\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{N-1}) = \tilde{z}$$

(1) $$\tilde{z}_k = \sum_{l=0}^{N-1} z_l w^{kl} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

---

* En el presente artículo se explora el uso de métodos numéricos para resolver una ecuación diferencial ordinaria con valores de frontera y se ilustran la utilidad y eficiencia de la FFT, transformada de Fourier rápida, para lograr una solución numérica.

(2) con $w = \exp(-j\ 2\pi/N)$, $j^2 = -1$.

La TFD puede expresarse de manera matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & w^{2(N-1)} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^{3(N-1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_o \\ \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \vdots \\ \tilde{z}_{N-1} \end{bmatrix}$$

y de forma más compacta

$$W z = \tilde{z}$$

Algunas propiedades útiles y de fácil verificación son las siguientes

(3) $$w^{kN} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(4) $$\sum_{i=o}^{N-1} w^{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv 0 \ (\text{Mod } N) \\ N & \text{si } k \equiv 0 \ (\text{Mod } N) \end{cases}$$

(5) $$\sum_{i=o}^{N-1} w^{(k-\ell)i} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv \ell \ (\text{Mod } N) \\ N & \text{si } k \equiv \ell \ (\text{Mod } N) \end{cases}$$

en particular si $0 \leqslant k \leqslant N-1$

(6) $$\sum_{i=0}^{N-1} w^{-ki} = \begin{cases} N \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ si } k = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

(7) $$\sum_{i=1}^{N-1} w^{-ki} = \begin{cases} N-1 \quad \text{si } k = 0 \\ -1 \quad \text{si } k = 1,2,\ldots,N-1. \end{cases}$$

(8) W es una matriz simétrica.

(9) $$W \overline{W} = \overline{W} W = N I_N$$

La ecuación (9) permite definir la inversa

(10) $$z_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{z}_k w^{-ki}$$

(11) $$z = \frac{1}{N} \bar{W} \tilde{z}$$

(11a) $$z_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{z}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{z}_k w^{-kN}$$

La manera más sencilla de calcular la TFD, requiere el cálculo de los elementos de la matriz W, $N(N-1)$ multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ adiciones complejas, es decir, el número de operaciones es del orden de N^2. Como generalmente se necesita más tiempo para efectuar una multiplicación que para una adición, bien sea a la mano o por medio de un computador, y con frecuencia el número de multiplicaciones y el número de adiciones son del mismo orden, entonces, usualmente el conteo del número de operaciones de un proceso se hace con base en el número de multiplicaciones.

LA TRANSFORMADA DE FOURIER RAPIDA.

La transformada de Fourier rápida, TFR, comunmente conocida como FFT (Fast Fourier Transform) es un algoritmo rápido para calcular la TFD cuando N es potencia de 2. El método FFT fue propuesto por Cooley y Tukey [1]; Sande y Gentleman [2] presentan una modificación del algoritmo pero la idea principal es la misma. Por medio de la FFT el orden del número de operaciones complejas se reduce a $N\log_2 N$. A partir de las siguientes ideas se puede tener una visión general del funcionamiento de la FFT.

Sea

$$M = \log_2 N, \qquad 2^M = N$$

$$N_1 = N/2 .$$

La fórmula (1) se puede descomponer

$$\tilde{z}_k = \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i} w^{2ki} + \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i+1}\, w^{k(2i+1)}$$

$$\tilde{z}_k = \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i}\, w^{2ki} + w^k \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i+1}\, w^{2ki}$$

Como k varîa entre 0 y $N-1$

$$k = rN_1 + s \quad \text{con} \quad r = 0,1$$
$$s = 0,1,\ldots,N_1-1$$

$$\begin{aligned} w^{2ki} &= w^{2(rN_1+s)i} \\ &= w^{2N_1ri}\, w^{2si} \\ &= w^{Nri}\, w^{2si} \\ &= w^{2si} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^2 &= \exp(-j2\pi/N)^2 \\ &= \exp(-j4\pi/N) \\ &= \exp(-j2\pi/N_1) \\ &= w_{N_1} \end{aligned}$$

(12) $$\tilde{z}_k = \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i} w_{N_1}^{si} + w^k \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i+1} w_{N_1}^{si}$$

para

$$s = 0,1,2,\ldots,N_1.$$

Sea

$$x_s = \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i}\, w_{N_1}^{si} \qquad s = 0,1,\ldots,N_1-1$$

$$y_s = \sum_{i=0}^{N_1-1} z_{2i+1}\, w_{N_1}^{si} \qquad s = 0,1,\ldots,N_1-1$$

es claro que

$$(z_o, z_2, \ldots, z_{N-2}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (x_o, x_1, \ldots, x_{N_1-1})$$

$$(z_1, z_3, \ldots, z_{N-1}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (y_o, y_1, \ldots, y_{N_1-1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_k = \tilde{z}_{rN_1+s} &= x_s + w^{rN_1+s} y_s \\ &= x_s + w^{rN_1} w^s y_s \\ &= x_s + (-1)^r w^s y_s \end{aligned}$$

en particular

$$\tilde{z}_o = x_o + y_o$$

$$\tilde{z}_{N_1} = x_o - y_o \ .$$

Entonces para calcular $\tilde{z}_o, \tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{N-1}$ es necesario calcular $x_o, x_1, \ldots, x_{N_1-1}$, $y_o, y_1, \ldots, y_{N_1-1}$, es decir, dos veces la FFT de tamaño N_1 y hacer N_1-1 multiplicaciones complejas y así sucesivamente de manera recursiva.

Sea μ_N = número de multiplicaciones para calcular la FFT de tamaño N, entonces

$$\mu_N = 2\mu_{N_1} + N_1 - 1$$

Además

$$\mu_2 = 0$$

puesto que

$$(u_o, u_1) \xrightarrow{F} (u_o+u_1, u_o-u_1).$$

Entonces

$$\mu_4 = 1$$
$$\mu_8 = 5$$
$$\mu_{16} = 17$$
$$\mu_{32} = 49$$
$$\mu_{64} = 129$$
$$\mu_{128} = 321$$
$$\vdots$$

Sea $\hat{\mu}_n$ la sucesión definida por

$$\hat{\mu}_2 = 0$$
$$\hat{\mu}_n = 2\hat{\mu}_{n/2}+n/2 \quad \text{para } n \text{ potencia de 2.}$$
$$\hat{\mu}_4 = 2$$
$$\hat{\mu}_8 = 8$$
$$\hat{\mu}_{16} = 24$$
$$\hat{\mu}_{32} = 64$$
$$\vdots$$

En general $\quad \hat{\mu}_n = \frac{n}{2} \log_2 n/2$

y es claro que

$$\mu_N \leqslant \hat{\mu}_N = \frac{N}{2} \log_2 N/2 \ .$$

Sea α_N = número de adiciones complejas para calcular la FFT de tamaño N, entonces

$$\alpha_N = 2\alpha_{N_1} + N$$

con

$$\alpha_2 = 2 \ .$$

Luego

$$\alpha_4 = 8$$

$$\alpha_8 = 24$$

$$\alpha_{16} = 64$$

$$\alpha_{32} = 160$$

$$\vdots$$

$$\alpha_N = N\log_2 N \ .$$

En resumen, la FFT requiere un número de operaciones complejas del orden de $N\log_2 N$; además es necesario calcular algunos valores de las funciones seno y coseno y también efectuar un reordenamiento de los elementos para facilitar el cálculo.

3. SOLUCION NUMERICA DE UNA ECUACION DIFERENCIAL.

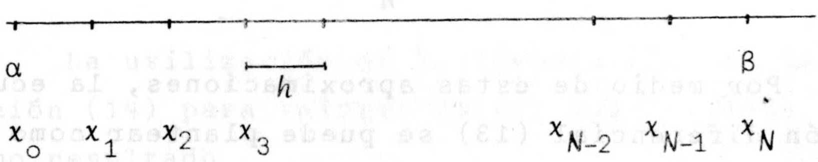
Consideremos la ecuación diferencial

$$(13) \qquad ay'' + by' + cy = d(x)^{*}$$

con las condiciones de frontera

$$y(\alpha) = y_\alpha \;, \quad y(\beta) = y_\beta .$$

La solución numérica de la ecuación diferencial consiste en encontrar valores aproximados de la función y en varios puntos, generalmente equidistantes, del intervalo $[\alpha,\beta]$.



$$h = \frac{\beta-\alpha}{N}$$

$$x_i = \alpha + ih \qquad i = 0,1,\ldots,N.$$

---

* Los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de esta ecuación pueden encontrarse en Garret Birkhoof-Ginn-Carlo Rota, *Ordinary Differential Ecuations*, Ginn and Company, 1962 (Theorem 9.10, Chap.II).

Sea $y_i = y(x_i)$ o una aproximación de $y(x_i)$.

El problema estará resuelto cuando se conozcan los valores $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$.

Para h suficientemente pequeño

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) \cong \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}$$

Entonces para $i = 1,2,\ldots,N-1$.

$$y'(x_i) \cong \frac{-y_{i-1}+y_{i+1}}{2h}$$

$$y''(x_i) \cong \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}$$

Por medio de estas aproximaciones, la ecuación diferencial (13) se puede plantear como un sistema de N-1 ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} &\frac{a}{h^2}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}) + \frac{b}{2h}(-y_{i-1}+y_{i+1}) \\ (14) \qquad & + cy_i = d_i = d(x_i), \quad i = 1,2,\ldots,N-1. \end{aligned}$$

En total hay N-1 ecuaciones y N+1 variables $y_0, y_1, \ldots, y_N$, pero dos valores son conocidos

$$y_o = y_\alpha$$

$$y_N = y_\beta$$

Así la solución numérica de la ecuación diferencial se reduce a resolver un sistema de N-1 ecuaciones con N-1 incógnitas. Para resolver este problema clásico, existen numerosos métodos, algunos de los cuales son muy eficientes, teniendo en cuenta que la matriz es tridiagonal. El método expuesto en este artículo, la utilización de la FFT, no es de los más eficientes para el caso de una variable, pero en cambio permite ver una de las diferentes aplicaciones de la FFT y además abre campo al caso de dos variables independientes, donde la utilización de la FFT resulta mucho mas eficiente.

La utilización de la fórmula (10) en la ecuación (14) para valores de i = 1,2,...,N-2, da como resultado

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k\Big[\frac{a}{h^2}\left(w^{-k(i-1)} - 2w^{-ki} + w^{-k(i+1)}\right) + \frac{b}{2h}\left(-w^{-k(i-1)} + w^{-k(i+1)}\right) + cw^{-ki}\Big] = d_i$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k w^{-ki}\Big[\frac{a}{h^2}(w^k - 2 + w^{-k}) + \frac{b}{2h}(-w^k + w^{-k}) + c\Big] = d_i$$

$$(15) \quad \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k \, z_k \, w^{-ki} = d_i \qquad i = 1,2,\ldots,N-2$$

$$z_k = \frac{a}{h^2}(w^k - 2 + w^{-k}) + \frac{b}{2h}(-w^k + w^{-k}) + c$$

$$(16) \quad z_k = \frac{2a}{h^2}(\cos k\theta - 1) + c + j\frac{b}{h}\,\mathrm{sen}\,k\theta \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

donde

$$\theta = 2\pi/N \,.$$

Con la ecuación (14), para $i = N-1$ se obtiene

$$\frac{a}{h^2}(y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N) + \frac{b}{2h}(-y_{N-2} + y_N) + cy_{N-1} = d_{N-1}$$

$$\frac{a}{h^2}(y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_o) + \frac{b}{2h}(-y_{N-2} + y_o) + cy_{N-1}$$

$$= d_{N-1} + (y_o - y_N)\left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right) = \delta_{N-1}.$$

Por medio de las fórmulas (10) y (11a), la ecuación anterior se convierte en

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k \Big[\frac{a}{h^2}\big(w^{-k(N-2)} - 2w^{-k(N-1)} + w^{-kN}\big)$$

$$+ \frac{b}{2h}\big(-w^{-k(N-2)} + w^{-kN}\big) + c\, w^{-k(N-1)}\Big] = \delta_{N-1}$$

$$(17) \quad \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k \, z_k \, w^{-k(N-1)} = \delta_{N-1}$$

Las ecuaciones (15) y (17) pueden resumirse en

$$(18) \qquad \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u_k\, w^{-ki} = \delta_i \qquad i = 1,2,\ldots,N-1$$

$$(19) \qquad \delta_i = \begin{cases} d_i & i = 1,2,\ldots,N-2 \\ d_{N-1} + (y_0 - y_N)\left(\frac{a}{h^2} + \frac{b}{2h}\right) & i = N-1 \end{cases}$$

$$(20) \qquad u_k = \tilde{y}_k z_k \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Las ecuaciones (18) constituyen un sistema de N-1 ecuaciones lineales con N incógnitas; su expresión matricial es casi la expresión de la TFD inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-2(N-1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & w^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \end{bmatrix}$$

Al agregar otra ecuación, definida como el negativo de la suma de las otras N-1 ecuaciones y teniendo en cuenta la propiedad (7), resulta un sistema de N ecuaciones con N incógnitas, pero obviamente singular por construcción.

$$\begin{bmatrix} -N+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-2(N-1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & w^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_o \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \end{bmatrix}$$

(21) con $\delta_o = -\sum_{i=1}^{N-1} \delta_i$

Al premultiplicar todo el sistema por la matriz W, regular, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_o \\ \tilde{\delta}_1 \\ \tilde{\delta}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\delta}_{N-1} \end{bmatrix}$$

donde $(\tilde{\delta}_o, \tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_{N-1})$ es la TFD de $(\delta_o, \delta_1, \ldots, \delta_{N-1})$ con $\tilde{\delta}_o = 0$. Es decir, de nuevo se obtiene un sistema de N-1 ecuaciones con N incógnitas, pero éste resulta ser muy sencillo.

$$-u_o + u_i = \tilde{\delta}_i$$

(22) $u_i = \tilde{\delta}_i + u_o \qquad i = 1, 2, \ldots, N-1$

$$\tilde{y}_i = \frac{\tilde{\delta}_i}{z_i} + \frac{z_o}{z_i}\,\tilde{y}_o = \frac{\tilde{\delta}_i}{z_i} + \frac{c\tilde{y}_o}{z_i}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{y}_i = \tilde{y}_o + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\tilde{\delta}_i}{z_i} + c\tilde{y}_o \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{z_i}$$

$$Ny_o = \tilde{y}_o\,(1+c\sum_{i=1}^{N-1} 1/z_i) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\tilde{\delta}_i}{z_i}$$

$$\tilde{y}_o = \frac{Ny_o - \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\delta}_i/z_i}{1+c\sum_{i=1}^{N-1} 1/z_i} \tag{23}$$

Con el valor de $\tilde{y}_o$ se calcula $u_o = c\tilde{y}_o$ y en seguida los otros u_i con la fórmula (22); el cálculo de los $\tilde{y}_i$ es inmediato según la fórmula (20) y finalmente se obtienen los valores $y_o, y_1, \dots, y_{N-1}$ por medio de la TFD o de la FFT inversas.

RESUMEN DEL METODO.

1. Datos $a, b, c, \alpha, \beta, N, y_o, y_n, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$
2. $\delta_i = d_i$, $i = 1, 2, \dots, N-2$.
3. Cálculo de δ_{N-1} según fórmula (19).
4. Cálculo de δ_o según fórmula (21).
5. Cálculo de $\tilde{\delta}_o, \tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_{N-1}$ TFD ó FFT de $\delta_o, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}$.

6. Cálculo de los z_i según fórmula (16).
7. Cálculo de $\tilde{y}_o$ según fórmula (23).
8. Cálculo de $u_o = c\tilde{y}_o$.
9. Cálculo de u_i, $i = 1,2,\ldots,N-1$ según fórmula (22).
10. Cálculo de los valores $\tilde{y}_i = u_i/z_i$ $i = 1,2,\ldots,N-1$, según (20).
11. Por medio de la inversa de la TFD ó de la FFT cálculo de $y_o, y_1, \ldots, y_{N-1}$

UN EJEMPLO DE RESULTADOS.

$$y'' + 2y' - 4y = \frac{-2(2x^6+2x^5+3x^4+4x^3+4x^2+2x+3)}{(1+x^2)^4}$$

$y(0) = 1$ $\qquad\qquad$ $y_{exacta} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$y(0.5) = 0.8$ $\qquad$ $N = 8$.

x	d	δ	$\tilde{\delta}$		z	
0.0		-13.51	0.0	0.0	-4.0	0.0
0.0625	-6.186	-6.186	31.42	40.34	-154.0	22.63
0.125	-6.243	-6.243	-7.829	55.07	-516.0	32.00
0.1875	-6.177	-6.177	-46.42	38.74	-878.0	22.63
0.25	-6.005	-6.005	-62.38	0.0	-1028.0	0.0
0.3125	-5.751	-5.751	-46.42	-38.74	-878.0	-22.63
0.3750	-5.439	-5.439	-7.829	-55.07	-516.0	-32.00
0.4375	-5.094	49.31	31.42	-40.34	-154.0	-22.63

$\tilde{y}_o = 7.5161$

u		$\tilde{y}$		y	y_{exacto}
-30.064	0.0	7.516	0.0	1.000	1.000
1.360	40.34	0.02905	-0.2578	0.9962	0.9961
-37.89	55.07	0.07975	-0.1018	0.9848	0.9846
-76.49	38.74	0.08819	-0.04184	0.9662	0.9660
-92.45	0.0	0.08993	0.0	0.9414	0.9412
-76.49	-38.74	0.08819	0.04184	0.9112	0.9110
-37.89	-55.07	0.07975	0.1018	0.8768	0.8767
1.360	-40.34	0.02905	0.2578	0.8394	0.8393

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Cooley, Tukey., "An algorithm for the machine calculation of the complex Fourier Series" Math.Comp., Vol.19, Nº 90, abril 1965, pp.297-301.

[2] Gentleman, Sande., "Fast Fourier Transform for fun and profit", Afips Proc.,1966 Fall Joint Computer Conf., Washington D.C., pp.563-578.

[3] Hockney, Eastwood., *Computer Simulation using particles*, McGraw-Hill, N.Y., 1981.

*

Profesor Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTA, D.E. Colombia.