Boletín de Matemáticas
Vol. XX, Nº 2 (1986) *APORTES*

LA TOPOLOGIA C DE $\mathbb{R}^*$

I. Mantilla, J. M. Muñoz Q., Yu Takeuchi

RESUMEN. En [4] se estudió la topología del orden de los reales no estándar $\mathbb{R}^*$, la más natural desde el punto de vista del principio de transferencia. En [1] se trabajó con una segunda topología de $\mathbb{R}^*$ menos fina que la anterior, que se denominó la *microtopología* y se denotó por $\mathcal{B}$. Nos proponemos en este artículo analizar una tercera topología de $\mathbb{R}^*$ a la cual llamaremos C, menos fina que la microtopología; estableceremos algunas relaciones entre estas dos últimas y, para los reales no estándar finitos $\mathbb{R}^*_F$, caracterizaremos sus subconjuntos abiertos, cerrados y compactos para la topología C. Además compararemos la continuidad con respecto a las diferentes topologías.

DEFINICION 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^*$. Decimos que A es C-abierto si para todo $\tau \in A$, existe $r > 0$ (real) tal que:

$$(\tau - r, \ \tau + r)^* \subseteq A. \ ^{(1)}$$

La colección C de todos los C-abiertos de $\mathbb{R}^*$ es una topología para $\mathbb{R}^*$.

En efecto:

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^* \in C$.

(ii) Sean A y B C-abiertos y tomemos $\tau \in A \cap B$; entonces existen r_A y r_B reales positivos tales que:

$$(\tau - r_A, \tau + r_A)^* \subseteq A \quad \text{y} \quad (\tau - r_B, \ \tau + r_B)^* \subseteq B.$$

Escojamos un real r que cumpla:

$$0 < r < \min\{r_A, r_B\} \ .$$

En tal caso,

$$(\tau - r, \ \tau + r)^* \subseteq A \cap B$$

por lo tanto $A \cap B$ es C-abierto.

---

(1) $(\tau - r, \tau + r)^* = \{\alpha \in \mathbb{R}^* \mid \tau - r < \alpha < \tau + r\}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $(a,b)^*$ coincide con la extensión elemental a $\mathbb{R}^*$ del intervalo (a,b) de $\mathbb{R}$.

(iii) Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de C-abiertos y $\tau \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\tau \in A_\lambda$ y por tanto existe un real $r > 0$ tal que $(\tau - r, \tau + r)^* \subseteq A_\lambda$.
Se sigue que $(\tau - r, \tau + r)^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Esto significa que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es C-abierto.

EJEMPLO 1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^*$ y consideremos la micro-vecindad de α, $E(\alpha) = \{\tau \in \mathbb{R}^* \mid \tau \approx \alpha\}$.

Puesto que, para todo real positivo r, se tiene que $\alpha + r \not\approx \alpha$, concluimos que $E(\alpha)$ no es C-abierto.

EJEMPLO 2. Ningún intervalo no-estándar es C-abierto. Comprobémoslo para el intervalo $(\alpha, \beta)^*$, con $\alpha \not\approx \beta$ (el caso $\alpha \approx \beta$ es trivial).

Sea ε un infinitesimal positivo y

$$\tau = \alpha + \varepsilon \in (\alpha, \beta)^* .$$

Si suponemos que $(\tau - r, \tau + r)^* \subseteq (\alpha, \beta)^*$ para algún real $r > 0$, entonces tenemos que:

$$\alpha < \tau - r < \tau; \quad \text{con} \quad \tau \approx \alpha$$

En tal caso, $\tau - r \approx \tau$, es decir, $r = 0$; lo cual es absurdo.

EJEMPLO 3. Si a un intervalo no-estándar cualquiera le quitamos las micro-vecindades de sus extremos, obtenemos un C-abierto. Así, por ejemplo, el conjunto

$$A = (\alpha,\beta)^* - \{E(\alpha) \cup E(\beta)\} \quad \text{es } C\text{-abierto.}$$

En efecto, para $\tau \in A$, tenemos que $\tau \not\approx \alpha$ y $\tau \not\approx \beta$. Por lo tanto, existen reales positivos r_o y r_1 tales que:

$$\tau-\alpha \geqslant r_o \quad \text{y} \quad \beta-\tau \geqslant r_1$$

o sea,

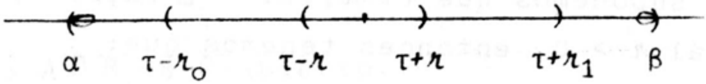
$$\alpha \leqslant \tau-r_o \qquad \tau+r_1 \leqslant \beta.$$

Si r es un real tal que

$$0 < r < \text{mín}\{r_o, r_1\},$$

entonces

$$\alpha < \tau-r \quad \text{y} \quad \tau+r < \beta.$$



Es decir, $(\tau-r,\tau+r)^* \subseteq (\alpha,\beta)^*$. Pero $\tau-r \not\approx \alpha$, pues en caso contrario tendríamos que $\tau-r_o \approx \tau-r$ y entonces $r_o \approx r$ (absurdo!). De manera similar, $\tau+r \not\approx \beta$, y podemos entonces concluir que:

$$(\tau-r,\tau+r)^{*} \subseteq A. \blacktriangle$$

Obsérvese que si α y β son finitos y $a = \mathrm{Est}\,\alpha$, $b = \mathrm{Est}\,\beta$, entonces el conjunto A del último ejemplo puede expresarse como unión de las micro-vecindades de los reales pertenecientes al intervalo real (a,b). Es decir,

$$A = \bigcup_{x\in(a,b)} E(x)$$

Comprobemos este hecho:

(i) Si $\tau \in A$, entonces $\alpha < \tau < \beta$ con $\tau \not\approx \alpha$ $\tau \not\approx \beta$.

Llamemos $x = \mathrm{Est}\,\tau$. Se tiene entonces que $a < x < b$ y $\tau \in E(x)$; lo cual significa que

$$\tau \in \bigcup_{x\in(a,b)} E(x).$$

Así

$$A \subseteq \bigcup_{x\in(a,b)} E(x).$$

(ii) Si existe $x \in (a,b)$ tal que $\tau \approx x$, entonces

$$a < x = \mathrm{Est}\,\tau < b,$$

Por lo tanto, $\alpha < \tau < \beta$. Pero $\tau \not\approx \alpha$; pues en caso contrario, $\alpha \approx x$, o sea, $a = x$ (absurdo!).

De la misma forma, $\tau \not\approx \beta$, luego:

$$\tau \in (\alpha,\beta)^{*} - \{E(\alpha) \cup E(\beta)\} = A$$

esto es,

$$\bigcup_{x\in(a,b)} E(x) \subseteq A.$$

Usando los resultados de (i) y (ii) concluimos que:

$$A = \bigcup_{x\in(a,b)} E(x).$$

Se deduce también que para todo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ y todo real $r > 0$,

$$\bigcup_{x\in(-r,r)\subseteq\mathbb{R}} E(\alpha+x) = (\alpha-r,\alpha+r)^* - \{E(\alpha-r) \cup E(\alpha+r)\}$$

De esta forma, podemos afirmar que las uniones de microvecindades sobre intervalos reales abiertos son C-abiertos. Nótese también que la extensión elemental de cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$, omitiendo las micro-vecindades de sus extremos, es C-abierto, ya que

$$(a,b)^* - \{E(a) \cup E(b)\} = \bigcup_{\substack{a<x<b \\ x\in\mathbb{R}}} E(x)$$

Conceptos topológicos tales como C-conexidad, C-compacidad, C-continuidad, etc., se definen de manera natural; así por ejemplo, un conjunto es C-cerrado si su complemento es C-abierto, y no es difícil ver entonces que si a un intervalo no-estándar cualquiera agregamos las micro-vecindades de sus extremos, obtenemos un C-cerrado.

PROPOSICION 1. La topología C de $\mathbb{R}^*$, es menos fina que la micro-topología $\mathcal{B}$ ($C \leqslant \mathcal{B}$).

Demostración. Sea A un C-abierto. Si $\tau \in A$, existe un real $r > 0$ tal que:

$$(\tau - r, \tau + r)^* \subseteq A;$$

luego, para todo $\sigma \approx \tau$ se tiene que

$$\sigma \in (\tau - r, \tau + r)^* \subseteq A.$$

Es decir, $\sigma \in A$ y, por lo tanto, A es micro-abierto. ▲

Usando esta proposición podemos establecer la siguiente relación entre las tres topologías conocidas de $\mathbb{R}^*$:

$$C \leqslant \mathcal{B} \leqslant \mathcal{O}.$$

Es conveniente observar la presencia de conjuntos abiertos y cerrados, diferentes de $\emptyset$ y $\mathbb{R}^*$, en las tres topologías. Así por ejemplo, el conjunto de los números no-estándar finitos $\mathbb{R}^*_F$, es C-abierto, C-cerrado, micro-abierto, micro-cerrado, $\mathcal{O}$-abierto(2) y $\mathcal{O}$-cerrado. La misma situación se presenta con el conjunto de los números no-estándar infinitos $\mathbb{R}^*_I$.

Merece resaltarse también el hecho de que $\mathbb{R}^*$ no es un conjunto conexo en ninguna de estas topologías.

DEFINICION 2. Sean $S \subseteq \mathbb{R}^*$ y (S_n) una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Diremos que S es generado por (S_n) si

$$S = \{\tau = [(x_n)] \in \mathbb{R}^* / \ x_n \in S_n \text{ para casi todo } n\}$$

En tal caso, escribiremos $S = \text{gen}(S_n)$ o simplemente $S \in G$.

Por ejemplo, los intervalos no-estándar son conjuntos generados.

PROPOSICION 2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^*$, $S = \text{gen}(S_n)$.
τ es un punto C-interior(3) de S ($\tau \in \overset{\circ}{S}{}^C$) si y sólo si τ es un punto microinterior de S ($\tau \in \overset{\circ}{S}{}^B$).

Demostración. $\Rightarrow$) Inmediato, ya que $C \leqslant B$.

---

(2) O-abierto quiere decir, abierto para la topología de orden O.

(3) τ es C-interior de S, si existe un C-abierto G tal que $\tau \in G \subseteq S$. Se deduce que S es C-abierto, si y sólo si todo punto de S es C-interior de S. Especialmente,

$$(\alpha,\beta)^* - \{E(\alpha) \cup E(\beta)\} = \widehat{(\alpha,\beta)^*}^{\,\circ C}$$

$\Leftarrow$) Tomemos $\tau = [(x_n)] \in \mathring{S}^{B}$. Entonces $E(\tau) \subseteq S$

Llamemos $\mathcal{D} = \{\alpha \mid (\alpha,\tau)^{*} \subseteq S\}$.

Es fâcil ver que $\mathcal{D}$ es un conjunto generado; además $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ya que $\tau \in \mathring{S}^{B}$.

Ahora bien, veamos que existe un real $r > 0$ tal que $(\tau - r, \tau]^{*} \subseteq S$. Podemos suponer que $\mathcal{D}$ es acotado inferiormente, pues en caso contrario la situación es evidente. En tal caso, existe el extremo inferior de $\mathcal{D}$.

Sea $\alpha(\tau) = \inf \mathcal{D}$.

Obsérvese que si $\alpha(\tau) \simeq \tau$, entonces para todo infinitesimal positivo ε, se tiene que

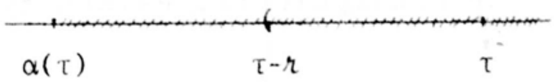
$$(\alpha(\tau)-\varepsilon,\tau)^{*} \subseteq E(\tau) \subseteq S;$$

es decir, $(\alpha(\tau)-\varepsilon) \in \mathcal{D}$ (absurdo!). Por lo tanto, $\alpha(\tau) \not\simeq \tau$.

Escojamos entonces un real positivo r que cumpla:

$$0 < r < \tau - \alpha(\tau) ;$$

evidentemente se tiene que $(\tau - r, \tau]^{*} \subseteq S$



Mediante un procedimiento análogo, se puede mostrar que existe $r' > 0$ (real) tal que $[\tau,\tau+r')^* \subseteq S$. Usando estos dos resultados, tenemos que

$$(\tau-r,\tau+r') \subseteq S;$$

por lo tanto

$$\tau \in \overbrace{(\tau-r,\tau+r')^*}^{\circ C} \subseteq \overset{\circ}{S}{}^{C}. \quad \blacktriangle$$

La proposición anterior nos permite concluir que si S es generado y micro-abierto, entonces S es C-abierto; o sea, las topologías C y B son equivalentes para el caso de conjuntos generados.

PROPOSICION 3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}_F^*$ un C-abierto. $\tau \in A$ si y sólo si $\mathrm{Est}\,\tau \in A_o$, donde $A_o = \{\mathrm{Est}\,\tau \mid \tau \in A\}$. En consecuencia se tiene que $A_o = A \cap \mathbb{R}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Trivial.

$\Leftarrow$) Si $\mathrm{Est}\,\tau \in A_o$, existe $\sigma \in A$ con $\sigma \approx \tau$. Puesto que $C < B$, entonces $\tau \in A$. $\blacktriangle$

COROLARIO. Si $A \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C-abierto, entonces A_o es abierto en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Demostración. Si $x \in A_o$, entonces $x = \mathrm{Est}\,x \in A_o$, luego $x \in A$; por consiguiente, existe $r > 0$ real, tal que

$$(x-r,\ x+r)^* \subseteq A,$$

entonces

$$(x-r,x+r)^* \cap \mathbb{R} \subseteq A \cap \mathbb{R} = A_o.$$

Por lo tanto A_o es abierto. ▲

TEOREMA 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}_F^*$.
A es C-abierto si y sólo si existe A_o abierto en $\mathbb{R}$ tal que:

$$A = \bigcup_{x \in A_o} E(x).$$

Demostración. $\Leftarrow$) Si $\tau \in A$, existe $x_o \in A_o$ tal que $\tau \in E(x_o)$; y por tanto existe $h > 0$ (real) tal que:

$$\mathbb{R} \supseteq (x_o-h, x_o+h) \subseteq A_o \quad \text{y} \quad x_o = \mathrm{Est}\,\tau.$$

En tal caso,

$$\tau \in \bigcup_{\substack{|x-x_o|<h \\ x\in\mathbb{R}}} E(x) \subseteq \bigcup_{x\in A_o} E(x) = A$$

Puesto que $\bigcup_{x\in(x_o-h,x_o+h)\subseteq\mathbb{R}} E(x)$ es C-abierto, se sigue que τ es un punto C-interior de A y, por lo tanto, A es C-abierto.

$\Rightarrow$) Si A es C-abierto, entonces por el corolario de la proposición 3, $A_o = \{\mathrm{Est}\,\tau \mid \tau \in A\}$ es abierto en $\mathbb{R}$ y

$$A = \bigcup_{x \in A_o} E(x). \quad \blacktriangle$$

Como consecuencia del teorema anterior se tiene un resultado similar para C-cerrados.

PROPOSICION 4. $S \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C-cerrado si y sólo si existe un cerrado S_o de $\mathbb{R}$, tal que

$$S = \bigcup_{x \in S_o} E(x).$$

Demostración. $\Rightarrow$) Puesto que $\mathbb{R}_F^*$ es un conjunto C-cerrado y también C-abierto, entonces $\mathbb{R}_F^* - S$ es C-abierto. Si se tiene en cuenta que

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} E(x) = \mathbb{R}_F^* ,$$

del teorema anterior se sigue que

$$\bigcup_{x \in \mathbb{R}} E(x) - S = \bigcup_{x \in A_o} E(x)$$

para algún abierto A_o de $\mathbb{R}$, luego

$$S = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} E(x) - \bigcup_{x \in A_o} E(x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R} - A_o} E(x),$$

ya que $E(x) \cap E(y) = \emptyset$ para todo $x \neq y$. Llamando $S_o = \mathbb{R} - A_o$, se concluye lo deseado.

$\Leftarrow$) Supongamos que $S = \bigcup_{x \in S_o} E(x)$, con S_o un cerrado de $\mathbb{R}$. Es claro que $\mathbb{R}-S_o$ es un abierto de $\mathbb{R}$ y que:

$$\bigcup_{\chi\in\mathbb{R}-S_o} E(\chi) = \bigcup_{\chi\in\mathbb{R}} E(\chi) - \bigcup_{\chi\in S_o} E(\chi)$$

es C-abierto, es decir, $\mathbb{R}^*_F - S$ es C-abierto. En tal caso, $\mathbb{R}^* - S = \mathbb{R}^*_I \cup (\mathbb{R}^*_F - S)$ es C-abierto, pues $\mathbb{R}^*_I$ lo es. Por lo tanto, S es C-cerrado. ▲

Obsérvese además que si $S \subseteq \mathbb{R}^*_F$ es C-cerrado entonces $S_o = \{\text{Est}\,\tau \mid \tau \in S\}$ es cerrado de $\mathbb{R}$ y además:

$$S = \bigcup_{\chi\in S_o} E(\chi).$$

PROPOSICION 5. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $E(\alpha)$ es el más pequeño C-cerrado que contiene a α.

Demostración. En primer lugar, veamos que $E(\alpha)$ es C-cerrado. Si $\tau \notin E(\alpha)$, entonces $\tau \not\approx \alpha$ y, por lo tanto, existe un real $r > 0$ tal que $|\tau-\alpha| \geqslant r$. En tal caso, $(\tau-r/2, \tau+r/2)^* \subseteq \{E(\alpha)\}^c$, de donde $\{E(\alpha)\}^c$ es C-abierto y concluimos que $E(\alpha)$ es C-cerrado.

Si A es un C-cerrado que contiene a α y $\tau \notin A$, entonces existe un real positivo r tal que

$$(\tau-r, \tau+r)^* \subseteq A^c \quad (= \text{complemento del conjunto } A).$$

Por lo tanto, $\tau \not\approx \alpha$, de donde,

$$E(\alpha) \subseteq A.$$

EJEMPLO 4. Sea α un número no-estándar arbitrario y consideremos el conjunto unitario $A = \{\alpha\}$. De la proposición anterior se desprende que A no es C-cerrado; sin embargo, podemos pensar en encontrar el conjunto de puntos de acumulación de A, o derivado de A, que notaremos $\mathcal{D}(A)$.

Es obvio que $\alpha \notin \mathcal{D}(A)$; veamos qué sucede con los números que son infinitamente próximos a α:
Si $\alpha \neq \tau \approx \alpha$, entonces cualquier C-abierto G que contenga a τ, debe contener un intervalo no-estándar abierto, de radio real, con centro en τ y éste necesariamente contiene a α. Por lo tanto, los puntos infinitamente próximos a α son puntos de acumulación de A es decir,

$$E(\alpha) - \{\alpha\} \subseteq \mathcal{D}(A). \qquad \text{(I)}$$

Examinemos ahora los puntos que no son infinitamente próximos a α.

Si $\tau \not\approx \alpha$ y $r = \mathrm{Est}|\tau-\alpha|$(4), entonces, llamando G al C-abierto definido por

---

(4) Se puede suponer que $|\tau-\alpha|$ es finito; en caso contrario, r puede ser cualquier real.

$$G = (\tau - r/2, \tau + r/2)^* - \{E(\tau - r/2) \cup E(\tau + r/2)\}.$$

tenemos que

$$(G - \{\tau\}) \cap A = \emptyset \ .$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(A) \subseteq E(\alpha) - \{\alpha\}. \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II) concluimos que

$$\mathcal{D}(A) = E(\alpha) - \{\alpha\}. \quad \blacktriangle$$

EJEMPLO 5. Examinemos a $\mathbb{R}$ como subconjunto de $\mathbb{R}^*$. Recordemos que los reales son puntos aislados en $\mathbb{R}^*$ con la topología de orden y con la micro-topología, sin embargo esto no sucede con la topología C. En efecto, si $x \in \mathbb{R}$, entonces para todo C-abierto G que contenga a x como elemento, existe $r > 0$ (real) tal que $(x-r, x+r)^* \subseteq G$.
En tal caso,

$$[(x-r, x+r)^* - \{x\}] \cap \mathbb{R} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto

$$(G - \{x\}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset.$$

Es evidente que los números no-estándar infinitos no son puntos de acumulación de $\mathbb{R}$ y que, si $\alpha \in \mathbb{R}^*_F$, entonces $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, de donde,

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*_F .$$

Podemos entonces concluir que $\mathbb{R}$ no es C-cerrado.

DEFINICION 3. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^*$. Decimos que S es C-compacto, si de todo cubrimiento de S con C-abiertos, se puede extraer un cubrimiento finito.

PROPOSICION 6. Sean, $K \subseteq \mathbb{R}^*_F$, $K_o = \{\mathrm{Est}\,\tau \mid \tau \in K\}$ y $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de C-abiertos.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $A_{\lambda,o} = \{\mathrm{Est}\,\tau \mid \tau \in A_\lambda\}$. Entonces $K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, si y sólo si $K_o \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{\lambda,o}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si $x \in K_o$, entonces $x = \mathrm{Est}\,\tau$ para algún $\tau \in K$ y $K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Luego, $x = \mathrm{Est}\,\tau$ y $\tau \in A_\lambda$ para algún $\lambda \in \Lambda$. Esto significa que $x \in A_{\lambda,o}$ para algún $\lambda \in \Lambda$; es decir, $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{\lambda,o}$. Por lo tanto $K_o \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{\lambda,o}$.

$\Leftarrow$) Si $\tau \in K$, entonces $\mathrm{Est}\,\tau \in K_o \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{\lambda,o}$ y, en tal caso, $\mathrm{Est}\,\tau \in A_{\lambda,o}$ para algún $\lambda \in \Lambda$.

Como A_λ es C-abierto, $\tau \in A_\lambda$ para algún $\lambda \in A$, y se sigue que $K \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. ▲

TEOREMA 2. $K \subseteq \mathbb{R}^*_F$ es C-compacto si y sólo si $K_o = \{\mathrm{Est}\,\tau \mid \tau \in K\}$ es compacto en $\mathbb{R}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $\{G_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de K_o.

Para cada $i \in I$, definimos $A_i = \{\tau \mid \operatorname{Est}\tau \in G_i\}$. Entonces, A_i es C-abierto para cada $i \in I$ y, según la proposición 6,

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

Como K es C-compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Por lo tanto, de la proposición anterior, tenemos que

$$K_o \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

$\Leftarrow$) Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un cubrimiento de K por C-abiertos. Entonces $\{A_{\lambda,o}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un cubrimiento abierto de K_o. Puesto que K_o es compacto, existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tales que $K_o \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i, o}$.

Usando nuevamente la proposición anterior, concluimos que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}. \blacktriangle$$

COROLARIO. Si $K \subseteq \mathbb{R}_F^*$ es C-compacto, entonces K es acotado con una cota finita.

Demostración. Si K es C-compacto, entonces K_o es compacto en $\mathbb{R}$ y por lo tanto acotado en $\mathbb{R}$. Luego, si M es una cota de K_o, entonces $M+1$ lo es de K. $\blacktriangle$

El recíproco de este corolario no es cierto. Es decir, la acotación finita no es una condición suficiente para la C-compacidad.

$A = (0,1)^{*} - \{E(0) \cup E(1)\} \subseteq \mathbb{R}^{*}_{F}$ es acotado por $1 \in \mathbb{R}^{*}_{F}$ y no es C-compacto, pues, si lo fuera, $A_{o} = (0,1)^{*} \cap \mathbb{R}$ (= intervalo real $(0,1)$) sería compacto en $\mathbb{R}$.

Es de anotar también que el hecho de que un conjunto sea C-compacto, no implica que sea C-cerrado, como es el caso de los conjuntos unitarios de $\mathbb{R}^{*}$. Así mismo, un conjunto C-cerrado y acotado, no necesariamente es C-compacto. Por ejemplo, $\mathbb{R}^{*}_{F}$ es C-cerrado y acotado por cualquier número no-estándar infinito. Sin embargo no es C-compacto, pues si lo fuera, del Teorema 2 tendríamos que $\mathbb{R}$ sería compacto, lo cual es absurdo.

PROPOSICION 7. Si $K \subseteq \mathbb{R}^{*}_{F}$ es C-cerrado y de acotación finita, entonces K es C-compacto.

Demostración. Si K es C-cerrado, entonces

$$K = \bigcup_{x \in K_{o}} E(x),$$

donde $K_{o} = \{\text{Est}\,\tau \mid \tau \in K\}$.

Puesto que K_{o} es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, ya que K es C-cerrado y de acotación finita, se tiene que K_o es compacto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, según el Teorema 2, K es C-compacto.

EJEMPLO 6. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^*_F$, entonces:

$$A = (\alpha,\beta)^* \cup \{E(\alpha) \cup E(\beta)\} \text{ es } C\text{-compacto.}$$

DEFINICION 4. Sea $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$. Decimos que f es C-continua en α, si para todo conjunto B de $\mathbb{R}^*$ tal que $f(\alpha) \in \overset{\circ}{B}{}^C$, se tiene que $\alpha \in \widehat{f^{-1}(\overset{\circ}{B})}^C$.

PROPOSICION 8. $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ es C-continua en α si y sólo si para todo $r > 0$ (real), existe $h > 0$ (real) tal que

$$|\tau-\alpha| < h \quad \text{implica} \quad |f(\tau)-f(\alpha)| < r.$$

Demostración. $\Leftarrow$) Sea $B \subseteq \mathbb{R}^*$ tal que $f(\alpha) \in \overset{\circ}{B}{}^C$; esto quiere decir que existe un C-abierto G tal que $f(\alpha) \in G \subseteq B$. En tal caso, existe un real positivo r tal que

$$(f(\alpha)-r,\ f(\alpha)+r)^* \subseteq G \subseteq B.$$

Para este r, existe un real $h > 0$, tal que si $|\tau-\alpha| < h$, entonces $|f(\tau)-f(\alpha)| < r$. Por lo tanto, si $\tau \in (\alpha-h,\alpha+h)^*$, entonces $f(\tau) \in B$; osea, $\tau \in f^{-1}(B)$. Se sigue entonces que

$$(\alpha-h,\alpha+h)^* \subseteq f^{-1}(B),$$

y finalmente $\alpha \in \widehat{f^{-1}(B)}^{\circ C}$.

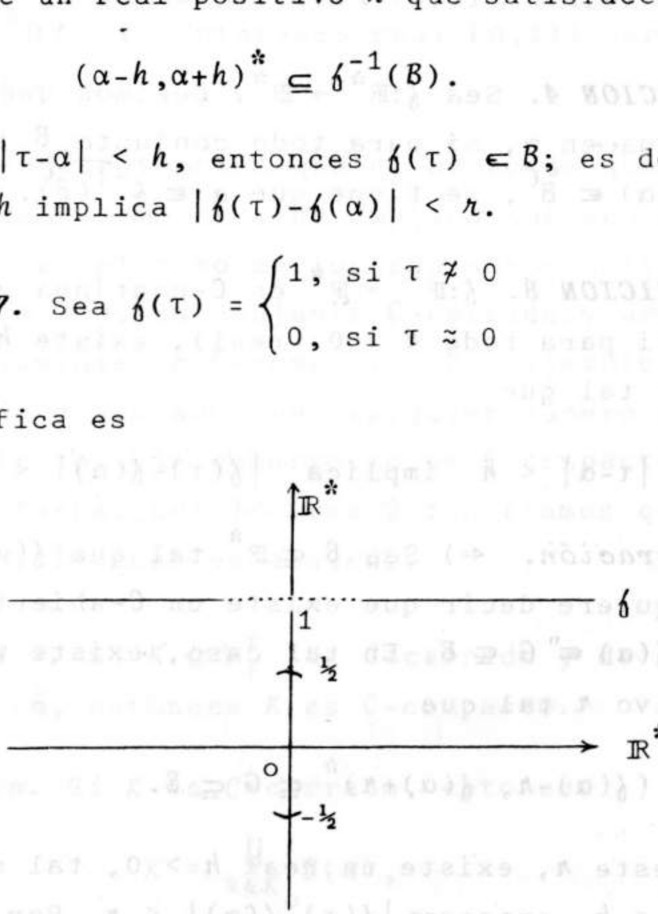
$\Rightarrow$) Sea r un real positivo, y sea $B = (f(\alpha)-r, f(\alpha)+r)^{*}$. Entonces $f(\alpha) \in \overset{\circ}{B}^{C}$. Puesto que f es C-continua, $\alpha \in \widehat{f^{-1}(\overset{\circ}{B})}^{C}$, lo cual implica la existencia de un real positivo h que satisface

$$(\alpha-h,\alpha+h)^{*} \subseteq f^{-1}(B).$$

Así, si $|\tau-\alpha| < h$, entonces $f(\tau) \in B$; es decir, $|\tau-\alpha| < h$ implica $|f(\tau)-f(\alpha)| < r$.

EJEMPLO 7. Sea $f(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{si } \tau \not\approx 0 \\ 0, & \text{si } \tau \approx 0 \end{cases}$

cuya gráfica es



Nótese que f es una función micro-continua y 0-continua en cualquier punto de $\mathbb{R}^{*}$. Pero f no es C-continua en $\tau = 0$. En efecto, si llamamos

$\mathcal{B} = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^*$, tenemos:

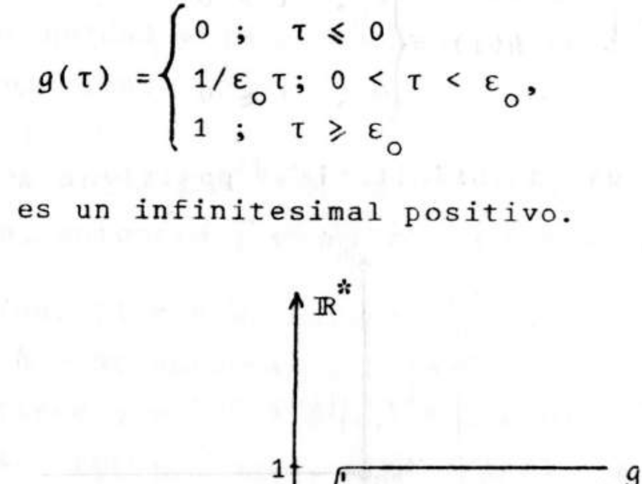
$$0 = f(0) \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{C} \quad y \quad f^{-1}(\mathcal{B}) = E(0);$$

por lo tanto, $\widehat{f^{-1}(\mathcal{B})}^{\circ C} = \emptyset$; con lo cual $0 \notin \widehat{f^{-1}(\mathcal{B})}^{\circ C}$

EJEMPLO 8. Sea

$$g(\tau) = \begin{cases} 0 \; ; & \tau \leqslant 0 \\ 1/\varepsilon_o \tau; & 0 < \tau < \varepsilon_o, \\ 1 \; ; & \tau \geqslant \varepsilon_o \end{cases}$$

donde ε_o es un infinitesimal positivo.



Obsérvese que g no es micro-continua en $\tau = 0$, aunque sí es $\mathcal{O}$-continua en este punto.

Examinemos la C-continuidad de g.

Nuevamente llamemos $\mathcal{B} = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^*$; así,

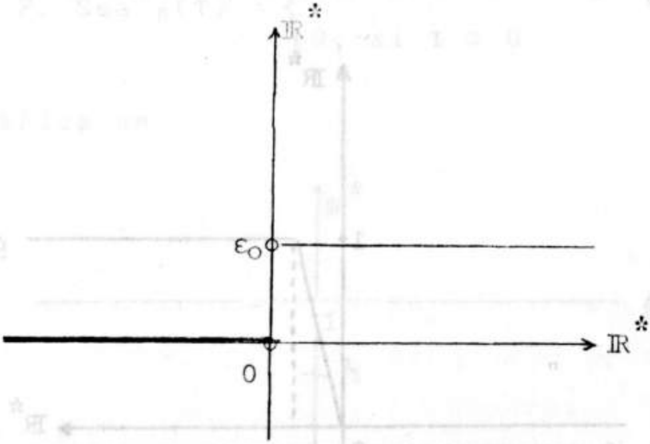
$$0 = g(0) \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{C} \quad y \quad g^{-1}(\mathcal{B}) = (-\infty, \varepsilon_o/2)^*$$

Puesto que $\widehat{g^{-1}(\overset{\circ C}{B})} = (-\infty,0)^{*} - E(0)$, tenemos que $0 \in \widehat{g^{-1}(\overset{\circ C}{B})}$. Por lo tanto, g no es C-continua en $\tau = 0$.

EJEMPLO 9. Consideremos la función $h:\mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}^{*}$, definida por

$$h(\tau) = \begin{cases} \varepsilon_{o}, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leqslant 0 \end{cases}$$

donde ε_{o} es un infinitesimal positivo.



h es una función micro-continua, aunque no es 0-continua en $\tau = 0$. Veamos que h es C-continua en $\tau = 0$.

Para todo conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^{*}$ tal que $h(0) \in \overset{\circ C}{B}$, se tiene que $h^{-1}(B) = \mathbb{R}^{*}$, ya que cualquier C-abierto que contenga a $\tau = 0$, contiene también a ε_o. Por lo tanto, h es una función C-continua en $\tau = 0$.

Los ejemplos anteriores muestran que la micro-continuidad de una función no implica la C-continuidad; sin embargo, el recíproco de esta afirmación es cierto. Obsérvese también que la micro-continuidad y la O-continuidad no tienen ninguna relación.

PROPOSICION 9. Si $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ es una función C-continua en α, entonces f es micro-continua en α.

Demostración. Si $\tau \approx \alpha$, entonces $|\tau-\alpha| < h$ para todo real $h > 0$; entonces por la C-continuidad de f, se tiene que $|f(\tau)-f(\alpha)| < r$ para todo real positivo r. Por lo tanto, $f(\tau) \approx f(\alpha)$. ▲

Hay cierto tipo de funciones de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}^*$ para las cuales se puede establecer la equivalencia de la micro-continuidad y la C-continuidad. Sin embargo, vale la pena señalar que no es posible establecer ningún tipo de relación entre la micro-continuidad y la O-continuidad de estas funciones.

DEFINICION 5. Una función $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ se dice generada, si existe una sucesión (f_n) de funciones reales tal que:

$$f(\tau) = [(f_n(x_n))_n], \text{ para } \tau = [(x_n)].$$

En tal caso escribimos $f = \text{gen}(f_n)$ o simplemente $f \in G$.

PROPOSICION 10. Sea $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ una función generada. Si f es micro-continua en α, entonces f es C-continua en α.

Demostración. Sean $B \subseteq \mathbb{R}^*$ y $f(\alpha) \in \mathring{B}^C$. Entonces existe $r > 0$ (real) tal que

$$(f(\alpha)-r, f(\alpha)+r)^* \subseteq B.$$

Llamemos $A = (f(\alpha)-r, f(\alpha)+r)^*$.
Se tiene que $f(\alpha) \in \mathring{A}^C$; y como A es un conjunto generado, entonces $f(\alpha) \in \mathring{A}^{\mathcal{B}}$.

Puesto que f es micro-continua en α, tenemos que

$$\alpha \in \widehat{f^{-1}(A)}^{\circ\mathcal{B}}$$

Pero si f es una función generada y A es un conjunto generado, entonces $f^{-1}(A)$ es también un conjunto generado, de donde podemos concluir que

$$\alpha \in \widehat{f^{-1}(A)}^{\circ C}. \quad \blacktriangle$$

Como una consideración final, puede observarse que con la topología C, $\mathbb{R}^*$ no cumple los axiomas de separación; es decir, $\mathbb{R}^*$ no es T_0, T_1 ni T_2.

Basta observar que dos puntos diferentes α y β, con $\alpha \approx \beta$ no pueden separarse por medio de C-abiertos. Sin embargo, $\mathbb{R}^*$ resulta regular y normal con esta topología; es decir, es un conjunto regular que no es T_3 y un conjunto normal que no es T_4.

PROPOSICION 11. $\mathbb{R}^*$ es normal con la topología C.

Demostración. Sean H y F C-cerrados disyuntos de $\mathbb{R}^*$.

Para cada $\tau \in H$, existe $r(\tau) > 0$ (real) tal que $(\tau - r(\tau), \tau + r(\tau))^* \subset \mathbb{R}^* - F$.

Llamemos

$$A = \bigcup_{\tau \in H} \overset{\circ C}{\widehat{(\tau - \frac{r(\tau)}{2}, \tau + \frac{r(\tau)}{2})^*}}$$

Entonces, $H \subseteq A$ y A es C-abierto.

De la misma forma, para cada $\sigma \in F$, existe $r(\sigma) > 0$ (real) tal que

$$(\sigma - r(\sigma), \sigma + r(\sigma))^* \subseteq \mathbb{R}^* - H$$

Si llamamos $B = \bigcup_{\sigma \in F} \overset{\circ C}{\widehat{(\sigma - \frac{r(\sigma)}{2}, \sigma + \frac{r(\sigma)}{2})^*}}$, tenemos que $F \subseteq B$, donde B es C-abierto.

Comprobemos que $A \cap B = \emptyset$.

Si existiera $\rho \in A \cap B$, existirían $\tau \in H$ y $\sigma \in F$ tales que

$$\rho \in \overbrace{(\tau - \frac{r(\tau)}{2}, \tau + \frac{r(\tau)}{2})^*}^{\circ C} \cap \overbrace{(\sigma - \frac{r(\sigma)}{2}, \sigma + \frac{r(\sigma)}{2})^*}^{\circ C}$$

luego $\rho \in (\tau - \frac{r(\tau)}{2}, \tau + \frac{r(\tau)}{2})^* \cap (\sigma - \frac{r(\sigma)}{2}, \sigma + \frac{r(\sigma)}{2})^*$

En tal caso,

$$|\tau-\sigma| \leqslant |\tau-\rho|+|\rho-\sigma| < \frac{r(\tau)}{2} + \frac{r(\sigma)}{2}.$$

Si $r(\tau) \leqslant r(\sigma)$; entonces, de lo anterior tendríamos que

$$|\tau-\sigma| < r(\sigma),$$

es decir, que

$$\tau \in (\sigma-r(\sigma),\sigma+r(\sigma))^* \subseteq \mathbb{R}^* - H$$

Luego, $\tau \notin H$ (absurdo!).

De manera similar, si $r(\tau) > r(\sigma)$, $\sigma \notin F$ (absurdo!). Por consiguiente $A \cap B = \emptyset$. ▲

COROLARIO. $\mathbb{R}^*$ es regular con la topología C. Si F es un C-cerrado y $\alpha \notin F$, entonces para todo $\tau \in F$, $\alpha \neq \tau$ (por la Proposición 5).

Por lo tanto, $E(\alpha)$ y F son C-cerrados disyuntos. De la proposición anterior, concluimos lo deseado.

BIBLIOGRAFIA

[1] Takeuchi, Y. y Mantilla, I., "La Micro-topología de $\mathbb{R}^*$"; Boletín de Matemáticas, Vol. XVIII Nºs.1,2,3; 1984. pp.157-169.

[2] Takeuchi, Y., *Teoría de Funciones No-estándar;* U. Nal. 1983.

[3] Takeuchi, Y., "Funciones Generadas en $\mathbb{R}^*$", Matemática. Enseñanza Universitaria, Nº 36, Sep. 1985; pp. 1-37.

[4] Takeuchi, Y., "Estructuras topológicas de $\mathbb{R}^*$"; Boletín de Matemáticas, Vol.XVIII Nºs.1, 2,3; 1984. pp.36-72.

[5] Takeuchi, Y., "Conjuntos Generados"; Matemática. Enseñanza Universitaria, Nº 35, Junio 1985. pp. 18-43.

[6] Valderrama, J., *Conjuntos Generados,* Tesis de Magister en Matemáticas, Universidad Nacional, 1985.

* *

Profesores Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional
BOGOTA. D.E. Colombia.