

## USO DEL VAIVEN EN LA OBTENCION DE ISOMORFISMOS DE CONJUNTOS ORDENADOS DENSOS Y SUPERDENSOS

José Muñoz Q.

### §0. RESUMEN.

El propósito principal del presente artículo es divulgar las pruebas directas de tres resultados fundamentales en el estudio de los números reales no estándar:

- Todos los conjuntos totalmente ordenados densos sin extremos, de cardinal  $\aleph_0$ , son isomorfos.
- Todo conjunto superdenso contiene una copia de  $(\mathbb{R}, <)$ .
- Todos los conjuntos ordenados superdensos de cardinal  $\aleph_1$ , son isomorfos.

En las demostraciones hacemos explícitas algunas ideas de Cantor (ver [1]), Hausdorff (ver [3]) y Guillman y Jerinson (ver [2]).

Utilizamos los resultados anteriores como motivación para introducir un concepto más general llamado método delvaivén, con el fin de establecer isomorfismos entre estructuras del mismo tipo de cardinal  $\aleph_0$ .

Finalmente proponemos y demostramos una generalización débil en este método para estructuras de un mismo cardinal cualquiera.

## §1. NOCIONES PRELIMINARES.

Diremos que un conjunto  $(X, <)$  es un  $\eta_0$ -conjunto si es totalmente ordenado y tal que da dos subconjuntos finitos cualesquiera  $A, B$ , de  $X$ , si  $A < B$  (o sea si todo elemento de  $A$  es menor que todo elemento de  $B$ ), entonces existe  $\kappa \in X$  tal que  $A < \{\kappa\} < B$ .

Es fácil ver que un  $\eta_0$ -conjunto es lo mismo que un conjunto totalmente ordenado *denso* (entre dos elementos distintos siempre hay otro), sin primero ni último elementos (ya que en la definición  $A$  y  $B$  pueden ser vacíos).

Llamaremos a un conjunto ordenado  $(X, <)$  *superdenso*, o un  $\eta_1$ -conjunto, si es totalmente ordenado y tal que dados subconjuntos contables arbitrarios  $A$  y  $B$  de  $X$ , con  $A < B$ , existe  $c \in X$  tal que  $A < \{c\} < B$ .

Cuando  $B = \emptyset$ , la condición implica que todo subconjunto contable  $A$  posee una cota superior estricta, que no está en  $A$ .

Análogamente, cuando  $A = \emptyset$  se deduce que cualquier conjunto contable  $B$  posee una cota inferior estricta.

**TEOREMA 1.** El conjunto  $\mathbb{R}^*$  de los reales no estándar con su orden usual es superdenso.

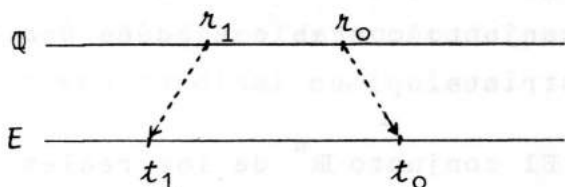
Una demostración del teorema 1 con algunos detalles omitidos, puede verse en [5], pp.26-32.

Otros ejemplos de conjuntos superdensos son el de los infinitesimales, el de los infinitesimales positivos, el de los reales no estándar infinitos positivos. No son superdensos  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ni el conjunto de los reales no estándar finitos.

## §2. ISOMORFISMOS ENTRE $\eta_0$ -CONJUNTOS.

**TEOREMA 2.**  $(\mathbb{Q}, <)$  puede sumergirse inyectivamente en cualquier  $\eta_0$ -conjunto.

*Demostración.* Sea  $(E, <)$  un  $\eta_0$ -conjunto; como  $\mathbb{Q}$  es contable infinito, sea  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una enumeración inyectiva de  $\mathbb{Q}$ ; vamos a contruir una función  $f: (\mathbb{Q}, <) \rightarrow (E, <)$  inyectiva que preserve el orden; lo haremos inductivamente:



i) Para  $r_0 \in \mathbb{Q}$ , tomemos cualquier  $t_0 \in E$  y definamos  $f_0 = \{(r_0, t_0)\}$ .

ii) Consideremos  $r_1$  en  $\mathbb{Q}$ ; si  $r_1 < r_0$ , tomemos en  $E$  un elemento  $t_1$  menor que  $t_0$  (existe puesto que  $E$  no tiene mínimo) y definamos  $f_1 = f_0 \cup \{(r_1, t_1)\}$ . Si fuese  $r_1 > r_0$ , se tomaría  $t_1 > t_0$  y se definiría  $f_1$  de la misma forma.

iii) Supongamos que ya se ha definido  $f_n$ ,

$$f_n: \{r_0, r_1, \dots, r_n\} \rightarrow \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

siendo un isomorfismo de orden del primer conjunto sobre el segundo. Consideremos  $r_{n+1}$ ; siendo

biyectiva la enumeración de  $\mathbb{Q}$ , del dominio de  $\delta_n$  queda dividido en dos conjuntos complementarios:

$$A = \{r_i \mid r_i < r_{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n\}.$$

$$B = \{r_i \mid r_i > r_{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n\}.$$

Como  $A < B$  y los dos son finitos, también  $\delta_n(A)$  y  $\delta_n(B)$  son finitos y  $\delta_n(A) < \delta_n(B)$  por ser  $\delta_n$  un isomorfismo de orden; siendo  $E$  un  $\eta_0$ -conjunto, existe al menos un elemento  $t_{n+1}$  de  $E$  con  $\delta_n(A) < \{t_{n+1}\} < \delta_n(B)$ . Definamos

$$\delta_{n+1} = \delta_n \cup \{(r_{n+1}, t_{n+1})\};$$

entonces  $\delta_{n+1}$  es un isomorfismo de orden de  $\{r_0, r_1, \dots, r_n, r_{n+1}\}$  sobre  $\{t_0, \dots, t_n, t_{n+1}\}$ .

El principio de inducción nos permite concluir que para todo  $m$  natural, existen  $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$  y  $\delta_m$  tales que  $\delta_m$  es un isomorfismo de orden de  $\{r_0, r_1, \dots, r_m\}$  sobre  $\{t_0, \dots, t_m\}$  y en forma tal que  $\delta_0 \subset \delta_1 \subset \delta_2 \subset \dots \subset \delta_n \subset \delta_{n+1} \subset \dots$

Sea  $\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ ; es fácil ver que  $\delta$  es una función inyectiva (ver p.ej. [4] p.140) y tiene por dominio  $\mathcal{D}(\delta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(\delta_n) = \mathbb{Q}$ , quedando demostrado el teorema; como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado:

**TEOREMA 3.** El conjunto  $(\mathbb{R}, <)$  de los números reales ordenados, puede sumergirse inyectivamente en cualquier conjunto superdenso.

**Demostración.** Sea  $(E, <)$  un conjunto superdenso; siendo en particular un  $\eta_0$ -conjunto, contiene una copia  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$  de  $(\mathbb{Q}, <)$ , es decir, existe  $f: (\mathbb{Q}, <) \rightarrow (E, <)$  inyectiva que preserva el orden; extendámosla a una función  $\bar{f}$  de  $(\mathbb{R}, <)$  en  $(E, <)$  que sea isomorfismo de orden: Sea  $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  y consideremos la cortadura que define a  $x$ :

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}, \quad B = \{r \in \mathbb{Q} \mid x < r\}.$$

Como  $A$  y  $B$  son contables y  $A < B$ , entonces  $f(A)$  y  $f(B)$  son contables y  $f(A) < f(B)$  por ser  $f$  un isomorfismo de orden, luego por la superdensidad de  $E$ , existe  $t$  en  $E$  tal que  $f(A) < \{t\} < f(B)$ . Si definimos  $\bar{f}(x) = t$  (y  $\bar{f}(r) = f(r)$  para  $r$  en  $\mathbb{Q}$ ), entonces  $\bar{f}$  será el isomorfismo de orden buscado.

**COROLARIO:** Si  $(E, <)$  es superdenso, entonces su cardinal,  $|E|$ , será mayor o igual que  $c$  ( $= |\mathbb{R}|$ ).

Después de las ideas anteriores que entrelazan los conceptos introducidos e ilustran una forma de construir isomorfismos no necesariamen

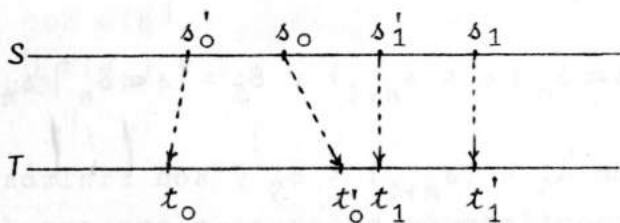
te sobreyectivos, presentamos el primer resultado fundamental, debido a Cantor (ver [1]):

**TEOREMA 4.** Todos los  $\eta_0$ -conjuntos de cardinal  $\aleph_0$  son isomorfos.

**Demostración.** Sean  $(S, <)$  y  $(T, <)$  dos  $\eta_0$ -conjuntos de cardinal  $\aleph_0$ ; debemos demostrar la existencia de un isomorfismo de orden  $f: (S, <) \rightarrow (T, <)$  sobreyectivo. Lo construiremos inductivamente usando la técnica del vaivén.

Sean  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$  enumeraciones biyectivas de  $S$  y  $T$  respectivamente.

Mostraremos que para todo  $n$  natural existen subconjuntos  $\{s'_0, s'_1, \dots, s'_n\}$  de  $S$ ,  $\{t'_0, t'_1, \dots, t'_n\}$  de  $T$ , y una función  $f_n$  que es un isomorfismo de orden de  $S_n = \{s_0, \dots, s_n, s'_0, \dots, s'_n\}$  sobre  $T_n = \{t_0, \dots, t_n, t'_0, \dots, t'_n\}$  y en forma tal que  $f_{n-1} \subseteq f_n$ .



i) Consideremos  $s_0 \in S$ ; tomemos en  $T$  un punto cualquiera y llamémoslo  $t'_0$ ; consideremos  $t_0 \in T$ ;

si  $t_0 = t'_0$ , definamos  $s'_0 = s_0$ ; si  $t_0 < t'_0$ , tomemos en  $S$  un punto  $s'_0$  con  $s'_0 < s_0$  (si  $t'_0 < t_0$ , se escoge en  $S$  un punto  $s'_0$  con  $s_0 < s'_0$ ). Sea  $\delta_0 = \{(s_0, t'_0), (s'_0, t_0)\}$ ; este es un isomorfismo de orden de  $S_0 = \{s_0, s'_0\}$  sobre  $T_0 = \{t_0, t'_0\}$  tal que  $\delta_0(s_0) = t'_0$  y  $\delta_0(s'_0) = t_0$ .

En el siguiente paso se construye  $\delta_1$ , como ilustramos en el gráfico adjunto (p.157),

$\delta_1: S_1 = \{s_0, s_1, s'_0, s'_1\} \rightarrow T_0 = \{t_0, t_1, t'_0, t'_1\}$  tal que  $\delta_0 \subset \delta_1$  y  $\delta_1(s_i) = t'_i$ ,  $\delta_1(s'_i) = t_i$  para  $i = 0, 1$ .

ii) Supongamos que se han construido  $\{s'_0, \dots, s'_n\}$ ,  $\{t'_0, \dots, t'_n\}$  y  $\delta_n: S_n = \{s_0, \dots, s_n, s'_0, \dots, s'_n\} \rightarrow T_n = \{t_0, \dots, t_n, t'_0, \dots, t'_n\}$  siendo  $\delta_n$  un isomorfismo de orden que extiende a  $\delta_{n-1}$  y tal que  $\delta_n(s_i) = t'_i$ ,  $\delta_n(s'_i) = t_i$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Consideremos  $s_{n+1}$ ; si  $s_{n+1} \in S_n$ , definimos  $t'_{n+1} = \delta_n(s_{n+1})$ . Si  $s_{n+1} \notin S_n$ , formamos

$$A_S = \{s \in S_n \mid s < s_{n+1}\} \text{ y } B_S = \{s \in S_n \mid s_{n+1} < s\}.$$

Como  $A_S < \{s_{n+1}\} < B_S$  y son finitos, al ser  $\delta_n$  un isomorfismo de orden se tiene que  $\delta_n(A_S) < \delta_n(B_S)$ ; siendo estos dos subconjuntos de  $T$  finitos y  $T$  un  $\eta_0$ -conjunto, existe  $t'_{n+1} \in T$  tal que  $\delta_n(A_S) < \{t'_{n+1}\} < \delta_n(B_S)$ .



Sea  $\bar{\delta}_n = \delta_n \cup \{(s'_{n+1}, t'_{n+1})\}$ ; es evidente que  $\bar{\delta}$  es un isomorfismo de orden que extiende a  $\delta_n$ . Consideremos ahora  $t_{n+1}$ ; si  $t_{n+1} \in T_n \cup \{t'_{n+1}\} = \bar{T}_n$ , definimos  $s'_{n+1} = \bar{\delta}_n^{-1}(t_{n+1})$ . Si  $t_{n+1} \notin \bar{T}_n$ , sean

$$A_T = \{t \in \bar{T}_n \mid t < t_{n+1}\} \text{ y } B_T = \{t \in \bar{T} \mid t_{n+1} < t\}$$

Como  $A_T < \{t_{n+1}\} < B_T$  entonces  $\bar{\delta}_n^{-1}(A_T) < \bar{\delta}_n^{-1}(B_T)$  y siendo finitos y  $S$  un  $\eta_0$ -conjunto, existe  $s'_{n+1} \in S$  tal que  $\bar{\delta}_n^{-1}(A_T) < \{s'_{n+1}\} < \bar{\delta}_n^{-1}(B_T)$ .

Definimos  $\delta_{n+1} = \bar{\delta}_n \cup \{(s'_{n+1}, t_{n+1})\}$  y según lo anterior  $\delta_{n+1}$  extiende a  $\delta_n$ .

El principio de inducción nos permite concluir que existe una sucesión creciente de funciones  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que son isomorfismos parciales (de subconjuntos de  $S$  sobre subconjuntos de  $T$ ) de orden. Sea  $\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ ; igual que en el Teorema 2,  $\delta$  es un isomorfismo de orden que extiende todas las  $\delta_n$ , con  $\mathcal{D}(\delta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(\delta_n) = S$  y  $\mathcal{R}(\delta) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}(\delta_n) = T$ .

### §3. ISOMORFISMOS ENTRE $\eta_1$ -CONJUNTOS.

La técnica empleada en la demostración, llamada del vaivén por ir pasando de  $S$  a  $T$  y de  $T$  a

Si en la construcción, puede adaptarse para construir isomorfismos entre estructuras no contables, para lo cual recordaremos algunas propiedades elementales de la teoría de conjuntos.

Un número ordinal es un conjunto transitivo (todos sus elementos son subconjuntos de él) que es bien ordenado por la pertenencia, es decir, cuyo orden " $<$ " coincide con " $\in$ ". Por ejemplo  $\emptyset$ ,  $\{\emptyset\}$ ,  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ , son números ordinales notados  $0, 1, 2$ , respectivamente. Con esta definición de número natural ( $n+1 = \{0, 1, \dots, n\}$ ) los naturales serán los ordinales finitos. Se acostumbra notar por  $\omega$  al primer ordinal infinito ( $\omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$ ) y por  $\omega_1$  al primer ordinal no contable; esto significa en particular que si  $\alpha$  es un ordinal y  $\alpha < \omega_1$  (o sea  $\alpha \in \omega_1$ ), entonces  $\alpha$  es un ordinal contable. Hay muchos ordinales contables, como  $\omega$ ,  $\omega+1$ ,  $\omega+2$ ,  $\omega+3, \dots, \omega+\omega, \dots$ . Todo ordinal  $\alpha$  tiene sucesor inmediato notado  $\alpha+1$  pero no todo ordinal tiene predecesor inmediato (por ejemplo  $\omega$  y  $\omega_1$  no lo tienen).

Un número cardinal es un ordinal que no es equipotente con ningún ordinal menor; por ejemplo  $0, 1, 2, \dots, \omega$  y  $\omega_1$  son cardinales pero  $\omega+1$ ,  $\omega+2$ ,  $\omega+\omega$ ,  $\omega_1+1$ , no lo son. Se acostumbra notar por  $\aleph_0$  y  $\aleph_1$  a  $\omega$  y  $\omega_1$  respectivamente cuando se les considera como cardinales. Así  $\aleph_0$  será el

primer cardinal infinito y  $\aleph_1$  será el segundo, el cardinal que le sigue a  $\aleph_0$ . Como  $c = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$  (ver [4] p.259) se deduce que  $c \geq \aleph_1$ . El corolario del Teorema 3 anterior significa entonces que si  $E$  es superdenso,  $|E| \geq c \geq \aleph_1$ .

Debido a que todos los números ordinales (y en particular los cardinales) son bien ordenados, en todos ellos vale el principio de inducción transfinita:

Un subconjunto  $A$  de un conjunto bien ordenado  $(X, <)$  tal que  $(\forall u \in X)(\{x \in X \mid x < u\} \subseteq A \rightarrow u \in A)$ , necesariamente es todo  $X$  ( $A = X$ ).

Es decir, si cualquiera sea  $u$ , del hecho de que todos los predécesores estrictos de  $u$  están en  $A$  se deduce que también  $u$  está en  $A$ , se concluye que  $A$  es todo  $X$ .

La demostración de este principio es muy simple (ver [4] p.166), lo usaremos en la prueba del siguiente resultado, debido a Hausdorff (ver [3]).

**TEOREMA 5.** Todos los conjuntos superdensos de cardinal  $\aleph_1$  son isomorfos.

**Demostración.** Sean  $(S, <)$  y  $(T, <)$  conjuntos superdensos de cardinal  $\aleph_1$ ; debemos demostrar que

existe una biyección entre ellos que conserva el orden.

Decir que tienen cardinal  $\aleph_1$  significa que son equipotentes con  $\omega_1$ , de manera que existen biyecciones  $h_1: \omega_1 \rightarrow S$ ,  $h_2: \omega_1 \rightarrow T$ . Si  $h_1(\alpha) = s_\alpha$  y  $h_2(\alpha) = t_\alpha$ , entonces

$$S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_\omega, s_{\omega+1}, \dots\}$$

$$= \{s_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} = \{s_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} \quad y$$

$$T = \{t_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\} = \{t_\alpha \mid \alpha < \omega_1\} = \{t_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$$

Sea  $A$  el conjunto de los  $\beta$  de  $\omega_1$  para los cuales existen familias  $\{s'_i\}_{i \leq \beta}$ ,  $\{t'_i\}_{i \leq \beta}$  y una biyección  $\delta_\beta$  de  $S_\beta = \{s_i\}_{i \leq \beta} \cup \{s'_i\}_{i \leq \beta}$  sobre  $T_\beta = \{t_i\}_{i \leq \beta} \cup \{t'_i\}_{i \leq \beta}$  tal que  $\delta_\beta(s_i) = t_i$ ,  $\delta_\beta(s'_i) = t'_i$  y  $\delta_\beta$  extiende todas las  $\delta_\gamma$  con  $\gamma < \beta$ .

Queremos demostrar que  $A = \omega_1$  para lo cual es suficiente ver que  $A$  satisface la hipótesis del principio de inducción transfinita. Supongamos entonces que para  $\alpha$  fijo cualquiera de  $\omega_1$ ,  $\{\beta \in \omega_1 \mid \beta < \alpha\} \subseteq A$  y probemos que  $\alpha \in A$ . En efecto: la hipótesis significa que  $\forall \beta < \alpha$ , tanto  $\{s'_0, s'_1, \dots, s'_\beta\}$  como  $\{t'_0, \dots, t'_\beta\}$  están definidos y se tienen funciones  $\delta_\beta$  que son isomorfismos de orden entre  $S_\beta$  y  $T_\beta$ . Sea  $\mathcal{F} = \bigcup_{\beta < \alpha} \delta_\beta$  la unión de todos estos isomorfismos; también  $\mathcal{F}$  es un iso-

morfismo de orden entre su dominio,

$$\bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta = \{s_i\}_{i < \alpha} \cup \{s'_i\}_{i < \alpha}$$

y su recorrido

$$\bigcup_{\beta < \alpha} T_\beta = \{t_i\}_{i < \alpha} \cup \{t'_i\}_{i < \alpha};$$

además  $\mathcal{V}$  extiende todas las  $\delta_\beta$  y en consecuencia  $\mathcal{V}(s_i) = t'_i$  y  $\mathcal{V}(s'_i) = t_i$ ,  $\forall i < \alpha$ . Veamos que se pueden definir  $s'_\alpha$ ,  $t'_\alpha$  y  $\delta_\alpha$  de manera que se cumplan las condiciones exigidas:

a) Si  $s_\alpha \in \{s'_i\}_{i < \alpha}$ , por ejemplo  $s_\alpha = s'_j$ , definimos  $t'_\alpha = \mathcal{V}(s'_j)$ .

b) Si  $s_\alpha \notin \{s'_i\}_{i < \alpha}$ , descomponemos  $\{s_i\}_{i < \alpha} \cup \{s'_i\}_{i < \alpha}$  en dos subconjuntos complementarios  $A_S$ ,  $B_S$  en forma tal que  $A_S < \{s_\alpha\} < B_S$ . Como  $\mathcal{V}$  es un isomorfismo de orden,  $\mathcal{V}(A_S) < \mathcal{V}(B_S)$ . Pero

$\{s_i\}_{i < \alpha} = \{s_i\}_{i \in \alpha}$  es contable ya que siendo  $\alpha \in \omega_1$ , o sea  $\alpha < \omega_1$ , y siendo  $\omega_1$  el primer ordinal no contable, se deberá tener  $\alpha$  contable.

Análogamente  $\{s'_i\}_{i < \alpha}$ ,  $\{t_i\}_{i < \alpha}$  y  $\{t'_i\}_{i < \alpha}$  son contables y en consecuencia  $\{s_i\}_{i < \alpha} \cup \{s'_i\}_{i < \alpha}$  y sus subconjuntos  $A_S$  y  $B_S$  son contables. Se deduce que  $\mathcal{V}(A_S)$  y  $\mathcal{V}(B_S)$  son contables, luego por la superdensidad de  $T$ , existe un elemento  $t'_\alpha$ , tal que  $\mathcal{V}(A_S) < \{t'_\alpha\} < \mathcal{V}(B_S)$ .

Tomemos  $\bar{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \{(s_\alpha, t'_\alpha)\}$ .

c) Si  $t_\alpha \in \{t'_i\}_{i < \alpha} \cup \{t'_\alpha\}$ , definimos  $s'_\alpha$  como  $\bar{\Psi}^{-1}(t_\alpha)$ .

d) Si  $t_\alpha \notin \{t'_i\}_{i \leq \alpha}$ , descomponemos  $\{t'_i\}_{i < \alpha} \cup \{t'_i\}_{i \leq \alpha}$  en dos subconjuntos complementarios  $A_T, B_T$ , tales que  $A_T < \{t_\alpha\} < B_T$ .

De lo dicho en b) se deduce que también  $A_T$  y  $B_T$  son contables y como  $\bar{\Psi}$  es un isomorfismo de orden,  $\bar{\Psi}^{-1}(A_T) < \bar{\Psi}^{-1}(B_T)$ . Por la superdensidad de  $S$ , existe  $s'_\alpha \in S$  tal que  $\bar{\Psi}^{-1}(A_T) < \{s'_\alpha\} < \bar{\Psi}^{-1}(B_T)$ . Definamos  $\delta_\alpha = \bar{\Psi} \cup \{(s'_\alpha, t_\alpha)\}$ ; en esta forma también  $\alpha$  está en  $A$ , luego  $A = \omega_1$ , es decir, para todo  $\alpha$  en  $\omega_1$  existen  $\delta_\alpha$  y los conjuntos  $S_\alpha, T_\alpha$  que satisfacen las condiciones pedidas.

Sea  $\delta = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \delta_\alpha$ ; entonces  $\delta$  es un isomorfismo de orden de  $\mathcal{D}(\delta) = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \mathcal{D}(\delta_\alpha) = \{s'_i\}_{i < \omega_1} = S$  sobre  $T = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} \mathcal{R}(\delta_\alpha)$  quedando demostrado lo propuesto.

**COROLARIO 1.** Bajo la hipótesis del continuo ( $c = \aleph_1$ ), todos los conjuntos superdensos de cardinal  $c$  son isomorfos.

**COROLARIO 2.** Bajo la hipótesis del continuo, todos los conjuntos superdensos de cardinal  $c$  son isomorfos a  $(\mathbb{R}^*, <)$ .

Basta ver que  $|\mathbb{R}^*| = c$ ; su demostración es simple y puede verse por ejemplo en [5], p.35.

F. Hausdorff (ver [3]) generalizó las ideas anteriores con la introducción de los  $\eta_\alpha$ -conjuntos y la prueba de los dos resultados siguientes:

- Dos  $\eta_\alpha$ -conjuntos de cardinal  $\aleph_\alpha$ , son isomorfos.
- Todo conjunto totalmente ordenado de cardinal  $\leq \aleph_\alpha$ , puede sumergirse inyectivamente en un  $\eta_\alpha$ -conjunto de cardinal  $\aleph_\alpha$ .

En una dirección similar pero más compleja, se tiene el siguiente

**TEOREMA 6.** Todos los cuerpos ordenados superdenso de cardinal  $\aleph_1$ , son isomorfos.

Su demostración también se hace por inducción transfinita, usando bases de  $\mathbb{R}$  trascendentes sobre  $\mathbb{Q}$  y densas. El lector interesado puede consultar [2].

#### §4. EL METODO DEL VAIVEN.

La situación planteada y resuelta en los teoremas 4 y 5, ha sido en líneas generales la siguiente: Se desea construir un isomorfismo de una estructura  $(S, <)$  sobre otra  $(T, <)$ , las dos

con el mismo cardinal. Para lograrlo se construye una familia  $(\delta_\beta)_{\beta < \aleph_\alpha}$  de isomorfismos parciales con las características siguientes:

a) Si  $\beta < \beta'$  entonces  $\delta_\beta \subseteq \delta_{\beta'}$ ,

b)  $\bigcup_{\beta} \mathcal{D}(\delta_\beta) = S$       y      c)  $\bigcup_{\beta} \mathcal{R}(\delta_\beta) = T$

Se concluye que en tal caso  $\bigcup_{\beta} \delta_\beta$  es el isomorfismo pedido. Vamos a tratar de plantear una situación similar cuando se poseen familias de isomorfismos parciales entre estructuras más generales.

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  estructuras del mismo tipo, es decir adecuadas para el mismo lenguaje lógico; intuitivamente esto significa que poseen la misma cantidad de relaciones unarias, binarias, ..., el mismo número de operaciones unarias, binarias, ... e igual cantidad de constantes. Si

$$\mathcal{A} = (A, <, +, \cdot, e, \dots)$$

$$\mathcal{B} = (B, <^*, +^*, \cdot^*, e^*, \dots).$$

Decimos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son los universos de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  respectivamente. Nótese que lo anterior no significa que las dos estructuras posean las mismas propiedades.

Diremos que  $\mathcal{S}$  es una subestructura de  $\mathcal{A}$  si siendo una estructura del mismo tipo que  $\mathcal{A}$ , o



sea  $\mathcal{S} = (S, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{0}, \hat{1}, \dots)$ , se tiene que a)  $S \subseteq A$ .  
 b) Las relaciones y operaciones de  $\mathcal{S}$  son las restricciones a  $S$  de las relaciones y operaciones de  $A$  y c) las constantes de  $\mathcal{S}$  son las mismas de  $A$ .

Nótese nuevamente que una propiedad que vale en  $A$ , no necesariamente es válida en  $\mathcal{S}$ , y recíprocamente. Por ejemplo  $(\{0,1,2\}; <)$  es una subestructura de  $(\mathbb{R}, <)$  pero la primera es bien ordenada y la segunda no, mientras que el orden de la segunda es denso y no así el de la primera. Análogamente, una subestructura de un grupo no necesariamente es un grupo. Llamaremos a  $f$  un isomorfismo parcial de  $A$  en  $B$  si  $f$  es un isomorfismo de una subestructura de  $A$  sobre otra de  $B$ . Lo anterior significa que  $f$  es una biyección entre los universos de las subestructuras compatible con las operaciones y relaciones, que aplica las constantes de una subestructura en las correspondientes de la otra. Por ejemplo si  $R$  es una relación enearia de la primera subestructura y  $R^*$  su correspondiente en la segunda,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  están en el universo de la primera y  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ , entonces  $(f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R^*$ .

Diremos que una familia  $\mathcal{F}$  de isomorfismos de  $A$  en  $B$  posee la propiedad del vaivén, si no

es vacía y tal que

i) Para todo  $f \in \mathcal{F}$  y toda  $a \in A$ , existe en  $\mathcal{F}$  una extensión  $\tilde{f}$  de  $f$  tal que  $a \in \mathcal{D}(\tilde{f})$ .

ii) Para toda  $f$  de  $\mathcal{F}$  y toda  $b \in B$ , existe en  $\mathcal{F}$  una extensión  $f^*$  de  $f$  tal que  $b \in \mathcal{R}(f^*)$ .

**TEOREMA 7.** Si existe una familia  $\mathcal{F}$  de isomorfismos parciales de  $A$  en  $B$  que posee la propiedad del vaivén y  $|A| = \aleph_0 = |B|$ , entonces  $A$  y  $B$  son isomorfos.

La demostración es muy similar a la del Teorema 4; se enumeran los universos de las dos estructuras y se usa la propiedad del vaivén para formar una cadena  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de isomorfismos parciales que posea las propiedades a), b) y c) descritas al comienzo del §4. No la detallaremos para no repetir argumentos.

Si observamos cuidadosamente la demostración del Teorema 5, nos damos cuenta de que el paso crucial es el hecho que la unión de la cadena  $(f_\beta)_{\beta < \alpha}$  con  $\alpha < \omega_1$ , es aún un isomorfismo de orden que pertenece a la familia  $\mathcal{F}$  de isomorfismos parciales. Lo mismo sucede en las generalizaciones establecidas por Hausdorff para los  $\eta_\alpha$ -conjuntos. Para estructuras arbitrarias, no siempre se cumple la mencionada propiedad, de manera que si deseamos generalizar el Teorema 7,

es necesario adicionarla:

**TEOREMA 8.** Sean  $A$  y  $B$  estructuras del mismo tipo con  $|A| = \aleph_\alpha = |B|$ ; si existe una familia  $\mathcal{F}$  de isomorfismos parciales de  $A$  en  $B$  que posee la propiedad del vaiven y tal que la unión de toda cadena  $(\delta_\beta)_{\beta \in L}$  con  $|L| < \aleph_\alpha$ , también está en  $\mathcal{F}$ , entonces  $A$  es isomorfa a  $B$ .

*Demostración.* Sean  $h_1: \aleph_\alpha \rightarrow A$  y  $h_2: \aleph_\alpha \rightarrow B$  enumeraciones biyectivas de  $A$  y  $B$ ; si notamos por  $a_\beta$  a  $h_1(\beta)$  y por  $b_\beta$  a  $h_2(\beta)$ , tenemos:

$$A = \{a_\beta \mid \beta \in \aleph_\alpha\} = \{a_\beta\}_{\beta \in \aleph_\alpha} = \{a_\beta\}_{\beta < \aleph_\alpha}$$

y análogamente,

$$B = \{b_\beta\}_{\beta \in \aleph_\alpha} = \{b_\beta\}_{\beta < \aleph_\alpha}.$$

Usando argumentos conocidos, se tiene que para  $a_0 \in A$  y cualquier  $g \in \mathcal{F}$ , existe  $\bar{g} \in \mathcal{F}$  que extiende a  $g$  y  $a_0$  pertenece a su dominio; para  $\bar{g}$  y  $b_0$ , existe por ii) un isomorfismo parcial  $\delta_0$  que extiende a  $\bar{g}$  con  $b_0 \in \mathcal{R}(\delta_0)$ . La idea es continuar indefinidamente el proceso para obtener una cadena  $(\delta_\beta)_{\beta < \aleph_\alpha}$  de extensiones. Esto se puede hacer rigurosamente usando inducción transfinita.

Como  $\aleph_\alpha$  es un cardinal, es decir un ordi-

nal no equipotente con un ordinal menor, es bien ordenado, siendo " $<$ " precisamente " $\in$ ". Vamos a probar que el subconjunto de  $\aleph_\alpha$  de los ordinales  $\beta$  para los cuales está definida  $\delta_\beta$  con  $a_\beta \in \mathcal{D}(\delta_\beta)$ ,  $b_\beta \in \mathcal{R}(\delta_\beta)$  y  $\delta_\nu \subseteq \delta_\beta$  para todo  $\nu < \beta$ , es precisamente todo  $\aleph_\alpha$ .

Supongamos que para todo  $j < \beta$  está definida  $\delta_j$  con  $\delta_j \in \mathcal{F}$  y tal que  $a_j \in \mathcal{D}(\delta_j)$ ,  $b_j \in \mathcal{R}(\delta_j)$  y  $\forall i < j$  ( $\delta_i \subseteq \delta_j$ ). Demostremos que es posible definir  $\delta_\beta$  con las mismas características.

Sea  $\mathcal{Y} = \bigcup_{j < \beta} \delta_j$ ; evidentemente  $\mathcal{Y}$  extiende todas las  $\delta_j$  y puede comprobarse que es compatible con las operaciones, relaciones y constantes de su dominio; por ejemplo si  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{D}(\mathcal{Y})$  y  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{R}$  (siendo  $\mathcal{R}$  una relación enaria), entonces  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \bigcup_{j < \beta} \mathcal{D}(\delta_j)$  y en consecuencia existen en  $\mathcal{F}$  isomorfismos parciales  $\delta_{j_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , tales que  $a_1 \in \mathcal{D}(\delta_{j_1}), a_2 \in \mathcal{D}(\delta_{j_2}), \dots, a_n \in \mathcal{D}(\delta_{j_n})$ ; si  $m$  es el máximo de  $j_1, j_2, \dots, j_n$ , entonces  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{D}(\delta_m)$  ya que  $\delta_m$  es una de las  $\delta_{j_k}$  que extiende a las demás. En consecuencia  $(\delta_m(a_1), \delta_m(a_2), \dots, \delta_m(a_n)) \in \mathcal{R}^*$  por ser  $\delta_m$  un isomorfismo parcial, o sea  $(\mathcal{Y}(a_1), \mathcal{Y}(a_2), \dots, \mathcal{Y}(a_n)) \in \mathcal{R}^*$  puesto que  $\mathcal{Y}$  extiende a  $\delta_m$ .

Sin embargo, el solo hecho de ser  $\mathcal{Y}$  un isomorfismo parcial, no nos garantiza que pertenezca a  $\mathcal{F}$ , por lo cual la necesidad de la hipótesis adicional.

Estando  $\mathcal{Y}$  en  $\mathcal{F}$ , para  $a_\beta$  existe por i) una función  $\bar{\mathcal{Y}}$  que extiende a  $\mathcal{Y}$  y tal que  $a_\beta \in \mathcal{D}(\bar{\mathcal{Y}})$ ; por ii) existe para  $b_\beta$  una función  $\delta_\beta$  en  $\mathcal{F}$  que extiende a  $\bar{\mathcal{Y}}$  con  $b_\beta$  en su recorrido. El principio de inducción transfinita nos permite concluir que existe una cadena de extensiones  $(\delta_\beta)_{\beta < \aleph_\alpha}$  con las propiedades requeridas. Si  $\delta = \bigcup_{\beta < \aleph_\alpha} \delta_\beta$ , al igual que antes  $\delta \in \mathcal{F}$  y evidentemente su dominio es todo  $\{a_\beta\}_{\beta < \aleph_\alpha}$  o sea  $A$  y su recorrido  $B$ , con lo cual se completa la demostración del teorema.

\*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Cantor, G., *Contributions of the founding of the Theory of transfinite numbers*, Dover P.C., 1915, New York (Traducción del original en alemán publicado en 1895).
- [2] Gillman, L. and Jerinson, M., *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton, 1960.

- [3] Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914 (Reprinted by Chelsea P.C., New York, 1949).
- [4] Muñoz, J.M., *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, Univ. Nal. de Col., Bogotá, 1983.
- [5] Takeuchi, Y., "Análisis no estándar I, Conjuntos generados", *Matemática, enseñanza universitaria*. N° 35, Junio de 1985.

\* \*

Departamento de Matemáticas y Estadística  
Universidad Nacional de Colombia.  
BOGOTA. D.E.