Boletín de Matemáticas
Vol. XIX, Nº 2 (1985)

RELATIVIZACION DE FORMULAS Y CONSISTENCIA

José M. Muñoz Q.

Resumen. El presente artículo tiene como fin mostrar que el problema de la consistencia de una sentencia, relativamente a la consistencia de otro conjunto de sentencias, puede resolverse en muchos casos mediante un procedimiento puramente sintáctico, aceptado universalmente, independiente de modelos e interpretaciones, y el cual tiene lugar dentro de prácticamente cualquier sistema de deducción formal de un cálculo de predicados. Las ideas fundamentales descansan en la propiedad de la preservación de la deducción formal por la relativización, cuya demostración, bastante técnica pero elemental, ha sido desarrollada en detalle por el autor.

Supongamos dado un cálculo de predicados de primer orden para cuya teoría de deducción formal, se ha tomado modus ponens (de p y $p \rightarrow q$ se deduce q) como única regla primativa de deducción, junto con la axiomatización siguiente:

Un axioma del cálculo de predicados es cualquier fórmula $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \theta$ (incluyendo $n = 0$), en donde θ tiene una de las formas siguientes:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

2. $(\varphi \to (\psi \to \rho)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \rho))$

3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

4. $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$

5. $\forall x \varphi(x, y_1, \ldots, y_m) \to \varphi(t, y_1, \ldots, y_m)$ siento t libre en $\varphi(t, y_1, \ldots, y_m)$.

6. $\varphi \to \forall x \varphi$ si x no ocurre libre en φ.

7. $t = t$ siento t un término cualquiera.

8. $t_1 = t_2 \to (\varphi(\ldots t_1 \ldots) \to \varphi(\ldots t_2 \ldots))$ siendo t_1 libre en $\varphi(\ldots t_1 \ldots)$, t_2 libre en $\varphi(\ldots t_2 \ldots)$, y entendiéndose que $\varphi(\ldots t_2 \ldots)$ se obtiene sustituyendo por t_2 en $\varphi(\ldots t_1 \ldots)$ todas, algunas o ninguna de las ocurrencias de t_1 en $\varphi(\ldots t_1 \ldots)$.

Se prueba que los axiomas 1, 2 y 3 junto con modus ponens constituyen un sistema completo de deducción en el cálculo proposicional; en consecuencia, todas las tautologías son deducibles (ver. p.ej. [1]).

También en el sistema propuesto son deducibles como reglas derivadas, entre otras, el teorema de la deducción (Si de Γ y α se deduce β, entonces de Γ solamente se deduce $\alpha \to \beta$; la simbolizaremos si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$), la prueba por contradicción (si $\Gamma, \neg\alpha \vdash \beta$ y $\Gamma, \neg\alpha \vdash \neg\beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$) y la regla de generalización universal (si $\Gamma \vdash \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ y x no ocurre libre en ninguna fórmula de Γ, entonces $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$). Se entiende que una deducción formal de α con premisas en Γ es una sucesión finita $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de fórmulas tal que φ_n es α y toda fórmula φ_i es un axioma lógico, o una fórmula de Γ, o se deduce por modus ponens de dos fórmulas anteriores de la sucesión.

Un conjunto de fórmulas Σ es consistente si no existe una fórmula φ tal que $\Sigma \vdash \varphi$ y $\Sigma \vdash \neg\varphi$. Es la propiedad más deseable en un conjunto de premisas, ya que de no ser consistente, *toda* fórmula y su negación serían deducibles.

De los teoremas de completitud y validez se obtiene como corolario que un conjunto A de fórmulas es consistente si y sólo si tiene un modelo, es decir, si y sólo si existe una estructura adecuada que verifique todas las fórmulas de A. En muchos casos es realmente difícil comprobar que la estructura verifica las fórmulas de A, sobre todo cuando éstas implican que el modelo sea infinito. En tales circunstancias se acostumbra atacar el problema poco a poco: Si un subconjunto $\mathcal{B}$ de A es consistente y $\varphi \in A-\mathcal{B}$, ¿es $\mathcal{B} \cup \{\varphi\}$ consistente? Esta pregunta equivaldría en términos de modelos a la siguiente: Si existe un modelo para $\mathcal{B}$, ¿se puede construir (a partir de él) un modelo de $\mathcal{B} \cup \{\varphi\}$?

Cuando se trabaja en teoría de conjuntos, las pruebas de consistencia utilizando modelos son particularmente susceptibles de contener errores, debido al uso inconsciente de propiedades intuitivas de los conjuntos que manejamos, propiedades posiblemente no deducibles de las premisas. En tales casos es más conveniente (y convincente) hallar una fórmula $C(x)$ con una única variable libre x que describa la clase o el conjunto que se desea (es decir, que dicha clase esté formada por los objetos del universo que verifican la condición $C(x)$) y usando dicha fórmula, dar una prueba puramente sintáctica, sin recurrir a modelos, significados ni interpretaciones.

A continuación, como lo sugiere Krivine en [2], p.44, vamos a precisar esta idea y a demostrar las propiedades en las cuales se fundamenta.

Generalmente consideramos que fórmulas como $\forall x \varphi(x)$ y $\exists x \varphi(x)$ expresan propiedades de todo el universo; si queremos que las afirmaciones expresen propiedades de los objetos de una parte c del universo, generalmente "localizamos" los cuantificadores: $(\forall x \in c)(\varphi(x))$, $(\exists x \in c)(\varphi(x))$. Tales expresiones son abreviaciones de $\forall x(x \in c \rightarrow \varphi(x))$ y de $\exists x(x \in c \wedge \varphi(x))$, respectivamente. La *relativización* de una fórmula es simplemente una generalización del concepto de localización: Si $c(x)$ es una fórmula del lenguaje con x como única variable libre (que describe la clase c), definimos inductivamente "φ relativizada a $c(x)$", notada φ^c, así:

a) Si φ es una fórmula atómica, φ^c es la misma φ.

b) Si φ es $(\neg\psi)$, entonces φ^c es $\neg(\psi^c)$.

c) Las relativizaciones a c de $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ $\varphi \leftrightarrow \psi$ son respectivamente $\varphi^c \vee \psi^c$, $\varphi^c \wedge \psi^c$, $\varphi^c \rightarrow \psi^c$ y $\varphi^c \leftrightarrow \psi^c$.

d) Si φ es $\forall x\,\psi(x)$, entonces φ^c es $\forall x(c(x) \rightarrow \psi^c(x))$ y en consecuencia, la relativización a c de

$$\exists x\,\psi(x) \text{ es } \exists x(c(x) \wedge \psi^c(x)).$$

Cuando la clase determinada por $c(x)$ es un conjunto c, $c(x) \leftrightarrow x \in c$ y la relativización correspondería simplemente al caso de localización de cuantificadores.

LEMA 1. La relativización de un axioma lógico de los tipos 1, 2 o 3, dados anteriormente, es nuevamente un axioma del mismo tipo.

Demostración. $[\varphi \to (\psi \to \varphi)]^c$ es $\varphi^c \to (\psi \to \varphi)^c$, o sea $\varphi^c \to (\psi^c \to \varphi^c)$, que es del mismo tipo 1. Lo mismo se tiene con los axiomas 2 y 3.

LEMA 2. La relativización de un axioma lógico de los tipos 4, 6, 7 y 8 es un teorema deducible sin premisas.

Demostración. a) Los axiomas de la forma 4,

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to ((\forall x\, \varphi) \to (\forall x\, \psi))$$

tienen como relativización

$$\forall x(c(x) \to (\varphi^c \to \psi^c)) \to [\forall x(c(x) \to \varphi^c) \to \forall x(c(x) \to \psi^c)].$$

Es conocido que

$$[p \to (q \to \gamma)] \to [(p \to q) \to (p \to \gamma)]$$

es una tautología, luego

$$[c(x) \to (\varphi^c \to \psi^c)] \to [(c(x) \to \varphi^c) \to (c(x) \to \psi^c)]$$

es deducible sin premisas y por la regla de generalización universal, también

$$\forall x\{[c(x) \to (\varphi^c \to \psi^c)] \to [(c(x) \to \varphi^c) \to (c(x) \to \psi^c)]\}$$

es deducible sin premisas. Usando el mismo axioma 4 y modus ponens, se deduce sin premisas

$$\forall x[c(x) \rightarrow (\varphi^c \rightarrow \psi^c)] \rightarrow \forall x[(c(x) \rightarrow \varphi^c) \rightarrow (c(x) \rightarrow \psi^c)]$$

y usando el axioma 4, modus ponens y también el teorema de la deducción, deducimos sin premisas

$$\forall x[c(x) \rightarrow (\varphi^c \rightarrow \psi^c)] \rightarrow [\forall x(c(x) \rightarrow \varphi^c) \rightarrow \forall x(c(x) \rightarrow \psi^c)]$$

como se quería demostrar.

b) El axioma 6, $\varphi \rightarrow \forall x\varphi$ si x no aparece libre en φ, tiene como relativización $\varphi^c \rightarrow \forall x(c(x) \rightarrow \varphi^c)$. Veamos que ésta es deducible sin premisas; por el axioma 1 se tiene

$$\vdash \varphi^c \rightarrow (c(x) \rightarrow \varphi^c)$$

y por el teorema de generalización universal,

$$\vdash \forall x[\varphi^c \rightarrow (c(x) \rightarrow \varphi^c)].$$

Pero, como x no aparece libre en φ, tampoco aparece libre en φ^c. Luego por una conocida propiedad del cuantificador universal demostrable en el sistema de axiomas dado,

$$\vdash \varphi^c \rightarrow \forall x(c(x) \rightarrow \varphi^c).$$

c) La relativización de $t = t$ es ella misma, por ser una fórmula atómica.

La relativización de un axioma del tipo 8 es

$$t_1 = t_2 \rightarrow (\varphi^c(\ldots t_1 \ldots) \rightarrow \varphi^c(\ldots t_2 \ldots))$$

que resulta ser un caso del mismo axioma, luego es deducible sin premisas.

LEMA 3. Si t no es ligada en $\varphi(t, y_1, \ldots, y_n)$ ni en $c(t)$, entonces

$$c(t) \vdash [\forall x(c(x) \rightarrow \varphi^c(x, y_1, \ldots, y_n)) \rightarrow \varphi^c(t, y_1, \ldots, y_n)]$$

Lo anterior significa que la relativización del axioma 5 es deducible con la premisa $c(t)$, lo cual es natural, puesto que al trabajarse dentro del sub-universo descrito por $c(x)$, necesariamente el objeto t deberá pertenecer a dicho sub-universo.

Demostración. Probar lo propuesto equivale, según el teorema de la deducción, a demostrar que

$$c(t), \forall x(c(x) \rightarrow \varphi^c(x, y_1, \ldots, y_n)) \vdash \varphi^c(t, y_1, \ldots, y_n)$$

En efecto:

1. $\forall x(c(x) \rightarrow \varphi^c(x, y_1, \ldots, y_n))$ (premisa)
2. $\forall x(c(x) \rightarrow \varphi^c(x, y_1, \ldots, y_n)) \rightarrow (c(t) \rightarrow \varphi^c(t, y_1, \ldots, y_n))$ (Ax. 5)
3. $c(t) \rightarrow \varphi^c(t, y_1, \ldots, y_n)$ (modus ponens aplicado a 1,2)
4. $c(t)$ (premisa)
5. $\varphi^c(t, y_1, \ldots, y_n)$.

LEMA 4. Si $\varphi(x)$ es un axioma, entonces

$$\vdash (\forall x\ \varphi(x))^c.$$

Según lo visto en los tres lemas anteriores, si $\varphi(x)$ es un axioma, $\varphi^c(x)$ es deducible sin premisas o a lo más con premisa $c(x)$, luego $c(x) \vdash \varphi^c(x)$ y por el teorema de la deducción $\vdash (c(x) \to \varphi^c(x))$ y como x no figura libre en las premisas, podemos usar el teorema de generalización universal, obteniéndose $\vdash \forall x(c(x) \to \varphi^c(x))$ que es el resultado pedido.

Si Γ es un conjunto de fórmulas, designamos por Γ^c al conjunto $\{\varphi^c \mid \varphi \in \Gamma\}$ de fórmulas de Γ relativizadas a $c(x)$.

TEOREMA 1. Supongamos que tanto las variables libres de las fórmulas de Γ como las de ρ pertenecen al conjunto $\{y_1, \ldots, y_n\}$; si $\Gamma \vdash \rho$, entonces $c(y_1), \ldots, c(y_n), \Gamma^c \vdash \rho^c$.

COROLARIO. Cuando tanto ρ como las fórmulas de Γ son *sentencias* (fórmulas sin variables libres), se tiene que

$$\text{Si } \Gamma \vdash \rho, \text{ entonces } \Gamma^c \vdash \rho^c.$$

Este resultado puede sintetizarse diciendo que la *relativización preserva la deducción formal*.

El corolario se obtiene inmediatamente del teorema, de manera que probemos el teorema:

Sea $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ una deducción de ρ (ó sea $\varphi_m = \rho$) con premisas en Γ. Demostremos por inducción que $c(y_1), \ldots, c(y_n), \Gamma^c \vdash \varphi_i^c$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

a) φ_1 es un axioma o $\varphi_1 \in \Gamma$; en el primer caso los lemas anteriores permiten concluir $c(y_1), c(y_2), \ldots, c(y_n) \vdash \varphi_1^c$ y en el segundo $\Gamma^c \vdash \varphi_1^c$ trivialmente; en cualquier caso,

$$c(y_1), \ldots, c(y_n),\ \Gamma^c \vdash \varphi_1^c.$$

b) Supongamos que ya se ha probado para $\varphi_1^c, \varphi_2^c, \ldots, \varphi_{i-1}^c$ y probémoslo para φ_i^c. Se presentan tres casos: i) φ_i es un axioma, ii) $\varphi_i \in \Gamma$ ó iii) φ_i se dedujo por modus ponens de fórmulas anteriores φ_ℓ y φ_s ($= \varphi_\ell \to \varphi_i$) de la sucesión.

En los dos primeros casos se obtiene la conclusión de manera idéntica que en a). En el tercer caso, como $\ell, s < i$, por hipótesis de inducción se tiene que $c(y_1), \ldots, c(y_n), \Gamma^c \vdash \varphi_\ell^c$ y que $c(y_1), \ldots, c(y_n), \Gamma^c \vdash (\varphi_\ell \to \varphi_i)^c$.

Siendo $(\varphi_\ell \to \varphi_i)^c$ igual a $\varphi_\ell^c \to \varphi_i^c$, una aplicación de modus ponens nos permite obtener φ_i^c, con lo cual queda demostrado el teorema.

Veamos ahora la aplicación más importante del resultado anterior:

TEOREMA 2. Sea $\Gamma \cup \{\rho\}$ un conjunto de sentencias y sea $c(x)$ cualquier fórmula del lenguaje con x como única variable libre y tal que $\Gamma \vdash \Gamma^c$ y $\Gamma \vdash \rho^c$; si Γ es consistente, entonces $\Gamma \cup \{\rho\}$ también es consistente.

Demostración. Si $\Gamma \cup \{\rho\}$ no fuese consistente, existiría una fórmula φ tal que

$$\Gamma \cup \{\rho\} \vdash \varphi \wedge (\neg \varphi);$$

entonces existe una sentencia ψ tal que

$$\Gamma \cup \{\rho\} \vdash \psi \wedge (\neg \psi) ;$$

por el corolario del teorema 1, $\Gamma^c \cup \{\rho^c\} \vdash (\psi \wedge (\neg \psi))^c$ o sea que $\Gamma^c \cup \{\rho^c\} \vdash \psi^c \wedge (\neg \psi^c)$ y como $\Gamma \vdash \Gamma^c \cup \{\rho^c\}$, entonces $\Gamma \vdash \psi^c \wedge (\neg (\psi^c))$, contrario a la hipótesis de consistencia de Γ.

Como se dijo antes, este teorema permite probar la consistencia de conjuntos de axiomas cada vez mayores. Por ejemplo, K. Gödel introdujo en 1939 (ver [2]) la clase de conjuntos construibles, demostrando que ella puede describirse por una condición $c(x)$ que cumple las exigencias hechas en la teoría de la relativización. Probó además que $ZF \vdash ZF^c \cup \{AC^c\}$, de lo cual el teore ma 2 nos permite concluir que si ZF es consistente, también lo será $ZF \cup \{AC\}$.

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Caicedo, X., "Elementos de lógica y calculabilidad", Univ. de los Andes, 1979, Bogotá.

[2] Gödel, K., "Consistency-proof for the generalized continuum hypothesis". Proc. Natl. Acad. Sci. USA., 25, 1939.

[3] Krivine, J-L., "Introduction to axiomatic set theory". D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1971.

* *

Depto. de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia.
BOGOTA. D.E.