Boletín de Matemáticas
Vol. XVIII, N° 1,2,3, (1984) **APUNTES**

SOLUCION A UN PROBLEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES POR EL METODO DE FOURIER

Jaime Gómez G.

Una ecuación que contiene una o más derivadas parciales de una función de dos o más variables independientes se llama *ecuación diferencial parcial*. Se llama *orden* de la ecuación al orden de la derivada superior.

Una ecuación diferencial parcial es *lineal* si es de primer grado en la variable dependiente y sus derivadas parciales. Si cada término de una ecuación tal contiene la variable dependiente, o bien, una de sus derivadas, se dice que la ecuación es homogénea; en caso contrario se dice que es no-homogénea. Por ejemplo

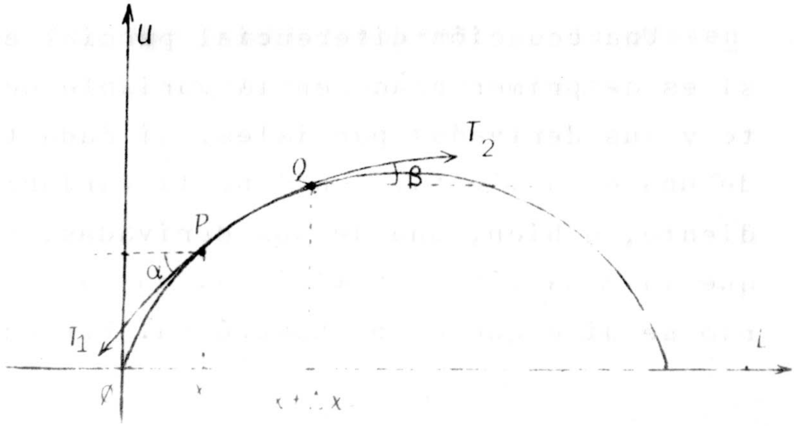
$u_{tt} - u_{xx} = 0$ es el caso de una ecuación unidimensional de onda, la cual es lineal homogénea de segundo orden.

DEDUCCION DE LA ECUACION.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ; \quad c^2 = T/\rho$$

Supongamos que una cuerda se estira hasta la longitud L, y a continuación se fija en los puntos extremos. Supóngase que la cuerda se deforma transversalmente y depués de un cierto instante, digamos $T = \emptyset$, se suelta y se deja vibrar.

El problema es determinar las vibraciones de la cuerda, es decir, hallar su deformación $U(x,t)$ en cualquier punto x, y en cualquier instante $t > \emptyset$.



Realizemos las siguientes suposiciones.

1. La masa por unidad de longitud es constante (cuerda homogénea). La cuerda no ofrece resistencia alguna a la deformación transversal.

2. La tensión causada al estirar la cuerda antes de fijarla en los puntos extremos es tan grande que la acción de la fuerza gravitacional sobre la cuerda puede despreciarse.

3. El movimiento de la cuerda es una pequeña vibración transversal en un plano vertical, es decir, cada partícula de la cuerda se mueve estrictamente en sentido vertical y la deformación y la pendiente en cualquier punto de la cuerda son pequeños en valor absoluto.

Para obtener la ecuación diferencial, se analizan las fuerzas que actúan sobre una porción pequeña de la cuerda. Como la cuerda no ofrece resistencia a la deformación transversal, la tensión es tangencial a la curva de la cuerda en cada punto. Sean T_1 y T_2 las tensiones en los puntos extremos P y Q de esa porción.

Supuesto que no hay movimiento en la dirección horizontal, las componentes horizonta-

... de la tensión deben ser constantes. De donde:

(*) $$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{constante}.$$

En la dirección vertical se tienen dos fuerzas, a saber, las componentes verticales $-T_1 \operatorname{sen}\alpha$; $T_2 \operatorname{sen}\beta$ de T_1 y T_2; aquí aparece el signo menos porque esa componente en el punto P está dirigida hacia abajo.

Por la segunda ley de Newton, la resultante de esas dos fuerzas es igual a la masa $\rho\Delta x$ de la porción multiplicada por la aceleración $\partial^2 u/\partial t^2$ evaluada en algún punto entre x y $x+\Delta x$; aquí ρ es la masa de la cuerda no desviada por longitud unitaria y Δx es la longitud de la cuerda no desviada. De aquí que:

$$T_2 \operatorname{sen}\beta - T_1 \operatorname{sen}\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

Aplicando (*) se obtiene:

$$\frac{T_2 \operatorname{sen}\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \operatorname{sen}\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

...mo $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ son las pendientes de la curva de la cuerda en x y $x+\Delta x$,

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad \text{y} \quad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}.$$

Aquí tienen que escribirse derivadas parciales porque u también depende de t.

Dividiendo entre Δx,

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Si se hace tender Δx hacia cero se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

CALCULO DE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL Y DE CONTORNO USANDO EL METODO DE FOURIER.

$u_{tt} - u_{xx} = \emptyset$ para $\emptyset < x < \pi$ y $t > \emptyset$;

$u(\emptyset, t) = u(\pi, t) = \emptyset$ para $t > 0$ (frontera)

$u(x, \emptyset) = \pi/2 - |\pi/2 - x| = \varphi(x)$ (iniciales)

$u_t(x, \emptyset) = \emptyset = \varphi_1(x)$ para $\emptyset \leq x \leq \pi$ (vibración de la cuerda pulsada en el centro).

SOLUCION. Supongamos la solución de la forma

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t),$$

donde X, T son funciones de valor real, que satisfacen:

$U(0,t) = U(\pi,t) = 0$ para $t > 0$.

$U(x, 0) = \pi/2 - |\pi/2-x| = \varphi(x)$

$U_t(x,0) = 0 = \varphi_1(x)$ para $0 \leq x \leq \pi$.

Luego

$$U_t = X(x)\cdot T'(t); \quad U_x = X'(x)\cdot T(t)$$
$$U_{tt} = X(x)\cdot T''(t) \quad y \quad U_{xx} = X''(x)\cdot T(t).$$

Reemplazando en la ecuación dada tenemos:

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

y

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} .$$

El primer miembro sólo depende de t, y el segundo sólo depende de x, luego ambos términos son iguales a una constante real puesto que tanto X como T son de valor real.

a) Vemos que la constante no puede ser cero, pues se tendría: $X''(x) = \emptyset$ que tiene solución:

$$X(x) = xg(t)+h(t);$$

como se tiene que $X(\emptyset) = \emptyset$ porque $U(x,t) = X(x)T(t)$, y $U(\emptyset,t) = X(\emptyset)T(t) = \emptyset$ y buscamos una solución no trivial. Obtenemos:

$$x(0) = h(t) = 0 \quad \text{y así } h \equiv 0.$$

Además se tiene

$$x(\pi) = 0 = \pi g(t) = 0$$

y así $g(t) \equiv 0$. Por lo tanto $X \equiv 0$ y $U \equiv 0$.

b) La constante no puede ser positiva (k^2) pues obtendríamos:

$$X''(x) - k^2X(x) = 0$$

y

$$T''(t) - k^2T(t) = 0$$

y la ecuación

$$X''\{x\} - k^2X(x) = 0$$

tiene por solución

$$X(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}$$

Por tanto, $X(0) = C+D = 0$, es decir $C = -D$.

$$X(\pi) = Ce^{k\pi}+De^{-k\pi} = C(e^{k\pi}-e^{-k\pi}) = 0.$$

Como $\operatorname{senh} z = (e^z-e^{-z})/2$, $2\operatorname{senh} z = e^z-e^{-z}$.

Dado que $2C\operatorname{senh} k\pi = 0$ y como $k \neq 0$, $\operatorname{senh} k\pi \neq 0$. Luego $C = 0$ y así $D = 0$. De esta forma $X \equiv 0$ y $U \equiv 0$. Luego se debe tener:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2.$$

Obtenemos:

$$X''(x) + k^2X(x) = \emptyset$$
$$T''(t) + k^2T(t) = \emptyset$$

que tiene por solución

$$X(x) = C\cos kx + D\operatorname{sen} kx$$
$$T(t) = A\cos kt + B\operatorname{sen} kt$$

con A,B,C,D constantes arbitrarias; luego:

$$U(x,t) = (C\cos kx + D\operatorname{sen} kx)(A\cos kt + B\operatorname{sen} kt).$$

Debemos determinar las constantes que satisfagan las condiciones dadas:

$$U(\emptyset,t) = C(A\cos kt + B\operatorname{sen} kt) = \emptyset$$
$$C = \emptyset$$
$$U(\pi,t) = D\operatorname{sen} k\pi(A\cos kt + \operatorname{sen} kt) = \emptyset.$$

D debe ser distinta de cero.

Se cumple que:

$\operatorname{sen} k\pi = \emptyset$, es decir $k\pi = \pm n\pi$; $k = \pm n$.

Podemos elegir $D = 1$ pues

$$U(x,t) = \operatorname{sen} kx(Ax\cos kt + B\operatorname{sen} kt).$$

Aparecen constantes arbitrarias y conseguiremos un número infinito de soluciones de la forma

$$U_n = \operatorname{sen} nx(A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt)$$

y proponemos la solución:

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \operatorname{sen} nt)\operatorname{sen} nx$$

Debemos hallar A_n y B_n tales que satisfagan las condiciones iniciales del problema. Calculamos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-nA_n \operatorname{sen} nt + nB_n \cos nt)\operatorname{sen} nx.$$

Debe cumplirse que $U_t(x,\emptyset) = \emptyset$.

$$U_t(x,\emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} nB_n \operatorname{sen} nx = \emptyset = \varphi_1(x),$$

y que

$$U(x,\emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx = \pi/2 - |\pi/2 - x| = \varphi(x).$$

De la teoría de las series de Fourier se obtiene:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int^{\pi} \varphi(z)\operatorname{sen} nz\,dz$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi}{2} - |\pi/2 - z| \operatorname{sen} nz\,dz.$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \varphi_1(z)\,\mathrm{sen}\,nz\,dz = 0.$$

ya que $\varphi_1(z) = \emptyset$. Basta por lo tanto calcular los A_n. Ahora bien,

$$A_n = \frac{4}{\pi n^2}\,\mathrm{sen}(n\pi/2).$$

En efecto:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left|\frac{\pi}{2} - z\right|\right)\mathrm{sen}\,nz\,dz;\ \emptyset < z < \pi$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} z\,\mathrm{sen}\,nz\,dz + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - z)\,\mathrm{sen}\,nz\,dz.$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} z\,\mathrm{sen}\,nz\,dz + 2\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{sen}\,nz\,dz - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} z\,\mathrm{sen}\,nz\,dz.$$

Hagamos $u = z$, de manera que $du = dz$, y si además $dv = \mathrm{sen}\,nz\,dz$, $v = -(1/n)\cos nz$ y así podemos evaluar la primera y tercera integrales:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\left\{-(z/n)\cos nz\Big|_0^{\pi/2} + (1/n)\int_0^{\pi/2}\cos nz\,dz\right\}$$

$$-(2/n)\cos nz\Big|_{\pi/2}^{\pi} - (2/\pi)\left\{(-z/n)\cos nzt\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right.$$

$$\left.+(1/n)\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nz\,dz\right\}$$

la cual el lector puede simplificar fácilmente para obtener

$$A_n = (4/\pi n^2)\,\mathrm{sen}(n\pi/2).$$

Ahora bien, si $n = 2k$,

$$A_{2k} = (4/\pi 4k^2)\text{sen}k\pi = \emptyset;$$

y si $n = 2m+1$ se tiene

$$A_{2m+1} = \frac{4}{(2m+1)^2} \text{ sen } \frac{(2m+1)\pi}{2}$$

$$= (-1)^m \frac{4}{\pi(2m+1)^2}$$

y como

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nt \,\text{sen}\, nx,$$

se tiene que

$$U(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \{(\cos(2m+1)t)\text{sen}(2m+1)x\},$$

que era la solución deseada.

Deben tenerse ciertas condiciones de convergencia sobre la serie

$$U(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \{(\cos(2m+1)t)(\text{sen}(2m+1)x)\}$$

Afirmamos que la serie es convergente pues:

$$|\{(\cos(2m+1)t)(\text{sen}(2m+1)x)\}| \left|\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2m+1)^2} \leq \frac{1}{m^2}$$

y $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ converge. Por el criterio de comparación, la serie es absolutamente convergente, por lo tanto es convergente.

b) Afirmamos que la serie converge uniformemente por el criterio de Weierstrass:

"Dada una serie $\sum u_n$ convergente. Si existe una serie convergente de constantes positivas $\sum M_n$ tal que

$$\emptyset < |u_n(x)| < M_n, \text{ para todo } n \geq 1 \text{ y todo } x \in S$$

entonces la serie $\sum u_n$ converge uniformemente".

*

BIBLIOGRAFIA

[1] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons. New York, 1964.

[2] Coddington, E.A., *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, 1955.

[3] Epstein, B., *Partial Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, 1962.

* *

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
BOGOTA. D.E.