

ESTRUCTURAS TOPOLOGICAS DE  $\mathbb{R}^*$ 

Yu Takeuchi

## §0. INTRODUCCION.

Sea  $\mathcal{F}_n^*$  un ultrafiltro regular en  $\mathbb{N}$  (ó un ultrafiltro de Frechet); por medio de  $\mathcal{F}_n^*$  se introduce el concepto de "casi todo" como sigue. Consideremos una cierta propiedad "p" para los elementos de sucesiones reales,  $(a_n)$ ; por ejemplo, "p" puede ser la propiedad "ser  $a_n$  positivo", ó, "ser  $a_n$  diferente de cero", ó "ser  $a_n$  mayor que 10", etc. Decimos que

$a_n$  satisface la propiedad "p" para casi todo n

si y sólo si

$\{n \in \mathbb{N} / a_n \text{ satisface la propiedad "p"}\} \in \mathcal{F}_n^*$ .

Gracias a las propiedades del ultrafiltro de Frechet, la palabra "*casí todo*" introducida de la manera anterior se comporta prácticamente en la misma forma como la hablada intuitivamente; más precisamente, ésta se rige bajo las siguientes reglas:

(I) "*n* suficientemente grande" implica "*casí todo n*".

(II) Si "*p*" implica "*q*", entonces, "*p* para ca  
*sí todo n*" implica "*q* para *casí todo n*".

(III) Si se cumple simultáneamente "*p* para *casí todo n*", y, "*q* para *casí todo n*", entonces se tiene que "*p*, y, *q* para *casí todo n*".

(IV) La negación de "*p* para *casí todo n*" es "*NO p* para *casí todo n*".

Dadas dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$ , si  $a_n = b_n$  para *casí todo n* entonces decimos que la sucesión  $(a_n)$  es *casí igual* a la sucesión  $(b_n)$ , y se denota por:

$$(a_n) \sim (b_n).$$

(V) Si  $(a_n)$  satisface la propiedad "*p*" para *casí todo n*, entonces existe otra sucesión  $(\hat{a}_n)$  *casí igual* a  $(a_n)$  tal que  $(\hat{a}_n)$  satisface

la propiedad "p" para **todo** n.

Sea  $\mathbb{R}^\infty$  ( $= \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ) la colección de todas las sucesiones de elementos reales, la relación "casi igual  $\sim$ " es una relación de equivalencia en  $\mathbb{R}^\infty$ ; la clase de equivalencia representada por la sucesión  $(a_n)$  se denota por:

$$[(a_n)],$$

o sea que  $[(a_n)]$  es la clase de todas las sucesiones casi iguales a  $(a_n)$ . La colección de todas las clases, o sea, el conjunto cociente  $\mathbb{R}^\infty/\sim$  es un cuerpo ordenado de acuerdo con las siguientes operaciones:

(Adición y Sustracción)

$$[(a_n)] \pm [(b_n)] = [(a_n \pm b_n)].$$

(Multiplicación)

$$[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)]$$

(Desigualdad)

$$[(a_n)] < [(b_n)] \quad \text{si } a_n < b_n \text{ para casi todo } n.$$

El elemento neutro para la adición es la clase representada por la sucesión constante de valor cero:  $[(0)] = [(0, 0, \dots, 0, \dots)]$ , y el

elemento neutro para la multiplicación es la clase representada por la sucesión constante de valor 1:  $[(1)] = [(1, 1, \dots, 1, \dots)]$ . Si  $[(a_n)] \neq [(0)]$  entonces  $a_n \neq 0$  para casi todo  $n$ . Por la propiedad (V) de "casi todo", existe  $(\hat{a}_n) \sim (a_n)$  tal que  $\hat{a}_n \neq 0$  para todo  $n$ . La clase representada por la sucesión  $(1/\hat{a}_n)$  es el inverso multiplicativo de la clase  $[(a_n)]$ .

El cuerpo ordenado  $\mathbb{R}^\infty/\sim$  se denota por  $\mathbb{R}^*$ , el cual se llama "el cuerpo de números no-estándar"<sup>(1)</sup> y los elementos de  $\mathbb{R}^*$ , o sea, las clases de equivalencia en  $\mathbb{R}^\infty$ , se llaman "números no-estándar".

La clase representada por la sucesión constante de valor real  $c$ ,  $[(c)] = [(c, c, \dots, c, \dots)]$  se denota nuevamente por  $c$ ; de esta manera podemos considerar a  $\mathbb{R}$  como un subcuerpo ordenado de  $\mathbb{R}^*$ .

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ; se define "el valor absoluto de  $\alpha$ " por:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

(1) Todos los cuerpos ordenados así obtenidos son isomorfos, suponiendo la hipótesis del continuo. (ver Cap.

Decimos que  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  es un *infinitesimal* si  $|\varepsilon| < c$  para todo *real*  $c > 0$ . Decimos que  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  es un *infinito* si  $|\lambda| > c$  para todo *real*  $c > 0$ . Si  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  es un infinitesimal, entonces  $1/\varepsilon$  es un infinito. Un número no-estándar  $\alpha$  es *finito* si  $\alpha$  no es infinito, esto es, si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  es finito entonces existe un número real positivo  $M$  tal que  $|\alpha| < M$ .

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ; si  $\alpha - \beta$  es un infinitesimal, decimos que  $\alpha$  es infinitamente próximo a  $\beta$ , y se denota por  $\alpha \approx \beta$ . Con esta notación, se tiene que  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  es un infinitesimal si y sólo si  $\varepsilon \approx 0$ .

Si  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  es finito, entonces se puede demostrar que existe un único número real  $a$  tal que  $\alpha \approx a$ ; decimos que  $a$  es "la parte estándar de  $\alpha$ " y se denota por  $a = \text{Est } \alpha$ .<sup>(2)</sup>

---

13, p.184, Gillman y Jerison. Anillos de funciones continuas, Van Nostrand, 1960).

(2) A partir de un filtro de Frechet  $\mathcal{F}_\mathcal{N}$ , hay varias maneras de llegar a un ultrafiltro  $\mathcal{F}_\mathcal{N}^*$ . Por ejemplo si a  $\mathcal{F}_\mathcal{N}$  se agrega  $S_1 = \{2m | m \in \mathbb{N}\}$  se obtiene uno de tales ultrafiltros y si se agrega  $S_2 = \{2m-1 | m \in \mathbb{N}\}$  se obtiene otro. De la construcción del ultrafiltro, depende la asignación de la parte estándar de  $\alpha$ . Por ejemplo, si se ha agregado  $S_1$  tenemos que

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \sim (0, 0, 0, 0, \dots) = 0$$

y si se ha agregado  $S_2$  obtenemos

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \sim (1, 1, 1, 1, \dots) = 1.$$

Es bien conocido el siguiente hecho:

Sea  $\alpha = [(a_n)] \in \mathbb{R}^*$ , si  $a_n \rightarrow L$  ( $n \rightarrow \infty$ ) entonces:

$$L = \text{Est } \alpha \quad (\text{ó, } L \approx \alpha).$$

Así, toda sucesión que tiende a cero representa un infinitesimal en  $\mathbb{R}^*$ .

## §1. TOPOLOGIA DE ORDEN EN $\mathbb{R}^*$ .

Como el cuerpo  $\mathbb{R}^*$  es un conjunto ordenado, esta propiedad nos permite trabajar en  $\mathbb{R}^*$  con intervalos abiertos, cerrados y semi-abiertos; gracias a esta útil herramienta podemos dotar a  $\mathbb{R}^*$  de una estructura topológica, similar a la que trabajamos para  $\mathbb{R}$ .

Primero se definen los intervalos no-estándar:

$$(\alpha, \beta) = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \alpha < \tau < \beta\}$$

(intervalo no-estándar abierto).

$$[\alpha, \beta] = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \alpha \leq \tau \leq \beta\}$$

(intervalo no-estándar cerrado).

También a veces es conveniente emplear los símbolos  $\pm\infty$  para denotar los intervalos

no-estándar no-acotados:

$$(\alpha, +\infty) = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > \alpha\}$$

$$(-\infty, \beta) = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau < \beta\}$$

No se debe confundir los símbolos  $\pm\infty$  con los números no-estándar infinitos.

Dado  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , el intervalo  $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}^*$ , es "la vecindad" de  $\alpha$  de radio  $\epsilon$ , y se denota por:

$$V(\alpha; \epsilon),$$

o simplemente una vecindad de  $\alpha$ ,  $V(\alpha)$ .

Sea  $S$  un conjunto de números no-estándar; decimos que  $S$  es "abierto" si para todo  $\tau \in S$  existe una vecindad  $V(\tau)$  contenida en  $S$ . Evidentemente, los intervalos no-estándar abiertos son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^*$ .

Se ve fácilmente que la unión de cualquier número de conjuntos abiertos es abierta, y la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierta.

Consideremos  $\mathcal{O}$  la familia de todos los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^*$ , entonces  $\mathcal{O}$  es una topología para  $\mathbb{R}^*$  (Topología de orden).

**Ejemplo 1.** Intervalos no-estándar abiertos,  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, +\infty)$ ,  $(-\infty, \beta)$  son abiertos en  $\mathbb{R}^*$ .  $\emptyset$  (el conjunto vacío) y  $\mathbb{R}^*$  también son abiertos.

**Ejemplo 2.** Sea  $E_0$  el conjunto de todos los números infinitesimales:

$$E_0 = \{\epsilon \in \mathbb{R}^* / \epsilon \approx 0\}$$

entonces  $E_0$  es abierto. En efecto, tenemos:

$$E_0 = \bigcup_{\substack{\epsilon \approx 0 \\ \epsilon > 0}} (-\epsilon, \epsilon) \quad (\text{unión de intervalos abiertos}).$$

**Ejemplo 3.** El conjunto  $A$  de todos los números no infinitesimales es abierto en  $\mathbb{R}^*$ . En efecto:

$$A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \neq 0\} = \bigcup_{\tau \neq 0} (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon)$$

donde  $\epsilon$  es un infinitesimal positivo.

**Ejemplo 4.** El conjunto  $B$  de todos los números no-estándar *finitos* es abierto. En efecto:

$$B = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \text{ es finito}\} = \bigcup_{\tau \text{ finito}} (\tau - \epsilon, \tau + \epsilon). \\ (\epsilon \approx 0).$$

**Ejemplo 5.** El conjunto  $D$  de todos los números no-estándar *infinitos* es abierto. En efecto:

$$\mathcal{D} = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \text{ es infinito}\} = \bigcup_{\tau \text{ infinito}} (\tau-1, \tau+1).$$

Decimos que  $F (\subseteq \mathbb{R}^*)$  es "cerrado" si su complemento  $\mathbb{R}^* - F$  es abierto. Evidentemente, los intervalos cerrados no-estándar son conjuntos cerrados.

Dado un conjunto  $S (\subseteq \mathbb{R}^*)$ , un número no-estándar  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  es un punto de *acumulación* de  $S$  si toda vecindad de  $\alpha$  contiene, por lo menos, un punto de  $S$  diferente de  $\alpha$ . Un conjunto  $F (\subseteq \mathbb{R}^*)$  es cerrado si y sólo si todos los puntos de *acumulación* de  $F$  pertenecen a  $F$ .

**Ejemplo 6.**  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}^*$ ,  $[\alpha, \beta]$ ,  $[\alpha, +\infty)$ ,  $(-\infty, \beta]$  son cerrados.

**Ejemplo 7.**  $\mathbb{R}$ , como un subconjunto de  $\mathbb{R}^*$ , es cerrado.

Es suficiente mostrar que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \emptyset$ .

En efecto: i) Sea  $x \in \mathbb{R}$ , si  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \approx 0$  entonces la vecindad  $V(x; \varepsilon)$  contiene como *único número real* a  $x$ :

$$V(x; \varepsilon) \cap \mathbb{R} = \{x\},$$

es decir, todos los puntos  $x \in \mathbb{R}$  son "aislados" en  $\mathbb{R}^*$ .

ii) Si  $\tau$  es infinito, y  $\epsilon > 0$ ,  $\epsilon \approx 0$ , entonces  $V(\tau, \epsilon) \cap \mathbb{R} = \phi$ .

iii) Si  $\tau \in \mathbb{R}^* - \mathbb{R}$  y es finito, para  $\sigma = |\tau - \text{Est } \tau|$ , se tiene que  $V(\tau, \frac{\sigma}{2}) \cap \mathbb{R} = \phi$ .

Más generalmente, cualquier conjunto de números reales es cerrado en  $\mathbb{R}^*$ .

**Ejemplo 8.** Sean  $E_0, A, B, D$  los conjuntos no-estándar dados en los ejemplos 2, 3, 4 y 5, entonces estos conjuntos son cerrados en  $\mathbb{R}^*$ . En efecto:

$$E_0 = \mathbb{R}^* - A, \quad A = \mathbb{R}^* - E_0, \quad B = \mathbb{R}^* - D, \quad D = \mathbb{R}^* - B,$$

luego estos conjuntos son cerrados ya que  $A, E_0, D, B$  son abiertos.

También, podemos observar directamente así:

$$E_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right]$$

siendo  $E_0$  la intersección de intervalos cerrados no-estándar, éste debe ser cerrado.

Nótese que  $E_0$  no tiene puntos de frontera.

**Ejemplo 9.** Sea  $E_\alpha = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \approx \alpha\}$ ; entonces  $E_\alpha$  es abierto y cerrado. No existen puntos de frontera de  $E_\alpha$ . Además

$$E_\alpha = \alpha + E_0 = \{\alpha + \varepsilon / \varepsilon \in E_0\}.$$

La presencia de subconjuntos cerrados y a la vez abiertos (diferentes a  $\emptyset$  y a  $\mathbb{R}^*$ ), como se muestra en los ejemplos anteriores, nos dice que: " $\mathbb{R}^*$  no es conexo".

Sea  $S (\subseteq \mathbb{R}^*)$ ; un número no-estándar  $\alpha$  se llama "el extremo superior de  $S$ " ( $\alpha = \sup S$ ) si  $\alpha$  es la mínima cota superior de  $S$ . Por ejemplo, si  $S = (\alpha, \beta)$  (un intervalo no-estándar) entonces  $\beta = \sup S$ .

De la misma forma, se define el extremo inferior de  $S$ ,  $\inf S$ .

Un conjunto acotado no siempre posee  $\sup$  ni  $\inf$ .

**Ejemplo 10.**  $E_0 = \{\varepsilon / \varepsilon \approx 0\}$  es acotado superiormente ya que cualquier número positivo no-infinitesimal es una cota superior de  $E_0$ . Se ve que no existe  $\sup E_0$ . En efecto, supongamos que  $\alpha > 0$  es una cota superior de  $E_0$ . Si  $\alpha \approx 0$  entonces  $2\alpha > \alpha$ ,  $2\alpha \in E_0$ , luego  $\alpha$  no es una cota superior de  $E_0$  (*absurdo!*). Por lo tanto,

$\alpha \neq 0$ . Entonces tenemos:

$$\frac{1}{2}\alpha \neq 0, \quad \frac{1}{2}\alpha < \alpha,$$

esto es,  $\frac{1}{2}\alpha$  es una cota superior de  $E_0$ , estrictamente menor que  $\alpha$ , luego no existe la mínima cota superior de  $E_0$ .

El Ejemplo 10 nos muestra que:

" $\mathbb{R}^*$  no es completo".

## §2. SUCESIONES DE NUMEROS NO-ESTANDAR.

Sea  $(\alpha_n)_n$  una sucesión de números no-estándar<sup>(#)</sup>, decimos que  $(\alpha_n)_n$  tiende (o converge) a  $\beta$  si

dato  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$  cualquiera, existe  $N_0 \in \mathbb{N}$

tal que

$$|\alpha_n - \beta| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ con } n > N_0.$$

Los siguientes teoremas cuyas demostraciones aparecen en el libro "Teoría de Funciones No-estándar, Y. Takeuchi", son sumamente importantes.

(#) Una sucesión de números no-estándar es una "función":

$$\begin{aligned} (\alpha_n): \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R}^* \\ n &\rightarrow \alpha_n \end{aligned}$$

**TEOREMA 1.** Toda sucesión de números no-estándar es *acotada*. (ver p.83 del libro citado).

**TEOREMA 2.** Ninguna sucesión no-constante de números no-estándar converge en  $\mathbb{R}^*$ . (ver p.86 del libro citado).

**Nota.** Decimos que una sucesión  $(\alpha_n)_n$  es "constante" si  $\alpha_n = \alpha$  para *todo*  $n$  a partir de algún subíndice.

Sean  $S(\subseteq \mathbb{R}^*)$  un conjunto no-estándar y  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  un punto de acumulación de  $S$ . Según el Teorema 2, "*no existe* una sucesión de puntos de  $S$ , dos a dos distintos, que converge a  $\alpha$ ". Esto es, el concepto de "punto de acumulación" es diferente al concepto de "punto límite", por esta razón los métodos de estudio de sucesiones en  $\mathbb{R}^*$  son sustancialmente diferentes a los de  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 11.** Sea  $(\alpha_n)_n$  una sucesión de números no-estándar, estrictamente creciente; entonces el conjunto:

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, +\infty) = \{\tau \in \mathbb{N}^* / \tau > \alpha_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

es *abierto y cerrado*.

**Demostración.** Como  $(\alpha_n)_n$  es estrictamente crece

ciente, se tiene que

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau \geq \alpha_n\}$$

por lo tanto,  $T$  es cerrado. (intersección de intervalos cerrados).

Por otra parte, sea  $\tau \in T$ , entonces  $\tau > \alpha_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por el Teorema 2,  $\tau$  no es límite de la sucesión  $(\alpha_n)_n$ , por lo tanto existe  $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\tau - \varepsilon > \alpha_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , o sea

$$(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon) \subset T,$$

luego,  $T$  es un conjunto abierto.

De la misma manera, tenemos:

**Ejemplo 12.** Sean  $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$  sucesiones estrictamente creciente y estrictamente decreciente respectivamente; entonces los conjuntos:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, \beta_n)$$

son abiertos y cerrados.

**Ejemplo 13.** Sean  $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n$  sucesiones estrictamente decreciente y estrictamente cre-

ciente respectivamente, entonces los conjuntos:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n], \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, +\infty), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, \beta_n]$$

son abiertos y cerrados.

### §3. EXTENSION ELEMENTAL DE CONJUNTOS REALES.

Sea  $S (\subseteq \mathbb{R})$  un conjunto de números reales.... El conjunto no-estándar  $S^*$  definido por:

$$S^* = \{ \tau = [(\chi_n)_n] / \chi_n \in S \text{ para casi todo } n \}$$

se llama "la extensión elemental del conjunto  $S$ ".

**TEOREMA 3.** (i) Si  $S \subseteq T$  entonces  $S^* \subseteq T^*$ .

$$(ii) (S \cup T)^* = S^* \cup T^*.$$

$$(iii) (S \cap T)^* = S^* \cap T^*.$$

$$(iv) (\mathbb{R} - S)^* = \mathbb{R}^* - S^*.$$

**Demostración.** (i) Evidente.

(ii) Como  $S \subseteq (S \cup T)$  entonces  $S^* \subseteq (S \cup T)^*$  (por (i)), por lo tanto:

$$S^* \cup T^* \subseteq (S \cup T)^*.$$

Ahora, sea  $\tau = [(\chi_n)_n] \in (S \cup T)^*$ , entonces

$$\chi_n \in S \cup T = S \cup (T - S) \text{ para casi todo } n.$$

Por lo tanto:

$$\chi_n \in S \text{ para casi todo } n, \text{ ó}$$

$$\chi_n \in T - S \subset T \text{ para casi todo } n.$$

esto es,

$$\tau = [(\chi_n)_n] \in S^* \text{ ó, } \tau = [(\chi_n)_n] \in T^*,$$

luego

$$\tau \in S^* \cup T^*, \text{ esto es, } (S \cup T)^* \subseteq S^* \cup T^*.$$

(iii) y (iv) se prueban similarmente a (ii).

Como una consecuencia inmediata del Teorema 3, tenemos:

Dada una familia finita de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $\{S_k; k = 1, 2, \dots, m\}$ , se tiene:

$$\left( \bigcup_{k=1}^m S_k \right)^* = \bigcup_{k=1}^m (S_k)^*, \quad \left( \bigcap_{k=1}^m S_k \right)^* = \bigcap_{k=1}^m (S_k)^*.$$

Sin embargo, esta "intercambiabilidad" entre

"la extensión elemental (\*)" y "la unión" ó "la intersección" *no* se puede generalizar para el caso de la "unión infinita", ó "la intersección infinita". En general, se cumplen solamente las siguientes contenenencias:

Sea  $\{S_k; k \in \mathbb{N}\}$  una colección infinita de subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , entonces:

$$(i) \quad \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right)^* \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^* ,$$

$$(ii) \quad \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \right)^* \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} (S_k)^* .$$

En efecto se tiene que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \supseteq S_k \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} .$$

Por el Teorema 3 se obtiene:

$$\left( \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right)^* \supseteq (S_k)^* \quad \text{para todo } k ,$$

por lo tanto:

$$\left( \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right)^* \supseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^* .$$

De la misma manera, se obtiene la contenenencia (ii).

Supongamos ahora que la colección  $\{S_k; k \in \mathbb{N}\}$  satisface la condición:

$$S_n \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces existe  $a_n$  tal que  $a_n \in S_n$ ,  $a_n \notin \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k$ .

Consideremos el número no-estándar

$\alpha = [(a_n)]$ . Como  $a_n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$  para todo  $n$ .

$$\alpha = [(a_n)] \in \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right)^*.$$

Por otra parte, para cada  $k$  fijo se tiene:

$a_n \notin S_k$  para  $n > k$  (o sea, para casi todo  $n$ )

esto es:

$$\alpha = [(a_n)] \notin (S_k)^* \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto:

$$\alpha = [(a_n)] \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^*.$$

De lo anterior se tiene que:

$$\left( \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right)^* \neq \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_k)^*.$$

De la misma manera, si la colección  $\{S_k; k \in \mathbb{N}\}$  satisface la condición  $S_n \not\supseteq \bigcap_{k=1}^{n-1} S_k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces se tiene que:

$$\left( \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \right)^* \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} (S_k)^*.$$

**Ejemplo 14.** Dados  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$ , el intervalo no-estándar  $(a, b) = \{\tau \in \mathbb{R}^* / a < \tau < b\}$  es la extensión elemental del intervalo real  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ .

En efecto, si  $a < x_n < b$  para casi todo  $n$ , entonces:

$$a = [(a)_n] < [(x_n)_n] < [(b)_n] = b \quad (*)$$

o sea:

$$a < \tau < b \quad \text{con} \quad \tau = [(x_n)_n].$$

**Ejemplo 15.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$  con  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha, \beta \notin \mathbb{R}$ . El intervalo no estándar  $(\alpha, \beta)$  no es extensión elemental de ningún conjunto real.

**Demostración.** Supongamos que existe  $S \subseteq \mathbb{R}$  tal que

$$(\alpha, \beta) = S^*.$$

Si  $a = \text{Est } \alpha$ ,  $b = \text{Est } \beta$ , entonces podemos considerar los siguientes 4 casos:

- (i)  $a > \alpha$ ,  $b < \beta$ ,      (ii)  $a > \alpha$ ,  $b > \beta$ ,  
 (iii)  $a < \alpha$ ,  $b < \beta$ ,      (iv)  $a < \alpha$ ,  $b > \beta$ .

Supongamos el primer caso (i):  $a > \alpha$ ,  $b < \beta$ .

Como  $S^* = (\alpha, \beta) \supseteq [a, b] = \{\tau \in \mathbb{R}^* / a \leq \tau \leq b\} = [a, b]^*$

---

(\*)  $(a)_n, (b)_n$  son sucesiones constantes de valor  $a, b$  respectivamente, que representan a los números reales  $a, b$  en  $\mathbb{R}^*$ .

entonces

$$S \supseteq [a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}.$$

Si  $S \neq [a, b]$  entonces existe  $x \in S$  tal que  $x > b$ , ó,  $x < a$ .

Pero como  $x \in S$  entonces  $x = [(x)_n] \in S^*$ , luego  $a < x < b$  y en consecuencia  $x = a$  ó  $x = b$ ; esto contradice a:  $a > b$  ó  $x < a$  (absurdo!).

Por lo tanto se debe tener que  $S = [a, b]$ , luego  $S^* = [a, b]^* = [a, b] = (\alpha, \beta)$ .

Esto es imposible. (absurdo!)

De manera similar, podemos llegar a un absurdo en los casos (ii), (iii) y (iv).

## NÚMEROS NATURALES NO-ESTÁNDAR $\mathbb{N}^*$

Si  $\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*$  ( $\lambda$  es un número no-estándar representado por una sucesión de números naturales), decimos que  $\lambda$  es "un número natural no-estándar". A continuación veremos las propiedades de  $\mathbb{N}^*$ .

1º  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ . (Evidente).

2º Si  $\lambda \in \mathbb{N}^*$  entonces  $\lambda + 1 \in \mathbb{N}^*$ .

En efecto, si  $\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*$ , entonces  $k_n \in \mathbb{N}$  para casi todo  $n$ , luego  $k_n + 1 \in \mathbb{N}$  para casi todo  $n$ , por lo tanto:

$$\lambda + 1 = [(k_n)_n] + [(1)_n] = [(k_n + 1)_n] \in \mathbb{N}^*.$$

3<sup>o</sup> Sea  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ . No existe  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\lambda < \alpha < \lambda+1$ .

En efecto, si  $\lambda = [(k_n)_n]$ ,  $\alpha = [(x_n)_n]$  entonces  $\lambda < \alpha < \lambda+1$  implica que

$$k_n < x_n < k_n+1 \quad \text{para casi todo } n,$$

luego:

$$x_n \notin \mathbb{N} \quad \text{para casi todo } n,$$

o sea

$$\alpha = [(x_n)_n] \notin \mathbb{N}^*.$$

4<sup>o</sup> Sea  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ , si  $\lambda$  es *finito*, entonces  $\lambda \in \mathbb{N}$  (esto es, un número natural no-estándar finito es un número natural).

En efecto, si  $\lambda \in \mathbb{N}^*$  es finito entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \leq \lambda < n+1.$$

De la propiedad 3<sup>o</sup> se tiene que  $\lambda = n \in \mathbb{N}$ .

5<sup>o</sup> Sea  $\tau \in \mathbb{R}^*$  ( $\tau > 0$ ) entonces existe  $\lambda \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$\lambda-1 \leq \tau < \lambda.$$

En efecto, si  $\tau = [(x_n)_n]$  entonces se define  $k_n \in \mathbb{N}$  como sigue:

$$k_n = (\text{la parte entera de } x_n) + 1 \quad (\text{para todo } n)$$

tenemos

$$k_n - 1 \leq x_n < k_n \quad \text{para todo } n,$$

luego:  $\lambda-1 \leq \tau = [(x_n)_n] < \lambda$ , donde

$$\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*.$$

Nótese que ésta es la versión no-estándar de la propiedad arquimediana de  $\mathbb{R}^*$ .

6º Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$  con  $\lambda > \mu$  entonces

$$\lambda + \mu \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \cdot \mu \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda - \mu \in \mathbb{N}^*.$$

Como un caso particular, si  $\lambda \in \mathbb{N}^*$  es infinito entonces  $\lambda \pm n \in \mathbb{N}^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

7º Sea  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda$  un número natural no-estándar infinito, se define:

$$\mathbb{Z}_\lambda = \{\tau \in \mathbb{N}^* / \tau = \lambda \pm n, n \in \mathbb{N}\}$$

entonces: (a)  $\mathbb{Z}_\lambda \subset \mathbb{N}^*$ . (b)  $\mathbb{Z}_\lambda$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

(c) Si  $\lambda - \mu$  es infinito entonces  $\mathbb{Z}_\lambda \cap \mathbb{Z}_\mu = \emptyset$ .

8º Sean  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$  con  $\mu > \lambda$ . Si  $\mu - \lambda$  es infinito, entonces existe  $v \in \mathbb{N}^*$  tal que  $\lambda < v < \mu$ ,  $v - \lambda$  es infinito,  $\mu - v$  es infinito.

En efecto, por la propiedad 5º existe  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  tal que

$$\alpha - 1 \leq \frac{1}{2}(\mu - \lambda) < \alpha.$$

$\alpha$  es finito ya que  $\mu - \lambda$  es infinito. Si  $v = \lambda + \alpha$  entonces  $v \in \mathbb{N}^*$ , además  $v - \lambda, \mu - v$  son infinitos.

En la siguiente figura se muestra la estructura de  $\mathbb{N}^*$ .

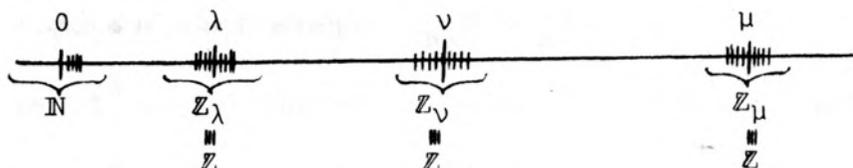


Figura 1 Estructura de  $\mathbb{N}^*$

9<sup>a</sup>  $\mathbb{N}^*$  no es contable.

**Demostración.** Supongamos que  $\mathbb{N}^*$  es contable:  
sea:

$$\mathbb{N}^* = \{\lambda_i / i = 1, 2, 3, \dots\} .$$

Sean  $\lambda_i = [(k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in}, \dots)] = [(k_{in})_n]$   
( $i = 1, 2, 3, \dots$ ).

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  
 $k_{in} \in \mathbb{N}$  para todo  $i$ , para todo  $n$ . Se define  $h_n$   
como sigue:

$$\begin{aligned} h_1 &= k_{11} + 1 \\ h_2 &= k_{12} + k_{22} + 1 \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \\ h_n &= k_{1n} + k_{2n} + \dots + k_{nn} + 1 \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} h_n &> k_{1n} \quad (\text{para todo } n) \\ h_n &> k_{2n} \quad (\text{para todo } n \geq 2) \end{aligned}$$

en general:

$$h_n > k_{in} \quad (\text{para todo } n \geq i).$$

Por lo tanto

$$\alpha = [(h_n)_n] > \lambda_i = [(k_{in})_n] \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N},$$

o sea que

$$\alpha \notin \mathbb{N}^*$$

Pero como  $h_n \in \mathbb{N}$  para todo  $n$ , entonces  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  (*absurdo!*).

Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$  con  $\lambda \neq \mu$  entonces, de la propiedad 3<sup>o</sup> se tiene:

$$(\lambda, \lambda+1) \cap (\mu, \mu+1) = \emptyset.$$

De la propiedad 9<sup>o</sup> se desprende que

" $\mathbb{R}^*$  no es separable",

puesto que existe una colección *no contable* de intervalos abiertos, dos a dos disjuntos, por ejemplo,  $\{(\lambda, \lambda+1) / \lambda \in \mathbb{N}^*\}$ .

## NUMEROS RACIONALES NO-ESTANDAR, $\mathbb{Q}^*$ .

Si  $\alpha = [(r_n)_n] \in \mathbb{Q}^*$  ( $\alpha$  es un número no-estándar representado por una sucesión de números racionales), decimos que  $\alpha$  es un *número racional no-estándar*. A continuación daremos algunas propiedades de  $\mathbb{Q}^*$ .

1<sup>o</sup>.  $\mathbb{Q}^*$  es un *cuerpo* (evidente).

2<sup>o</sup>.  $\mathbb{Q}^*$  es denso en  $\mathbb{R}^*$ .

En efecto, sea  $\tau = [(x_n)_n] \in \mathbb{R}^*$ , dado  $\varepsilon = [(e_n)_n] > 0$  cualquiera, existe  $r_n$  racional tal que

$$x_n - e_n < r_n < x_n + e_n \quad \text{para cada } n.$$

Si  $\alpha = [(r_n)_n]$ , entonces  $\alpha \in \mathbb{Q}^*$ , y además:

$$\begin{aligned} [(x_n)_n] - [(e_n)_n] &= [(x_n - e_n)_n] < [(r_n)_n] \\ &< [(x_n + e_n)_n] = [(x_n)_n] + [(e_n)_n] \end{aligned}$$

o sea

$$\tau - \varepsilon < \alpha < \tau + \varepsilon.$$

3<sup>o</sup>  $\mathbb{Q}^*$  no es contable.

En efecto, como  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$  entonces  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Q}^*$ , por lo tanto  $\mathbb{Q}^*$  no es contable.

Nota. A pesar de que  $\mathbb{Q}^*$  no es equipotente a  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}^*$  sí es equipotente a  $\mathbb{R}$ , ya que

$$\mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}^* \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}.$$

#### §4. EXTENSION ELEMENTAL DE CONJUNTOS ABIERTOS.

En  $\mathbb{R}$ , todo conjunto abierto  $A$  es la unión contable de intervalos abiertos, dos a dos dis

yuntos. Esta propiedad no se tiene para conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^*$  como el caso de  $E_0$  de todos los números infinitesimales. Sin embargo, para las extensiones elementales de conjuntos abiertos reales se tiene una versión no-estándar de esta propiedad.

**TEOREMA 4.** Sea  $A$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}$ , entonces  $A^*$  (la extensión elemental de  $A$ ) es la unión de intervalos no-estándar abiertos, dos a dos disjuntos. El número de intervalos que componen a  $A^*$  es igual al de  $\mathbb{N}^*$ .

**Demostración.** Como  $A$  es abierto en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

donde los intervalos  $(a_n, b_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  son dos a dos disjuntos. Vamos a demostrar que

$$A^* = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$$

donde

$$\lambda = [(k_n)_n] \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_\lambda = [(a_{k_n})_n], \quad \beta_\lambda = [(b_{k_n})_n].$$

En efecto, (i) sea  $\tau = [(x_n)_n] \in A^*$  entonces

$$x_n \in A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \quad \text{para casi todo } n,$$

o sea:

$$x_n \in (a_k, b_k) \text{ para algún } k, \text{ para casi todo } n.$$

Notemos  $(a_{k_n}, b_{k_n})$  el intervalo que contiene a  $x_n$ :

$$a_{k_n} < x_n < b_{k_n} \quad \text{para casi todo } n,$$

entonces

$$[(a_{k_n})_n] < [(x_n)_n] < [(b_{k_n})_n],$$

es decir,  $\tau \in (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$ . Esto nos muestra que

$$A^* \subseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda).$$

(ii) Recíprocamente, supongamos que

$$\tau = [(x_n)_n] \in \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$$

con

$$\alpha_\lambda = [(a_{k_n})_n], \quad \beta_\lambda = [(b_{k_n})_n],$$

entonces  $\tau \in (\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$  para algún  $\lambda \in \mathbb{N}^*$ , luego:

$$a_{k_n} < x_n < b_{k_n} \quad \text{para casi todo } n,$$

así:

$$x_n \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) = A \quad \text{para casi todo } n.$$

Por lo tanto, se tiene que  $\tau \in A^*$ , o sea:

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}^*} (\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \subseteq A^*.$$

Ahora solamente hace falta demostrar que los intervalos  $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$  son disyuntos dos a dos. En efecto, sean  $\lambda, \mu \in \mathbb{N}^*$  tales que  $\lambda \neq \mu$  con  $\lambda = [(k_n)_n]$ ,  $\mu = [(h_n)_n]$ , entonces

$$k_n \neq h_n \text{ para casi todo } n, \text{ y}$$

esto quiere decir que

$$(a_{k_n}, b_{k_n}) \cap (a_{h_n}, b_{h_n}) = \emptyset \text{ para casi todo } n,$$

por lo tanto se tiene que

$$(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \cap (\alpha_\mu, \beta_\mu) = \emptyset.$$

Con esto queda demostrado el Teorema 4.

## §5. CONJUNTOS COMPACTOS EN $\mathbb{R}^*$ .

En  $\mathbb{R}$  un conjunto compacto es *acotado* y *cerrado*. Esta propiedad no se tiene en  $\mathbb{R}^*$ ; tenemos el siguiente teorema bastante extraño:

**TEOREMA 5.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^*$ .  $S$  es compacto si y sólo si  $S$  es "finito".

Nota.  $S$  es *finito* quiere decir que el conjunto  $S$  posee un número finito de elementos.

**Demostración.** Evidentemente, un conjunto finito es compacto. Procedemos a demostrar el recíproco por reducción al absurdo.

Sea  $S$  un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^*$ , supongamos que  $S$  es infinito (o sea,  $S$  posee un número infinito de elementos), y consideremos los siguientes dos casos; llegaremos a un absurdo para cada caso.

- (i)  $S$  contiene un intervalo no-estándar,
- (ii)  $S$  no contiene intervalos no-estándar.

(i) Supongamos que  $S$  contiene un intervalo no-estándar. Como cualquier intervalo no-estándar contiene intervalos no-estándar de longitud infinitesimal, supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$S \supset [\alpha, \beta] \quad \text{tal que } \beta - \alpha = \epsilon > 0, \quad \epsilon \approx 0.$$

La colección de intervalos  $\{(\tau - \epsilon^2, \tau + \epsilon^2) / \tau \in S\}$  es un recubrimiento abierto del conjunto compacto  $S$ :

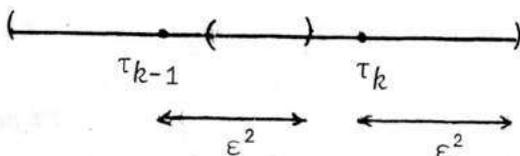
$$[\alpha, \beta] \subseteq S \subseteq \bigcup_{\tau \in S} (\tau - \epsilon^2, \tau + \epsilon^2).$$

Como  $S$  es compacto, existen  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in S$  con  $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$  tales que

$$[\alpha, \beta] \subseteq S \subseteq \bigcup_{k=1}^n (\tau_k - \epsilon^2, \tau_k + \epsilon^2).$$

Entonces:

$$\tau_k - \tau_{k-1} < 2\epsilon^2,$$



luego

Figura 2

$$\beta - \alpha < 2(n+1)\epsilon^2,$$

o sea

$$\epsilon < 2(n+1)\epsilon^2,$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{2(n+1)} < \epsilon$$

lo cual es absurdo, puesto que  $\epsilon \approx 0$ .

(ii) Supongamos que  $S$  es infinito, pero  $S$  no contiene intervalos no estándar.

Como  $S$  es infinito, existe una sucesión de puntos de  $S$  estrictamente monótona, digamos estrictamente creciente (#):

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \dots, \quad \tau_k \in S \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots$$

(#) Si el conjunto  $S$  no tiene elemento máximo, es evidente que podemos extraer una sucesión estrictamente cre

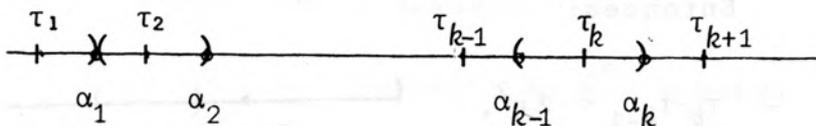


Figura 3

Como  $S$  no contiene intervalos, entonces para cada  $k \in \mathbb{N}$  entre  $\tau_k$  y  $\tau_{k+1}$  existe, por lo menos, un punto que no pertenece a  $S$ , digamos  $\alpha_k \notin S$ . Tenemos el siguiente recubrimiento abierto de  $S$ :

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \alpha_{k+1}) \cup (-\infty, \alpha_1) \cup \{\tau/\tau > \alpha_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$$

Nótese que  $\{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > \alpha_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, +\infty)$  es abierto según el ejemplo 11.

cientemente de puntos de  $S$ .

Si  $S$  tiene máximo, sea  $\tau_1 = \text{Máximo de } S$ .

Ahora, consideremos el conjunto infinito  $S_1 = S - \{\tau_1\}$ . Si  $S_1$  no tiene máximo, entonces existe una sucesión estrictamente creciente de puntos de  $S_1$ . Si  $S_1$  tiene máximo, sea  $\tau_2 = \text{Máximo de } S_1$ .

Así sucesivamente. Si este procedimiento termina en algún momento, en tal caso existe una sucesión estrictamente creciente de puntos de  $S$ ; si el procedimiento sigue sin terminar nunca, entonces la sucesión  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$  es estrictamente decreciente.

Los intervalos  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$   $k = 1, 2, 3, \dots$  son disjuntos, y cada uno contiene por lo menos, un punto de  $S$ , por lo tanto no existe un *subrecubrimiento finito* de  $S$ , esto contradice a la compacidad del conjunto  $S$  (*absurdo!*).

Por lo tanto,  $S$  debe ser un conjunto finito.

## A P E N D I C E .

### ALGUNAS OTRAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE $\mathbb{R}^*$ .

1<sup>o</sup>  $\mathbb{R}^*$  es de Hausdorff ( $T_2$ ).

En efecto, sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ ,  $\alpha \neq \beta$ , si  $\delta = |\alpha - \beta| > 0$  entonces tenemos:

$$V(\alpha, \frac{1}{2}\delta) \cap V(\beta, \frac{1}{2}\delta) = \emptyset.$$

2<sup>o</sup>  $\mathbb{R}^*$  es regular ( $T_3$ ).

En efecto, sean  $F$  un conjunto cerrado en  $\mathbb{R}^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $\alpha \notin F$ , entonces  $\alpha$  no es punto de acumulación de  $F$ , luego existe  $\delta \in \mathbb{R}^*$ ,  $\delta > 0$  tal que

$$V(\alpha, \delta) \cap F = \emptyset.$$

Consideremos dos conjuntos abiertos  $A, B$ :

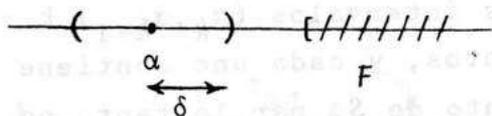


Figura 4

$$A = V(\alpha, \frac{1}{2}\delta), \quad B = \bigcup_{\tau \in F} V(\tau, \frac{1}{2}\delta)$$

entonces se tiene que

$$\alpha \in A, \quad F \subset B, \quad y, \quad A \cap B = \emptyset.$$

3º  $\mathbb{R}^*$  es normal ( $T_4$ ).

*Demostración.* Sean  $F, G$  dos conjuntos cerrados disyuntos. Dado  $\tau \in F$  existe  $\delta_\tau \in \mathbb{R}^*$ ,  $\delta_\tau > 0$  tal que

$$V(\tau, \delta_\tau) \cap G = \emptyset.$$

Dado  $\sigma \in G$  existe  $\varepsilon_\sigma \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varepsilon_\sigma > 0$  tal que

$$V(\sigma, \varepsilon_\sigma) \cap F = \emptyset$$

Consideremos dos conjuntos abiertos  $A, B$  definidos por:

$$A = \bigcup_{\tau \in F} V(\tau, \frac{1}{2}\delta_\tau), \quad B = \bigcup_{\sigma \in G} V(\sigma, \frac{1}{2}\varepsilon_\sigma).$$

Evidentemente tenemos:

$$F \subseteq A, \quad G \subseteq B.$$

Además, se tiene que  $A \cap B = \emptyset$ ; en efecto, si existiera  $\lambda \in A \cap B$  entonces existiría  $\tau \in F$  con  $|\tau - \lambda| < \frac{1}{2}\delta_\tau$ , y también existiría  $\sigma \in G$  con  $|\sigma - \lambda| < \frac{1}{2}\epsilon_\sigma$ . Entonces se tendría:

$$|\tau - \sigma| \leq |\tau - \lambda| + |\lambda - \sigma| < \frac{1}{2}(\delta_\tau + \epsilon_\sigma).$$

Si  $\delta_\tau \geq \epsilon_\sigma$  entonces  $\delta_\tau < |\tau - \sigma| < \frac{1}{2}(\delta_\tau + \epsilon_\sigma) \leq \delta_\tau$   
(absurdo!).

Si  $\epsilon_\sigma \geq \delta_\tau$  entonces  $\epsilon_\sigma < |\tau - \sigma| < \frac{1}{2}(\delta_\tau + \epsilon_\sigma) \leq \epsilon_\sigma$   
(absurdo!).

Por lo tanto, se tiene que  $A \cap B = \emptyset$ .

## EL COMPLETADO DE $\mathbb{R}^*$ , $\overline{\mathbb{R}^*}$ .

Como  $\mathbb{R}^*$  es un conjunto ordenado, podemos construir el completado de  $\mathbb{R}^*$ ,  $\overline{\mathbb{R}^*}$ , agregando a  $\mathbb{R}^*$  el extremo superior y el extremo inferior de todo subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^*$ . (ver: Víctor Mejía, Conjunto Ordenado sin Estructura Algebraica, Rev. Matemática, Enseñanza Universitaria, N° 23, Junio de 1982, pp.23-53).

$\overline{\mathbb{R}^*}$  es nuevamente un conjunto ordenado, sin embargo se pierde la estructura algebraica en  $\overline{\mathbb{R}^*}$ . Veámoslo.

Consideremos el conjunto  $A$  de todos los números no-estándar *positivos, no infinitesimales*:  $A = \{\tau \in \mathbb{R}^* / \tau > 0, \tau \neq 0\}$ , sea  $\alpha$  el extremo inferior de  $A$  en  $\overline{\mathbb{R}^*}$ , entonces

$$0 < \alpha < \tau \quad \text{para todo } \tau > 0, \tau \neq 0.$$

Si  $\overline{\mathbb{R}^*}$  (el completado del cuerpo  $\mathbb{R}^*$ ) fuera un *grupo aditivo, consistente* con la desigualdad (el orden en  $\overline{\mathbb{R}^*}$ ) entonces se debería tener:

$$\alpha + \alpha < \alpha + \tau < \tau + \tau \quad \text{para todo } \tau > 0, \tau \neq 0$$

Como  $\{\tau + \tau / \tau \in \mathbb{R}^*, \tau \neq 0, \tau > 0\} = A$  entonces  $\alpha + \alpha$  debería ser una *cota inferior* del conjunto  $A$ , pero

$$\alpha = 0 + \alpha < \alpha + \alpha$$

entonces  $\alpha$  *no sería la máxima cota inferior* de  $A$  (absurdo!).

Figura 5.

## GENERALIZACION DE LOS NUMEROS

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\overline{\mathbb{R}^*}$
Orden (Desigualdad)	<	<	<	<	<	<
Operaciones algebraicas	$+, \cdot$	$\{+, \cdot, -, \div\}$	no hay operaciones algebraicas			
Propiedad analítica (existencia de límites)		no completo	completo	no completo	completo	
Números infinitesimales.				si hay	si hay	

\* \*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Robinson A., *Non-Standard Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1966.
- [2] Mejía Victor, *Conjunto ordenado sin estructuras algebraicas*, Matemática Enseñanza Universitaria, N° 23 junio de 1982.
- [3] Takeuchi Y., *Funciones no-estándar y Teoría de Distribuciones*, Revista Col. de Matemáticas, Vol. XVIII, N°s 3-4, 1983.
- [4] Takeuchi Y., *Teoría de Funciones No-estándar*, Univ. Nal. de Colombia, Bogotá, 1983.

- [5] Takeuchi Y., *Una noción de filtros*, Boletín de Matemáticas, Vol.XII, N°s 4-6 Dic. 1978.
- [6] Tellez J.I., *Un modelo no-estándar de Funciones Generalizadas*, Tesis de Magister, Universidad Nacional, 1982.
- [7] Villa Dumar, *Una ojeada al Análisis no-estándar*, Matemática, Enseñanza Universitaria, N° 8 dic. 1978.
- [8] Villa Dumar, *Los hiperreales como ultrapotencia de  $\mathbb{R}$* , Matemática, Enseñanza Universitaria, N° 9, febrero 1979.

\*

Universidad Nacional de Col.

Departamento de Matemáticas

BOGOTA. D.E. Colombia.