Boletín de Matemáticas
Vol. XVI , No. 1 , (1982) pags, 9 - 69

CIERTOS TOPICOS DE LA TOPOLOGIA DEL ORDEN

Victor MEJIA B.

Introducción

En la tesis que presenté , para obtener el título de Magister Scientiae , estudié las propiedades que cumplía cualquier conjunto totalmente ordenado $\mathbb{F}$ sin estructura algebraica . Obtuve resultados relacionados ante todo con el análisis real , como la completez y muchas propiedades deducibles de ella , también obtuve ciertos resultados sobre convergencia de sucesiones en este conjunto .

Un tiempo después tuve la siguiente inquietud : cuál topología sería más útil para $\mathbb{F}$? . Creo que el lector coincida conmigo al responder que dicha topología es la topología del orden o del intervalo , puesto que lo único que se tiene a mano es un conjunto totalmente ordenado sin estructura algebraica . Es así como tomé un tal conjunto $\mathbb{F}$ (con dos elementos por lo menos) , lo doté de la topología del orden , y estudié en la forma más completa posible las propiedades que satisfacía esta topología . Este es el tema del trabajo que expongo a continuación , el cual creo que sea de mucho interés para los topólogos y , para los estudiantes que se inician en el estudio de la Topología , puesto que este es un tema muy poco tratado por los diferentes textos de esta rama de las matemáticas . Reitero que este trabajo va dirigido en especial a los estudiantes de pregrado de la carrera de matemáticas , y más concretamente , a los que están tomando la asignatura de Topología . A estos estudiantes les podría servir como lectura complementaria de su curso , puesto que constituye un ejemplo de como pueden aplicar los conocimientos adquiridos , para definir una topología, deducir la naturaleza de sus conjuntos abiertos , y , en fin , ir estudiando las propiedades que cumple o no cierta topología .

Es posible que para los especialistas en topología, el trabajo parezca elemental , y que sería deseable profundizar más . Si este es el caso , los remito al libro " Topology and order " de L. Nachbin , [11] , en el cual pueden encontrar un estudio muy avanzado y profundo sobre el tema .

En el próximo número de este Boletín , publicaré un artículo , como continuación del presente trabajo , y que se titulará " El completado de un conjunto ordenado ". En dicho artículo , que es un breve resumen de mi tesis , con algunas pequeñas variaciones , se mostrarán ciertas propiedades analíticas de un conjunto totalmente ordenado F sin estructura algebraica . Se puede entonces , pensar en dotar a este conjunto F de la topología del orden , y automáticamente se tendrá un estudio de buena parte de las propiedades analíticas y topológicas de tal conjunto F ; y de paso ver , por medio de este ejemplo (el conjunto F) , la estrecha relación que existe entre la Topología y el Análisis . Por esta razón , espero que este trabajo y el que aparecerá proximamente sean de interés, también , para los aficionados al estudio del Análisis Real .

CAPITULO I [+]

CONCEPTOS GENERALES

1. ORDEN

Sea X un conjunto abierto . Un orden parcial en X es una relación $\leq$ en X tal que para todo x, y, z en X se tiene :

i) $x \leq x$

ii) Si $x \leq y$, y, $y \leq x$ entonces $x = y$

iii) Si $x \leq y$, y, $y \leq z$ entonces $x \leq z$

Si para todo par de elementos x, y en X, se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$, entonces $\leq$ se llama orden total . Si $\leq$ es un ord total en X, entonces se dice que X es totalmente (o linealmente) ordenado . Si para $x, y \in X$ se tiene que $x \leq y$ pero $x \neq y$, entonces escribiremos $x < y$.

[+] Consideramos que la primera parte del presente artículo , aunque de un nivel bastante elemental , le proporciona una completez y coherencia interna que facilita su lectura sin necesidad de referencias externas .

Sea X un conjunto parcialmente ordenado y sea $E \subseteq X$. Un elemento a en X se dice una <u>cota superior</u> de E, en caso de que $x \leq a$, para todo x en E. Similarmente, a en X es una <u>cota inferior</u> de E si $a \leq x$, para todo x en E.

Sea X un conjunto parcialmente ordenado y sea $E \subseteq X$. Un elemento c en X se llama el <u>extremo superior</u> de E si :

i) c es una cota superior de E, y

ii) Si b es cualquier cota superior de E, entonces $c \leq b$.

Si c es el extremo superior de E, lo notaremos $c = \text{Sup}\, E$. De manera análoga se define el <u>extremo inferior</u> de E y si d es el extremo inferior de E, lo notaremos, $d = \text{Inf}\, E$.

Sea X un conjunto totalmente ordenado. Diremos que X tiene la <u>propiedad del extremo superior</u>, si todo subconjunto E de X, no vacío y acotado superiormente tiene extremo superior. Análogamente, X tiene la <u>propiedad del extremo inferior</u> si todo subconjunto E de X, no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior. En el siguiente teorema demostraremos que una de estas propiedades implica la otra , pero para la demostración de este teorema , necesitamos el siguiente lema :

LEMA 1.1

Sea X un conjunto totalmente ordenado y $S \subseteq X$, S no vacío y acotado superiormente y sea $\alpha = \text{Sup } S$. Si b en X es tal que $b < \alpha$, existe a en S tal que $b < a \leq \alpha$.

Demostración

Si para todo a en S , se tiene que $a \leq b$, entonces b es cota superior de S y $b < \alpha$, lo cual contradice el hecho de que $\alpha = \text{Sup } S$.

TEOREMA 1.2

Si todo subconjunto A de X , no vacío y acotado superiormente tiene extremo superior , entonces todo subconjunto B de X , no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior , y recíprocamente .

Demostración

Tomamos $B \subseteq X$, no vacío y acotado inferiormente . Sea $A = \{ a \in X \mid a$ es cota inferior de $B \}$; se tiene que $A \neq \emptyset$ y A es acotado superiormente , entonces por hipótesis , Sup A existe . Llamemos Sup A = α . Afirmamos que α = Inf B . En efecto : Supongamos que α no es cota inferior de B , entonces existe $b \in B$ tal que $b < \alpha$ y por el Lema 1.1 existe $a \in A$ tal que $b < a \leq \alpha$. Pero a es cota inferior de B y $b \in B$, por tanto $a \leq b$ (absurdo) . Luego α es cota inferior de B .

Ahora si c es cota inferior de B , entonces $c \in A$, luego $c \leq \alpha$. Por lo tanto concluímos que α = Inf B .

Existen muchos conjuntos que poseen la propiedad del extremo superior como el conjunto de los números reales y el conjunto de los números enteros , mientras que el conjunto de los números racionales no posee esta propiedad .

Ahora sea X parcialmente ordenado y $a,b \in X$ con $a < b$. Definimos el <u>intervalo cerrado</u> con extremos a y b , como el conjunto

$$[a,b] = \{ x \in X \mid a \leq x \leq b \}$$

El <u>intervalo abierto</u> con extremo a y b es el conjunto

$(a,b) = \{ x \in X \mid a < x < b \}$

El intervalo <u>semiabierto por la derecha</u> es el conjunto

$[a,b) = \{ x \in X \mid a \leq x < b \}$

El intervalo <u>semiabierto por la izquierda</u> es el conjunto

$(a,b] = \{ x \in X \mid a < x \leq b \}$

El conjunto $\{ x \in X \mid x \leq a \}$ se denotará por $(-\infty, a]$.

El conjunto $\{ x \in X \mid x < a \}$ se denotará por $(-\infty, a)$.

De manera análoga definimos $[a, \infty)$ y (a, ∞). A los "intervalos" $(-\infty, a]$ y $[a, \infty)$ los denominaremos <u>intervalos cerrados impropios</u> y a los "intervalos" $(-\infty, a)$ y (a, ∞) los llamaremos <u>intervalos abiertos impropios</u>.

Se dice que en un conjunto totalmente cerrado X posee un <u>orden completo</u> si y solo si todo subconjunto S no vacío de X tiene extremo superior y extremo inferior. Si el subconjunto S de X es acotado, existirán a y b en X tal que $\text{Sup } S = a$ y $\text{Inf } S = b$. Si el subconjunto S de X no es acotado , escribiremos $\operatorname{Sup} S = \infty$ e $\operatorname{Inf} S = -\infty$.

2. ESPACIOS TOPOLOGICOS

Un <u>espacio topológico</u> es un par (X, T) que consta de un conjunto X y de una colección T de subconjuntos de X , llamados <u>conjuntos abiertos</u> , que satisfacen los siguientes axiomas :

O_1 : La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto .

O_2 : La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto .

O_3 : El conjunto X y el conjunto vacío $\emptyset$ son conjuntos abiertos .

La colección T se llama una <u>topología</u> para X . El espacio topológico (A,T) se le denota sencillamente como X si se sobreentiende cual es la topología que posee .

Si T_1 y T_2 son topologías para un conjunto X, se dice que T_1 es <u>más débil</u> que T_2 si $T_1 \subseteq T_2$. También se dice que T_2 es <u>más fina</u> que T_1 y esta relación se la nota como $T_1 \leq T_2$. El orden $\leq$ es solamente un orden parcial , puesto que dos topologías pueden ser no-comparables .

En un espacio topológico (X, T) , se dice que un subconjunto de X es cerrado si es el complemento de un conjunto abierto de X . Es posible que un subconjunto de X , sea a la vez abierto y cerrado o que un subconjunto de X no sea ni abierto ni cerrado .

En un espacio topológico (X, T) , se llama conjunto F_σ a un conjunto que puede escribirse como la unión de una colección contable de conjuntos cerrados ; y se llama conjunto G_δ a un conjunto que puede escribirse como la intersección de una colección contable de conjuntos abiertos . El complemento de todo conjunto F_σ es un conjunto G_δ y recíprocamente . Como un conjunto de un solo elemento es , trivialmente , una colección contable de conjuntos , todo conjunto cerrado es un conjunto F_σ , pero no recíprocamente . Además , los conjuntos cerrados no necesariamente son conjuntos G_δ . Utilizando el complemento se muestra que afirmaciones análogas se sostienen para los conjuntos abiertos .

En un espacio topológico (X, T) , una vecindad

N_A de un conjunto A , donde A puede ser un conjunto que consta de un solo punto , es cualquier subconjunto de X que contiene un conjunto abierto que contiene a A . Si N_A es abierto , lo llamaremos vecindad abierta . Un conjunto que es una vecindad de cada uno de sus puntos es abierto , puesto que puede expresarse como la unión de los conjuntos abiertos que contienen cada uno de sus puntos .

Cualquier colección S de subconjuntos de X , puede ser usada como una subbase que genera una topología para X . Esto se logra tomando como conjuntos abiertos de T todos los conjuntos que pueden obtenerse por medio de la unión de intersecciones finitas de conjuntos de S , agregándoles $\emptyset$ y X . Si la unión de subconjuntos de una subbase S es el conjunto X y si cada punto que está en la intersección de dos elementos de la subbase pertenece también a un elemento de la subbase contenido en la intersección , S se llama una base para T . En este caso , T es la colección de todos los conjuntos que pueden escribirse como una unión de elementos de S . Si dos bases (o subbases) generan la misma topología se dice que ellas son equivalentes . Una base local en el punto $x \in X$ es una colección de vecindades abiertas de x con la propiedad de que todo abierto que contiene a x, contiene algún conjunto de la colección.

Dado un espacio topológico (X, T), una topología T_Y puede ser definida para cualquier subconjunto Y de X, tomando como abierto de T_Y, todo conjunto que sea la intersección de Y con un abierto de T. La dupla (Y, T_Y) se llama un subespacio de (X, T) y T_Y se llama la topología inducida (o relativa) para Y. Un conjunto $U \subseteq Y$, tiene una propiedad particular relativa a Y (como ser abierto relativo a Y) si U tiene la propiedad en el subespacio (Y, T_Y). Se dice que un conjunto Y tiene una propiedad que se ha definido solamente para espacios topológicos, si Y tiene la propiedad cuando se lo considera como un subespacio. Si dada una propiedad particular, todo subespacio tiene la propiedad, siempre que el espacio la tenga, la propiedad se llama hereditaria. Si todo subconjunto cerrado, considerado como un subespacio, tiene una propiedad siempre que el espacio tenga esa propiedad, la propiedad se llama débilmente hereditaria.

Un ejemplo importante de una propiedad débilmente hereditaria es la compacidad . Un espacio X se dice compacto si de todo cubrimiento abierto , esto es , una colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene a X, se puede seleccionar una subcolección finita cuya unión también contiene a X. Todo subconjunto cerrado Y de un espacio compacto es compacto , puesto que si $\{O_\rho\}$ es un cubrimiento abierto para Y, entonces $\{O_\rho\} \cup \{X - Y\}$ es un cubrimiento abierto para X. De $\{O_\rho\} \cup \{X - Y\}$ se puede escoger una subcolección finita que cubre a X; y de ésta , se puede escoger un cubrimiento apropiado para Y que contenga solamente elementos de $\{O_\rho\}$, simplemente omitiendo $X - Y$. Sin embargo un subconjunto compacto de un espacio compacto no es necesariamente cerrado .

Un punto p es un punto límite de un conjunto A si todo abierto que contiene a p, contiene al menos un punto de A distinto de p. (Si se suprime el requisito de que el punto de A sea distinto de p, entonces p se llama un punto de adherencia) .

El concepto de punto límite puede también definirse para sucesiones . Un punto p es un punto límite de una sucesión $\{x_n\}$ si todo abierto que contiene a p, contiene todos , salvo un número finito , de los términos de la sucesión . Si $\{x_n\}$ tiene un punto límite p , entonces se dice que ella converge al punto p . Si se pone una condición más débil sobre p , que todo abierto que contenga a p , contenga infinitos términos de la sucesión , p se llama un punto de acumulación de la sucesión . Es posible que una sucesión tenga un número no-contable de puntos límite ; que tenga un solo punto límite y un punto de acumulación que no es un punto límite ; o que tenga un solo punto de acumulación que no es un punto límite .

Si A es un subconjunto de un espacio topológico X , el conjunto derivado de A es la colección de todos los puntos límites de A y se denota por A' . Generalmente A' está formada por algunos puntos de A y por algunos puntos de su complemento . Cualquier punto de A que no está en A' se llama un punto aislado , puesto que debe estar contenido en un abierto que no contiene ningún otro punto de A . Si A no contiene puntos aislados , se dice que A es denso en si mismo . Si además A es cerrado , entonces se dice que A es perfecto .

La clausura de un conjunto A es el conjunto

$A \cup A'$ que se denota por $\bar{A}$. Dado que todo conjunto que contiene sus puntos límites es cerrado, la clausura de un conjunto puede definirse equivalentemente como el más pequeño conjunto cerrado que contiene a A. El <u>interior</u> de un conjunto A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A y se denota por A^{o}. Se puede definir el interior de A como el mayor conjunto abierto contenido en A. El interior de A es igual al complemento de la clausura del complemento de A.

El conjunto de los puntos que están en la clausura de un conjunto A, pero no en el interior de A, se llama la <u>frontera</u> de A y se denota por A^{b}. A^{b} es también igual a $\bar{A} \cap (\overline{X - A})$, puesto que

$$A^{b} = \bar{A} - A^{o} = \bar{A} \cap (\overline{X - A}) .$$

Un conjunto es cerrado si y solo si contiene a su frontera; y es abierto si y solo si es disyunto de su frontera. Por lo tanto, un conjunto es abierto y cerrado si y solo si su frontera es vacía. Una frontera es siempre cerrada puesto que ella es la intersección de dos conjuntos cerrados.

El <u>exterior</u> A^{e} de un conjunto A es el complemento de la clausura de A , ó equivalentemente , el interior del complemento de A .

Dos conjuntos A y B con la propiedad de que $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$, se llaman <u>separados</u> . Un conjunto A en un espacio topológico X es <u>conexo</u> si no puede expresarse como la unión de dos conjuntos separados .

Un conjunto A se dice <u>denso</u> en un espacio X si todo punto de X es un punto de A ó un punto límite de A , esto es , si $X = \bar{A}$. Un subconjunto A de X se dice <u>denso en ninguna parte</u> (o magro) en X si ningún conjunto abierto no vacío de X está contenido en $\bar{A}$. En otras palabras , el interior de la clausura de un conjunto magro es vacío . Un conjunto se dice de <u>primera categoría</u> en X si es la unión de una colección contable de subconjuntos magros de X . Cualquier otro conjunto , se llama <u>de segunda categoría</u> .

Un espacio se dice separable si contiene un subconjunto denso y contable . Se dice que es completamente <u>separable</u> si tiene una base contable . Por otra parte , un espacio es <u>1-contable</u> si en cada punto p del espacio hay una base local contable , esto es , una colección contable de vecindades abiertas de p , tal que cada abierto que contiene a p , contiene a un miembro de la colección . Todo espacio completamente separable es 1-contable y separable . El hecho de ser completamente separable implica la 1-contabilidad , mientras que la separabilidad se sigue de la observación de que la unión formada por un punto de cada elemento de la base forma un subconjunto denso contable .

La propiedad de ser 1-contable y la propiedad de ser completamente separable son hereditarias , pero la de ser separable no es ni débilmente hereditaria .

Una función f de un espacio (X, T_1) en un espacio (Y, T_2) se dice <u>continua</u> si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierta . Esto es equivalente a requerir que la imagen inversa de un conjunto cerrado sea cerrada o que para cada subconjunto A de X, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Otra condición equivalente es que para cada x en X y para toda vecindad N de f(x) , existe una vecindad M de x tal que $f(M) \subseteq N$. Si esta última condición se cumple para un punto particular p , se dice que la función es <u>continua en el punto</u> p .

Una función f de (X, T_1) en (X, T_2) se dice abierta si la imagen bajo f de cada conjunto abierto es abierta , y cerrada si la imagen bajo f de todo conjunto cerrado es cerrada . Si la función es biyectiva las condiciones de ser abierta y de ser cerrada son equivalentes , pero en general , no lo son . No es difícil ver que f es una función biyectiva abierta si y solo si f^{-1} es una función biyectiva y continua .

Una función biyectiva f de X en Y es un homeomorfismo si f y f^{-1} son continuas , o equivalentemente , si f es continua y abierta , o si $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$. Si una tal función f existe , se dice que X y Y son homeomórficos o topológicamente equivalentes . Una propiedad es una propiedad topológica o un invariante topológico si siempre que un espacio posee una propiedad dada , cualquier espacio homeomórfico , también posee la misma propiedad .

3. AXIOMAS DE SEPARACION

Es deseable para un topólogo poder asignar a un conjunto de objetos , una topología , gran parte de cuyas propiedades se conocen de antemano . Esto se puede hacer exigiendo que la topología satisfaga ciertos axiomas adicionales da aquellos que generalmente se requieren para espacios topológicos .

Una cierta colección de condiciones está dada por medio de los axiomas llamados T_i o axiomas de separación. Estos estipulan el grado por el cual puntos distintos o conjuntos cerrados pueden <u>separarse por conjuntos abiertos</u> .

Sea (X, T) un espacio topológico .

Axioma T_0 : Para dos puntos distintos a, b en X , existe un conjunto abierto $O \in T$ tal que

$$a \in O \text{ y } b \notin O , \text{ ó } b \in O \text{ y } a \notin O .$$

Axioma T_1 : Para dos puntos distintos a , b en X , existen conjuntos abiertos O_a , $O_b \in T$ que contienen a a y b respectivamente , y tales que

$$b \notin O_a \text{ y } a \notin O_b .$$

Axioma T_2 : Para dos puntos distintos a , b en X , existen conjuntos abiertos disyuntos O_a y O_b que contienen a a y b respectivamente .

Axioma T_3 : Si A es un conjunto cerrado y b no pertenece a A , existen conjuntos abiertos disyuntos

O_A y O_b que contienen a A y b respectivamente .

Axioma T_4 : Si A y B son conjuntos cerrados disyuntos en X , existen conjuntos abiertos disyuntos O_A y O_B que contienen a A y B respectivamente .

Axioma T_5 : Si A y B son conjuntos separados en X , existen conjuntos abiertos disyuntos O_A y O_B que contienen a A y B respectivamente .

Si (X, T) satisface un axioma T_i , X se llama <u>un espacio T_i</u> . Un espacio T_o se llama a veces <u>un espacio de Kolmogorov</u> , un espacio T_1 se llama un <u>espacio de Fréchet</u> , y es común llamar a un espacio T_2 , <u>espacio de Hausdorff</u> .

Observamos que los espacios T_o se caracterizan por el hecho de que , para cualquier par de puntos , uno de ellos no puede ser punto límite del otro . Similarmente , los espacios T_1 están caracterizados porque sus puntos son conjuntos cerrados , y los espacios T_2 porque sus puntos son la intersección de las vecindades cerradas de dichos puntos . Los espacios T_3 pueden caracterizarse por el hecho de que cada conjunto abierto contiene una vecindad cerrada alrededor de cada uno de sus puntos , o por la propiedad de que cada conjunto cerrado es la intersección de sus vecindades cerradas . Un espacio es T_4 si y solo si todo conjunto abierto O contiene una vecindad cerrada de cada conjunto cerrado contenido en O . Un espacio es T_5 si y solo si todo subconjunto Y contiene una vecindad cerrada de cada conjunto $A \subseteq Y^o$, donde $\bar{A} \subseteq Y$.

Cada uno de estos axiomas es independiente de los axiomas para un espacio topológico . En efecto , existen ejemplos de espacios topológicos que no satisfacen ningún axioma T_i . Sin embargo no son independientes entre sí, puesto que , por ejemplo , el axioma T_2 implica el axioma T_1 y éste a su vez implica al axioma T_o . Existen , por otro lado , espacios T_o que no satisfacen ningún otro axioma de separación , y espacios T_1 que no satisfacen ningún otro axioma de separación , salvo el axioma T_o . Similarmente , hay espacios T_2 que no satisfacen los axiomas T_3 , T_4 ó T_5 . Mas aún , ni el axioma T_3 ni el axioma T_4 implican otro axioma de separación y en general , tampoco son implicados por otro axioma de separación , aunque para espacios compactos , T_2 implica T_4 pero no T_5 . El axioma T_5

implica T_4 , aunque es independiente de los otros axiomas de separación . Más importante que los axiomas de separación , es el hecho de que éstos pueden emplearse para definir , sucesivamente , propiedades más fuertes . Por ejemplo , notamos que si un espacio es T_3 y T_o , entonces es T_2 .

Definimos a continuación ciertas propiedades utilizando los axiomas de separación . Un espacio X se dice regular si y solo si es un espacio T_o y T_3 ; se dice que es normal si y solo si es un espacio T_1 y T_4 ; y se dice que es completamente normal si y solo si es un espacio T_1 y T_5 . De esta manera , tenemos la siguiente sucesión de implicaciones :

Completamente normal $\Rightarrow$ Normal $\Rightarrow$ Regular $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_o$

El uso de los términos "regular" y "normal" no es uniforme en los textos matemáticos . Algunos autores usan estos términos para designar a los espacios T_3 y T_4 respectivamente .

Ahora introducimos dos variaciones de las propiedades de separación . En la primera utilizamos vecindades cerradas en lugar de conjuntos abiertos en los axiomas T_2,

T_3 y T_4 .

Como en los espacios normales todo conjunto abierto O contiene una vecindad cerrada de cada conjunto cerrado contenido en O , observamos que si X es un espacio normal y si A y B son subconjuntos cerrados disyuntos , existen abiertos O_A y O_B que contienen a A y B respectivamente , tales que $\overline{O}_A \cap \overline{O}_B = \emptyset$. Así el uso de vecindades cerradas en lugar de conjuntos abiertos en la definición de un espacio normal , nos conduce a la misma clase de espacios .

Similarmente , si X es un espacio regular , A un subconjunto cerrado y $b \in X - A$, entonces existen abiertos O_A y O_b que contienen a A y b respectivamente tales que $\overline{O}_A \cap \overline{O}_b = \emptyset$. Sin embargo , existen espacios de Hausdorff que tienen dos puntos los cuales no tienen vecindades cerradas disyuntas . Por esta razón damos el siguiente nuevo axioma :

Axioma $T_{2\ 1/2}$:

Si a y b son dos puntos de un espacio topológico X , existen abiertos O_a y O_b que contienen a a y b respectivamente , tales que

$\overline{O}_a \cap \overline{O}_b = \emptyset$.

Es claro que todo espacio regular es $T_{2\ 1/2}$ y todo espacio $T_{2\ 1/2}$ es de Hausdorff .

La segunda variación de los axiomas de separación tiene que ver con la existencia de ciertas funciones continuas de valor real . Sean A y B subconjuntos disyuntos de un espacio X . Una <u>función de Urysohn</u> para A y B es una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$.

El famoso lema de Urysohn afirma que si A y B son subconjuntos cerrados disyuntos de un espacio T_4 , entonces existe una función de Urysohn para A y B . Recíprocamente , si hay una función de Urysohn para cualquier par de conjuntos A y B cerrados y disyuntos en un espacio X , entonces X es un espacio T_4 . Pero la existencia de una tal función no garantiza que el espacio X sea T_1 y por lo tanto tampoco garantiza que sea normal .

Sin embargo , la afirmación análoga al Lema de Urysohn , para espacios regulares es falsa , así que daremos un nuevo axioma de separación :

Axioma $T_{3\ 1/2}$:

Si A es un subconjunto cerrado de un espacio X y b es un punto que no está en A , entonces hay una función de Urysohn para A y $\{b\}$.

De esta manera , todo espacio $T_{3\ 1/2}$ es un espacio T_3 , aunque no necesariamente un espacio T_2 a menos que sea un espacio T_o . Un espacio que sea T_o y $T_{3\ 1/2}$ se llama <u>completamente regular</u> o de <u>Tychonoff</u> . Por lo tanto , los espacios completamente regulares son regulares , de Hausdorff y por consiguiente T_1 . Como los puntos son cerrados en los espacios normales , se sigue del Lema de Urysohn que los espacios normales son completamente regulares .

Todas las propiedades de separación son propiedades topológicas , esto es , éllas se conservan bajo homeomorfismos .

Un espacio con una función de Urysohn para cualquier par de puntos se llama un <u>espacio de Urysohn</u> .

Un espacio T_4 en el cual todo conjunto cerrado es un G_δ a menudo se llama <u>perfectamente T_4</u> . Un espacio perfectamente T_4 que es también T_1 se llamá <u>perfectamen</u>

te normal .

4. COMPACIDAD

Un espacio puede satisfacer un cierto axioma de separación solamente si la topología contiene suficientes conjuntos abiertos para proveer de vecindades disyuntas a ciertos conjuntos disyuntos . La compacidad , en cambio , limita el número de conjuntos abiertos en una topología porque todo cubrimiento de un espacio topológico compacto debe contener un subrecubrimiento finito .

Un espacio topológico X es compacto si todo cubrimiento abierto contiene un subrecubrimiento finito ; equivalentemente , X es compacto si satisface la propiedad de la intersección finita , esto es , si toda familia de subconjuntos cerrados cuya intersección es vacía contiene una subfamilia cuya intersección es vacía . Esto se verifica puesto que si $\{A_\lambda\}$ es cualquier familia de conjuntos cerrados tal que $\bigcap A_\lambda = \emptyset$ entonces $\{X - A_\lambda\}$ es un cubrimiento abierto que tiene un subrecubrimiento finito $\{X - A_{\lambda_K} | K \leq n\}$. Por las leyes de Morgan , $X - \bigcup (X - A_{\lambda_K}) = \emptyset$ si y solo si $\bigcap A_{\lambda_K} = \emptyset$. Recíprocamente , si la familia $\{O_\lambda\}$ es un cubrimiento abierto de X , entonces como $\bigcap (X - O_\lambda) = \emptyset$, existe una subfamilia finita tal que $\bigcap_{K=1}^{n} (X - O_{\lambda_K}) = \emptyset$. Por las leyes de Morgan , $\bigcup_{K=1}^{n} O_{\lambda_K} = X$. Una condición equivalente para la compacidad relacionada con la subbase , está dada por el Teorema de Compacidad de Alexander que afirma : Si un espacio topológico X tiene una subbase S tal que de cada cubrimiento de X por elementos de S , se puede seleccionar un subrecubrimiento finito , entonces X es compacto .

Se pueden obtener dos generalizaciones de compacidad debilitando las exigencias de que los recubrimientos sean finitos . Un espacio topológico se llama <u>σ-compacto</u> si es la unión de un número contable de conjuntos compactos , mientras que un espacio se llama de <u>Lindelöf</u> si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento contable. Claramente , todo espacio compacto es σ-compacto y todo espacio σ-compacto es de Lindelöf .

Un espacio topológico se llama <u>contablemente compacto</u> si satisface cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes :

a) Todo cubrimiento abierto contable de X tiene un subrecubrimiento finito .

b) Toda sucesión tiene un punto de acumulación en X .

c) Toda colección contable de conjuntos cerrados cuya intersección es vacía , tiene una subfamilia finita cuya intersección es vacía .

Aunque las anteriores propiedades de compacidad implican indirectamente limitaciones sobre el número de conjuntos abiertos en una topología , los axiomas de contabilidad introducidos anteriormente limitan directamente el número de conjuntos abiertos por restricción sobre el número de elementos de la base . Hay tres propiedades principales de contabilidad :

(1) Un espacio topológico es <u>separable</u> si contiene un subconjunto denso contable ;

(2) Un espacio topológico es <u>completamente separable</u> (ó 2-contable) si tiene una base contable ;

(3) Un espacio topológico es <u>1-contable</u> si el sistema de vecindades de todo punto tiene una base local contable .

Claramente todo espacio completamente separable es

1-contable , separable y de Lindelöf , aunque ninguna de las implicaciones inversas se cumple . Una propiedad especial estrictamente más débil que la separabilidad es la condición de la cadena contable , la cual requiere que toda familia disyunta de conjuntos abiertos sea contable .

Un cubrimiento $\{V_p\}$ de un espacio X es un refinamiento de un cubrimiento $\{U_\lambda\}$ si para cada V_p hay un U_λ tal que $V_p \subseteq U_\lambda$. Se dice que un cubrimiento es de punto finito si cada punto pertenece solamente a un número finito de conjuntos en el cubrimiento ; y que es localmente finito si cada punto tiene alguna vecindad que interseca solamente un número finito de miembros del cubrimiento .

Un espacio se llama metacompacto (o a veces paracompacto puntualmente) si todo cubrimiento abierto tiene un refinamiento abierto de punto finito ; y se llama paracompacto si todo cubrimiento abierto tiene un refinamiento abierto localmente finito .

5. CONEXIDAD

La conexidad niega la existencia de ciertos subconjuntos de un espacio topológico que cumplen con la propiedad de que $\overline{U} \cap V = \emptyset$ y $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Cualquier par de estos subconjuntos se llaman <u>separados</u> .

Dos conjuntos abiertos U y V constituyen una <u>separación</u> de un espacio topológico X si

$$U \cap V = \emptyset \quad y \quad X = U \cup V ;$$

si un espacio no tiene una separación no trivial se llama <u>conexo</u> . Equivalentemente , X es conexo si y solo si no es la unión de dos conjuntos separados ; o si no es la unión de dos conjuntos cerrados y disyuntos ; o si no contiene conjuntos no triviales que sean al mismo tiempo abiertos y cerrados ; o si no existe una función continua de X sobre el conjunto de dos puntos , con la topología discreta . Un espacio conexo X , se dice <u>degenerado</u> si consta de un solo punto . Un subconjunto de un espacio topológico X es un <u>conjunto conexo</u> si no es la unión de dos subconjuntos separados de X , o equivalentemente , si satisface la definición de espacio conexo bajo la topología inducida . Dos puntos de X son <u>conexos en X</u> si existe un conjunto conexo que los contiene. Esta relación entre los puntos de un espacio es una relación de equivalencia , puesto que la unión de cualquier familia de conjuntos conexos cuya intersección no es vacía es conexa . Las clases de equivalencia disyuntas de puntos de X bajo la relación " conexo en X " se llaman <u>las componentes</u> de X . Las componentes de X son precisamente los subconjuntos conexos maximales de X , y éllos deben ser cerrados puesto que la clausura de todo conjunto conexo es conexa . Esto se muestra observando que cualquier separación de $\bar{E}$ debe separar E ó separar E de algunos de sus puntos límites . (Así se muestra además que si $E \subseteq F \subseteq \bar{E}$ y E es conexo , entonces F es conexo) .

CAPITULO II
TOPOLOGIA DEL ORDEN

En este capítulo que trata el tema central del trabajo , construímos la topología del orden para un conjunto totalmente ordenado , demostramos en seguida algunas de las principales propiedades de que goza este espacio topológico , y finalmente damos algunos contraejemplos para demostrar que la topología del orden no satisface , como es de suponer , todas las propiedades topológicas .

Para comenzar consideremos la hipótesis de que X es un conjunto , totalmente ordenado por $\leq$, y que posee al menos dos elementos .

En primer lugar construímos la topología del orden o topología del intervalo , demostrando el siguiente teorema :

TEOREMA 2.1

La familia $S = \{ (a, \infty), (-\infty, b) \mid a, b \in X \}$ de los intervalos abiertos impropios de X , es una subbase para una topología T_o , la cual se llama la <u>topología del orden</u> (o <u>topología del intervalo</u>) de X .

Demostración

Como X consta de al menos dos elementos , entonces todo $x \in X$, pertenece al menos a uno de los intervalos de la forma $(-\infty, b)$ ó (a, ∞) y así S es una subbase para una topología sobre X .

La base $\mathbb{B}_o$ para esta topología T_o , consta de todas las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $(-\infty, b)$ ó (a, ∞) ; por lo tanto es claro que $\mathbb{B}_o$ consta de los intervalos abiertos (a,b) (propios o impropios) . Si X no tiene elemento máximo , ni elemento mínimo entonces la topología puede ser generada por una base constituída por todos los intervalos abiertos pro pios (a,b) en X . Este es el origen del nombre de topología del intervalo .

Por ejemplo , si X es el conjunto de los números reales y si $\mathbb{B}_o$ es la familia de todos los intervalos abiertos propios , entonces una topología está generada sobre X por $\mathbb{B}_o$ y se llama la <u>topología usual de los reales</u> . La misma topología (en $\mathbb{R}$) se puede obtener por diferentes métodos , por ejemplo , introduciendo una métrica . Similarmente , podemos considerar que X es la familia de subconjuntos del conjunto de números reales y formar las topologías del orden sobre estos conjuntos . Algunos de éstos , serán triviales , por ejemplo , si X es el conjunto de los enteros , entonces la topología del orden es la topología discreta .

TEOREMA 2.2

(Estructura de los abiertos) . Sea X totalmente ordenado y tal que esta relación de orden , cumple la propiedad de ser un orden completo . Entonces O es abierto relativo a la topología del orden si y solo si es la unión de una familia de intervalos abiertos disyuntos .

Demostración

Sea $x \in O$ y sea $S \subseteq O$ el conjunto de todos aquellos puntos $\lambda \in O$ para los cuales $[x,\lambda] \subseteq O$. Entonces $S \neq \emptyset$ y por tanto tiene un extremo superior u propio o impropio. Tenemos que $S = [x,u]$ ó $S = [x,u)$ de acuerdo a que u pertenezca o no a S. Si $u \notin S$, sea $b_x = u$, así que $b_x \in X$ ó b_x denota el elemento impropio $+\infty$ y $S = [x, b_x)$. Si $u \in S$ entonces $u \in O$ y así hay un intervalo (a,b) tal que $u \in (a,b) \subseteq O$. Luego no existe $\lambda \in X$ que satisfaga $u < \lambda < b$, puesto que como $(a,b) \subseteq O$ un tal λ debería pertenecer a S y así sería un elemento más grande que el extremo superior. Por lo tanto, escogiendo $b_x = b$ de nuevo tenemos que $S = [x,b_x)$.

Ahora consideremos el conjunto $T \subseteq O$ de aquellos puntos $\lambda \in O$ para los cuales $[\lambda,x] \subseteq O$. De manera similar a la anterior podemos encontrar un elemento a_x propio o impropio tal que $T = (a_x,x]$. En consecuencia, para cualquier $x \in O$, encontramos elementos extremos a_x y b_x tal que $x \in S \cup T = (a_x,b_x) \subseteq O$. Si $x \neq y$ entonces $a_x = a_y$ y $b_x = b_y$, ó, los intervalos abiertos (a_x, b_x) y (a_y, b_y) son disyuntos. Por lo tanto $\{(a_x, b_x) \mid x \in O\}$ es una familia de intervalos abiertos disyuntos cuya unión es el conjunto abierto O .

Es claro que los intervalos cerrados son los conjuntos cerrados para esta topología .

TEOREMA 2.3

La topología del orden para X es la topología menos fina en la cual el orden es continuo , en el siguiente sentido : si $a,b \in X$ y $a < b$ entonces hay vecindades U de a y V de b tales que , siempre que $x \in U$ y $y \in V$ entonces $x < y$.

Demostración

Como $a < b$ entonces puede ocurrir :

1) Existe $c \in X$ tal que $a < c < b$, ó , 2) No existe ningún $c \in X$ tal que $a < c < b$. Si ocurre el caso 1) , tomamos $U = (-\infty, c) \in \mathbb{B}_o$ y $V = (c, \infty) \in \mathbb{B}_o$, (donde $\mathbb{B}_o$ es la base de T_o) y se verifica que si $x \in U$, entonces $x < c$ y si $y \in V$ entonces $c < y$, luego $x < y$. Si ocurre el caso 2) , tomamos $U = (-\infty, b) \in \mathbb{B}_o$ y $V = (a, \infty) \in \mathbb{B}_o$ y se verifica que si $x \in U$, entonces $x < b$ y si $y \in V$, entonces $y > a$, luego afirmamos que $x < y$ ya que si $x \nless y$, entonces $y < x$ ó $x = y$, y $a < y < x < b$ ó

$a < y = x < b$, lo cual es una contradicción a la hipótesis 2) .

Consideremos ahora una topología T sobre X que haga continuo el orden . Vamos a ver que $T \supseteq T_o$. Para ello basta ver que todo elemento de la base $\mathbb{B}_o$ de T_o es un abierto de la topología T . Sea $(a,b) \in \mathbb{B}_o$ entonces si $b \in (a, \infty)$ se tiene que $a < b$; como $a < b$ y T hace continuo el orden , existen abiertos $U'(a)$ y $V'(b)$ de T que contienen a a y b respectivamente y tales que siempre que $x \in U'(a)$ y $y \in V'(b)$ entonces $x < y$. Veamos que $V'(b) \subseteq (a, \infty)$. En efecto , sea $y \in V'(b)$, entonces $y \in V'(b)$ y $a \in U'(a)$ implican que $a < y$, por tanto $y \in (a, \infty)$, luego $V'(b) \subseteq (a, \infty)$. De donde $(a, \infty) = \bigcup_{b \in (a,\infty)} V'(b) \in T$
Se puede ver , de manera similar a la anterior , que $(-\infty , b) \in T$, y finalmente

$$(a,b) = (-\infty , b) \cap (a, \infty) \in T .$$

Luego $\mathbb{B}_o \subseteq T$ y por lo tanto $T_o \subseteq T$.

Con la topología del orden ocurre el caso siguiente : si X es un conjunto totalmente ordenado por $\leq$ y si $Y \subseteq X$, entonces Y es totalmente ordenado por

$\leq$; pero la topología del orden en Y no coincide, en general, con la topología relativa a Y de la topología del orden de X. Para ver que estas dos topologías de Y efectivamente difieren, basta dar un ejemplo donde tal cosa ocurra. Sea entonces $X = \mathbb{R}$ con el orden usual, y

$$Y = (-\infty, -1) \cup \{0\} \cup (1, \infty) \subseteq \mathbb{R}.$$

En la topología relativa, el $\{0\}$ es abierto pues

$$\{0\} = (-1, 1) \cap Y$$

pero no puede ser reunión de intervalos de Y de las formas (a, ∞), $(-\infty, b)$ y (c, d). Luego $\{0\}$ no es abierto en la topología del orden de Y.

Sin embargo, si ponemos ciertas restricciones las dos topologías coinciden. En efecto tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 2.4

Sea X un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden. Sea Y un subconjunto de X tal que si x está en X y y en Y donde $x \neq y$, el intervalo abierto determinado por x y y, contiene puntos de Y. Entonces la topología inducida sobre Y es la topología del orden de Y.

Demostración

Es claro que la familia

$\{ (a,b) \cap Y \mid a,b \in X \cup \{-\infty, \infty\}\}$ es una base para la topología inducida sobre Y. Si la hipótesis se satisface, entonces todo $(a,b) \cap Y$ se puede expresar como una unión de intervalos abiertos en Y y así las dos topologías son idénticas.

DEFINICION 2.5

Sea X un espacio topológico, con la topología del orden. Sea $S \subseteq X$. Diremos que S es convexo si para todo a,b en S y t tal que $a < t < b$, entonces t está en S.

Este concepto y el de intervalo en X son diferentes. Claramente, todo intervalo es convexo, pero no recíprocamente.

La unión de cualquier colección de conjuntos convexos con intersección no vacía, es convexa. Luego cualquier subconjunto S de X puede expresarse de manera única como una unión de conjuntos convexos maximales, disyuntos, no vacíos. Estos conjuntos se llaman las componentes convexas. La componente de S que contiene el punto p de S, es precisamente la unión de todos los subconjuntos convexos de S que contienen a p.

El teorema que vemos en seguida es importante, puesto que con él, practicamente quedan estudiados todos los axiomas de separación para un espacio topológico X con la topología del orden.

TEOREMA 2.6

El espacio topológico X con la topología del orden es un espacio completamente normal.

Demostración

Supongamos que A y B son subconjuntos separados de X. Sean

$$A^{\sim} = \bigcup \{ [a,b] \mid a, b \in A , [a,b] \cap \bar{B} = \emptyset \} \quad y$$
$$B^{\sim} = \bigcup \{ [a,b] \mid a, b \in B , [a,b] \cap \bar{A} = \emptyset \}$$

Entonces $A \subseteq A^{\sim}$, puesto que para $a \in A$, $[a,a] = \{a\}$ es disyunto de $\bar{B}$. Además $A^{\sim} \cap B^{\sim} = \emptyset$, porque si $p \in A^{\sim} \cap B^{\sim}$ entonces deben existir puntos $a,b \in A$ y $c,d \in B$ tal que $p \in [a,b] \cap [c,d]$. Pero como $c \notin [a,b]$ y $d \notin [a,b]$ y $a \notin [c,d]$ y $b \notin [c,d]$, debemos tener que $[a,b] \cap [c,d] = \emptyset$.

Afirmamos además que $A^{\sim}$ y $B^{\sim}$ son separados. En efecto , observamos primero que $\overline{A^{\sim}} \subseteq A^{\sim} \cup \overline{A}$. Porque si suponemos que $p \notin A^{\sim} \cup \overline{A}$, entonces debe existir un intervalo abierto (s, t) disyunto de A y tal que $p \in (s, t)$. El intervalo (s, t) intersecará $A^{\sim}$ solamente si interseca algún intervalo $[a,b] \subseteq A$, donde $a, b \in A$. Pero como $(s, t) \cap A = \emptyset$ y $a,b \in A$, entonces $(s, t) \subseteq (a,b)$, lo cual implicaría que $p \in A^{\sim}$. Pero como $p \notin A^{\sim}$ debemos tener que $(s, t) \cap A^{\sim} = \emptyset$. Por lo tanto $p \notin \overline{A^{\sim}}$. Luego

$$\overline{A^{\sim}} \cap B^{\sim} \subseteq (A^{\sim} \cup \overline{A}) \cap B^{\sim} = (A^{\sim} \cap B^{\sim}) \cup (\overline{A} \cap B^{\sim}) = \emptyset$$

Ahora escribiremos $A^{\sim}$, $B^{\sim}$ y el complemento de $A^{\sim} \cup B^{\sim}$ como la unión de l.. componentes convexas ,

$$A^{\sim} = \bigcup A_{\lambda} \ , \ B^{\sim} = \bigcup B_{\rho} \quad \text{y} \quad (A^{\sim} \cup B^{\sim})' = \bigcup C_{\delta} \ .$$

La colección $M = \{ A_{\lambda}, B_{\rho}, C_{\delta} \}$ hereda un orden lineal de X y es , por lo tanto , un conjunto totalmente ordenado. Afirmamos que en el conjunto M , cada uno de los conjuntos A_{λ} (y similarmente cada uno de los conjuntos B_{ρ}) tiene un sucesor inmediato siempre que la intersección de A_{λ} y la clausura de S_{λ} no sea vacía , donde S_{λ} es el conjunto de las cotas superiores estrictas para A_{λ} . En este caso podemos mostrar que el sucesor de A_{λ} es un elemento de $\{ C_\delta \}$ que denotaremos por C_λ^+ . Para ello supongamos que $A_\lambda \cap \overline{S}_\lambda \neq \emptyset$, entonces $A_\lambda \cap \overline{S}_\lambda$ contiene precisamente un punto , digamos p , que pertenece al complemento del conjunto cerrado $\overline{B}^\sim$, así que existe una vecindad (x,y) de p , disyunta de $\overline{B}^\sim$. Entonces $(x,y) \cap S_\lambda \neq \emptyset$, de donde $(p,y) \neq \emptyset$. Pero (p,y) es disyunta de $A^\sim$ y de $B^\sim$, por lo tanto debe existir un conjunto C_δ que contiene a (p,y) . En el orden lineal de M , C_δ es el sucesor inmediato de A_λ y lo llamaremos C_λ^+ . Ahora para cada δ , elegimos y fijamos algún punto $k_\delta \in C_\delta$. Entonces siempre que $A_\lambda \cap \overline{S}_\lambda \neq \emptyset$, existe un único $k_\lambda^+ \in C_\lambda^+$, el sucesor inmediato de A_λ . En tal caso , sea $I_\lambda = [p, k_\lambda^+)$ donde $p \in A \cap \overline{S}_\lambda$. Si $A \cap \overline{S}_\lambda = \emptyset$, sea $I_\lambda = \emptyset$. Definimos J_λ similarmente para las cotas inferiores estrictas de A_λ (usando la misma colección de puntos $k_\delta \in C_\delta$) . Entonces para cada λ , sea $U_\lambda = J_\lambda \cup A_\lambda \cup I_\lambda$ y similarmente para cada ρ , sea $V_\rho = J_\rho \cup B_\rho \cup I_\rho$. Cada U_λ y cada V_ρ es claramente un conjunto abierto convexo que contiene a A_λ y B_ρ respectivamente . De esta manera $U = \cup U_\lambda$ y $V = \cup V_\rho$ son conjuntos abiertos que contienen a $A^\sim$ y $B^\sim$. Como ningún A_λ interseca a ningún B_ρ y el uso del mismo k_δ desde el principio , implica que ningún J_ρ ó I_ρ podrá intersecar ningún J_λ ó I_λ , es claro que ningún U_λ podrá intersecar ningún V_ρ . Luego $U \cap V = \emptyset$, y por lo tanto X es T_5 . Como los puntos de X son claramente cerrados , X es T_1 , y por lo tanto es completamente normal .

Corolario

El espacio topológico X con la topología del orden es normal , regular , de Tychonoff , de Hausdorff , $T_{2\ 1/2}$ y T_o .

Demostración

Es clara .

Estudiamos ahora la compacidad del espacio topológico X mediante el siguiente teorema .

TEOREMA 2.7

El espacio topológico X con la topología del orden , es compacto si y solo si el orden es completo .

Demostración

La condición es necesaria , porque si $A \subseteq X$ y si A no tiene extremo superior , entonces los conjuntos $P_\lambda = \{ x | x < \lambda \}$ y $S_\rho = \{ x | x > \rho \}$ para $\lambda \in A$ y ρ una cota superior de A, cubren X, pero ellos no contienen un subrecubrimiento finito. Para probar la suficiencia, necesitamos solamente considerar, para cualquier cubrimiento abierto C de X, el conjunto S de aquellos elementos $y \in X$ para los cuales $[a,y)$ (donde $a = \inf X$) puede ser cubierto por un número finito de elementos de C. Si $\lambda = \text{Sup } S$ y si $\lambda \in U \in C$, entonces $U \subseteq S$. Entonces existe, a menos que $\lambda = \text{Sup } S$, un intervalo $(x,y) \subseteq U$ tal que $\lambda \in (x,y)$. Luego $(\lambda,y) = \emptyset$, puesto que $\lambda = \text{Sup } S$. Pero esto significa que $y \in S$, lo cual es imposible. Por lo tanto $S = X$.

Pasamos ahora a estudiar la conexidad del espacio topológico X, con la topología del orden.

DEFINICION 2.8

Se dice que X contiene <u>dos puntos consecutivos</u> si algún intervalo (a,b), $a < b$, en X es vacío.

Si X contiene dos puntos consecutivos a y b, entonces X puede ser separado por $\{ x | x \leq a \}$ y por $\{ x | x \geq b \}$. Similarmente si X contiene un conjunto acotado A sin extremo superior , el conjunto de las cotas superiores de A y su complemento , separan a X . Tenemos por lo tanto el siguiente teorema .

TEOREMA 2.9

El espacio topológico X es conexo , solamente si no contiene puntos consecutivos y si todo subconjunto acotado tiene extremo superior .

Nota

Estas condiciones son , en efecto , suficientes y a menudo se resumen en el Axioma de Cortaduras de Dedekind , que dice : " Si A y B son subconjuntos de X , no vacíos , disyuntos , cuya unión es X y si todo punto de A es menor que todo punto de B , entonces existe el Sup A y el Inf B y Sup A = Inf B " . Usaremos esta versión para demostrar el Teorema 2.9 .

Demostración

Supongamos que U y V son conjuntos abiertos , no vacíos , disyuntos y cuya unión es X y supongamos que U contiene un punto u que es menor que algún punto $v \in V$. Sea E la componente convexa de U que contiene a u y sea $A = E \cup \{x \in X | x < u\}$. Si

$B = X - A$, entonces $v \in B$ y así el Axioma de cortadura de Dedekind , garantiza la existencia de un punto $p = \text{Sup } A = \text{Inf } B$. Si $p \in A$, entonces $p \in E$ y así $p \in U$, luego existen puntos x y y tales que $p \in (x,y)$ con $(x,y) \subseteq E \subseteq U$. Pero como $p = \text{Sup } A$, se tiene que $(p,y) = \emptyset$, lo cual es imposible , puesto que y no puede ser un sucesor inmediato de p . Por lo tanto $p \notin A$. Por un argumento similar , se puede ver que $p \notin B$, lo cual nos da la contradicción deseada .

DEFINICION 2.10

Sea X un espacio topológico conexo y T_1 . Un <u>punto de cortadura</u> de X es un punto $p \in X$ tal que $X - \{p\}$ es no conexo . Si p no es un punto de cortadura de X , lo llamaremos un <u>punto de no cortadura</u> . Un <u>corte</u> de X es un conjunto $\{p, U, V\}$ donde p es un punto de la cortadura de X , y U y V <u>desconectan</u> $X - \{p\}$, es decir , donde U y V son subconjuntos de X , no vacíos , abiertos , disyuntos y cuya unión es $X - \{P\}$.

Nota

Si el espacio toplógico X con la topología del orden es conexo , entonces cualquier punto $p \in X$

es un punto de cortadura , puesto que $X - \{p\}$ está separado por $P_p = \{x \in X \mid x < p\}$ y por $S_p = \{x \in X \mid x > p\}$.

También es claro que si el espacio topológico X es conexo , entonces X es completo . Además si X no tiene puntos consecutivos , entonces todo intervalo es un conjunto conexo en X .

En lo que sigue , estudiamos , combinadas , las trascendentales propiedades de compacidad y conexidad , para así generar la noción de continuo , la cual da como resultado una colección bastante grande de teoremas interesantes . Como es de suponer , nosotros estudiaremos aquellos teoremas que conduzcan a un resultado importante sobre la topología del orden .

DEFINICION 2.11

Un continuo es un espacio topológico , compacto , conexo y de Hausdorff .

DEFINICION 2.12

Un conjunto A se llama un <u>conjunto dirigido</u> si y solo si hay una relación $\leq$ sobre A que satisface :

i) $\lambda \leq \lambda$ para cada $\lambda \in A$

ii) Si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$ entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$

iii) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ entonces hay algún $\lambda_3 \in A$ con $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

La relación $\leq$ se llama , a veces , una dirección sobre A .

Una red en un conjunto X es una función $P: A \to X$, donde A es algún conjunto dirigido . El punto $P(\lambda)$ se nota x_λ y usualmente se habla de " la red (x_λ) $\lambda \in A$ " o de " la red (x_λ) " si no hay confusión .

DEFINICION 2.13

Sea (x_λ) una red en un espacio X . Diremos que (x_λ) tiene un punto de adherencia x si y solo si para cada vecindad U de x y para cada $\lambda_o \in A$, existe algún $\lambda \geq \lambda_o$ tal que $x_\lambda \in U$.

TEOREMA 2.14

Sea $\{K_\lambda | \lambda \in I\}$ una colección de continuos en un espacio topológico X dirigido por inclusión . Entonces $\bigcap K_\lambda$ es un continuo .

Demostración

La intersección es un subconjunto cerrado de cada K_λ y por lo tanto es compacta . Supongamos que se pueden encontrar conjuntos H y K cerrados, disyuntos y tales que $\bigcap K_\lambda = H \cup K$, $x \in H$, $y \in K$. Para cualquier λ_0 fijo, X se puede reemplazar por K_{λ_0}, y cada K_λ por $K_{\lambda_0} \cap K_\lambda$, sin afectar la intersección, así que podemos suponer que X es compacto y de Hausdorff. Entonces H y K son cerrados en X y pueden ser separados por conjuntos U y V en X. Para cada

$$K_\lambda, \quad K_\lambda \not\subseteq U \cup V,$$

puesto que si no fuera así $U \cap K_\lambda$ y $V \cap K_\lambda$ desconectarían K_λ. De esta manera podemos tomar $x_\lambda \in K_\lambda-(U \cup V)$. El resultado es una red (x_λ) que tiene un punto de adherencia z en X, por la compacidad. Ahora si W es cualquier vecindad de z y K_λ está dado, entonces para algún $K_\rho \subseteq K_\lambda$, $x_\rho \in W$. Por lo tanto $W \cap K_\lambda \neq 0$ para cada vecindad W de z, así $z \in \overline{K}_\lambda = K_\lambda$, para cada λ. Entonces $z \in \bigcap K_\lambda \subseteq U \cup V$. Pero $U \cup V$ es entonces una vecindad de z, que no contiene a (x_λ), por la escogencia de los x_λ. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $\bigcap K_\lambda$ debe ser conexo.

LEMA 2.15

Si K es un continuo y $\{p, U, V\}$ es un corte de K entonces $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son conexos (y también continuos) .

Demostración

Basta probar el Lema para $U \cup \{p\}$. Sea f la función definida sobre K por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in U \cup \{p\} \\ p & \text{si } x \in V \end{cases}$$

Entonces f envía K sobre $U \cup \{p\}$ y f es continua sobre cada uno de los conjuntos cerrados $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$, así que f es continua. Luego $U \cup \{p\}$ es la imagen, por medio de una función continua, de un espacio conexo y, por lo tanto, es conexo. Como $U \cup \{p\} = K - V$, $U \cup \{p\}$ es cerrado en K y por lo tanto compacto. Luego $U \cup \{p\}$ es continuo.

LEMA 2.16

Si K es un continuo y $\{p, U, V\}$ es un corte de K, entonces tanto U como V contienen un punto de no-cortadura de K.

Demostración

Supongamos que cada punto $x \in U$ es un punto de cortadura que induce un corte $\{x, U_x, V_x\}$ de

K . Si U_x y V_x intersecan $V \cup \{p\}$, ellos desconectan $V \cup \{p\}$ lo cual es imposible por el lema anterior . Así alguno de ellos , digamos U_x , está contenido en U. Ahora $U_x \cup \{x\}$ es un continuo para cada $x \in U$ por el lema anterior . Como $\{U_x \cup \{x\} \mid x \in U\}$ es un conjunto dirigido por inclusión , $\bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$ es un continuo no vacío contenido en U . (Por el Teorema 2.14) . Tomamos $q \in \bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$. Entonces $U_q \subseteq U$ y si $r \in U_q$, entonces U_r no contiene a q (si no , U_r y V_r cortarían a $V_q \cup \{q\}$ y lo desconectarían) . Entonces $U_r \cup \{r\}$ no contiene a q . Pero esto contradice el hecho de que $q \in \bigcap_{x \in U} (U_x \cup \{x\})$.

DEFINICION 2.17

Un punto de cortadura p en un espacio conexo X <u>separa</u> <u>a</u> <u>de</u> <u>b</u> si y solo si existe un corte $\{p, U, V\}$ con $a \in U$ y $b \in V$. El conjunto que consta de a, b y de todos los puntos p que separan a de b se nota $E(a,b)$. El <u>orden</u> <u>de</u> <u>separación</u> de $E(a,b)$ se define : $p_1 \leq p_2$ si y solo si $p_1 = p_2$ ó p_1 separa a de p_2 .

TEOREMA 2.18

El orden de separación sobre $E(a,b)$ es un orden total .

Demostración

Es fácil ver que es un orden parcial . Veamos la condición de orden total . Para cada $p \in E(a,b)$ sea $\{p, U_p, V_p\}$ un corte de X tal que $a \in U_p$ y $b \in V_p$.

Si r , s son puntos distintos de $E(a,c)-\{a,b\}$ entonces $s \in U_r$ ó $s \in V_r$. Si $s \in V_r$ entonces r separa a de s , y así $r < s$. Por lo tanto supongamos que $s \in U_r$. Ahora $V_r \cup \{r\}$ es conexo (Lema 2.15) y está contenido en la unión de V_s y U_s , así que debe estar contenido en uno de éstos . Como $b \in V_r \cup \{r\}$, debemos tener entonces $V_r \cup \{r\} \subseteq V_s$. Ahora $r \in V_s$ así que s separa a de r , es decir $s < r$. Esto completa la prueba de que $\leq$ es un orden total sobre $E(a,b)$.

Es natural preguntarnos , en este punto , si existe alguna conexión entre la topología del orden de $E(a,b)$ y su topología inducida por el espacio X .

TEOREMA 2.19

a) Si $E(a,b)$ tiene más de dos puntos, su topología del orden es más débil que su topología inducida.

b) Si K es un continuo con dos puntos de no-cortadura a y b, entonces $K = E(a,b)$ y la topología sobre K es la topología del orden.

Demostración

a) Es suficiente notar que, para $p \in E(a,b)$ los conjuntos $U_p \cap E(a,b)$ y $V_p \cap E(a,b)$ (con la notación del teorema anterior) son abiertos en $E(a,b)$ y

$$U_p \cap E(a,b) = \{ q \in E(a,b) \mid q < p \}$$

$$V_p \cap E(a,b) = \{ q \in E(a,b) \mid q > p \}$$

b) Si $p \in K$ y $p \neq a$ y $p \neq b$, entonces dado cualquier corte $\{ p, U, V \}$ de K, por el Lema 2.16, tanto U como V contienen a uno de los puntos a, ó b. De esta manera $p \in E(a,b)$ y así $E(a,b) = K$.

De (a), la topología del orden es más débil que la topología de K. Supongamos, recíprocamente, que U es un abierto en K y $p \in U$. Primero tomemos $p \neq a$ y $p \neq b$. Mostraremos que U contiene algún intervalo

$(r, s) = \{ q \in K \mid r < q < s \}$ que contiene a p . Si esto no ocurriera , entonces siempre que $p \in (r, s)$, el intervalo cerrado $[r, s] = \{ q \in K \mid r \leq q \leq s \}$ cortaría a $K - U$. Pero los conjuntos $[r, s] \cap (K - U)$ formarían entonces una familia de subconjuntos cerrados de K con la propiedad de la intersección finita (cada $[r, s]$ es cerrado en K por la parte (a)) . Luego su intersección (en el espacio compacto K) sería no-vacía . Pero $p \in U$ y $\bigcap \{ [r, s] \mid p \in (r, s) \} = \{ p \}$, lo cual nos lleva a una contradicción . Si $p = a$ y $p \neq b$, ó, si $p \neq a$ y $p = b$, el argumento es similar .

En lo que sigue , daremos algunos contraejemplos para probar que nuestro espacio topológico X , deja de cumplir propiedades como la de ser 1-contable , metacompacto etc .

En las proposiciones siguientes , cuando digamos el espacio topológico X , debemos entender que se trata del espacio topológico X , con la topología del orden .

PROPOSICION 2.20

El espacio topológico X , no es , en general , 1-contable .

Demostración

Consideremos como X el espacio topológico de los ordinales $[0,\Omega]$, que consta del conjunto de todos los ordinales menores o iguales que Ω, donde Ω es el primer ordinal no contable, dotado de la topología del orden. Los conjuntos de la forma

$$(\lambda, \rho + 1) = (\lambda, \rho] = \{ x \mid \lambda < x < \rho + 1 \}$$

forman una base para esta topología.

En el espacio ordinal $[0,\Omega]$, el conjunto $\{\Omega\}$ es un conjunto cerrado y no es un conjunto G_δ. En efecto: $\{\Omega\}$ es cerrado puesto que su complemento $[0,\Omega)$ es un conjunto abierto; y no es un conjunto G_δ, puesto que para cualquier colección contable $\{G_i\}$ de conjuntos abiertos que contienen Ω, podemos hallar una colección de elementos de la base de la forma

$$(\lambda_i, \Omega] \subseteq G_i ,$$

para cada i. El extremo superior de los λ_i es un ordinal Σ menor que Ω, puesto que cada λ_i, o equivalentemente, cada $[0, \lambda_i)$ es contable y la unión contable de conjuntos contables es contable. Por lo tanto

$$\bigcap G_i \supseteq (\Sigma , \Omega] \neq \{\Omega\}$$

En resúmen , el espacio ordinal $[0,\Omega]$ no es 1-contable , puesto que el punto Ω no tiene una base local contable , ya que Ω es un punto límite del conjunto (λ, Ω) , pero no es el punto límite de ninguna sucesión de puntos de (λ, Ω) .

PROPOSICION 2.21

El espacio topológico X no es , en general , perfectamente normal .

Demostración

Como la topología del orden satisface todos los axiomas de separación , el espacio $[0,\Omega]$ es completamente normal . Pero $[0,\Omega]$ no es perfectamente normal , puesto que el conjunto cerrado $\{\Omega\}$ no es un G_δ .

PROPOSICION 2.22

El espacio topológico X no es , en general metacompacto , ni paracompacto .

Demostración

Todo subconjunto de $[0, \Omega]$ tiene un extremo inferior , (su primer elemento) y todo subconjunto de $[0, \Omega]$ tiene un extremo superior . Por lo tanto $[0,\Omega]$ es un espacio topológico completo , y de esta manera es compacto .

El subespacio $[0,\Omega)$ de $[0,\Omega]$, no es compacto , puesto que la colección $\{[0,\lambda) \mid \lambda < \Omega\}$ es un cubrimiento abierto que no tiene subrecubrimiento finito (puesto que Ω es un ordinal límite) . Como $[0,\Omega]$ es compacto , se sigue que es contablemente compacto . Luego toda sucesión en $[0,\Omega)$ tiene un punto de acumulación en $[0,\Omega]$. Pero Ω no puede ser un punto de acumulación de ninguna sucesión de $[0,\Omega)$ Así , toda sucesión de $[0,\Omega)$ tiene un punto de acumulación en $[0,\Omega)$, lo cual significa que $[0,\Omega)$ es contablemente compacto . Como un espacio es compacto si y solo si es contablemente compacto y metacompacto y como $[0,\Omega)$ es contablemente compacto pero no compacto , se concluye que $[0,\Omega)$ no es ni metacompacto ni paracompacto .

PROPOSICION 2.23

El espacio topológico X , no es necesariamente de Lindelöf , ni σ-compacto .

Demostración

Como todo espacio de Lindelöf y T_3

es paracompacto , entonces $X = [0, \Omega)$ no es de Lindelöf y por lo tanto no es σ-compacto .

PROPOSICION 2.24

El espacio topológico X , no es necesariamente contablemente compacto .

Demostración

Si expandimos la topología del orden a $[0, w\Omega)$, definiendo como abiertos a todos los ordinales $n\Omega$, tenemos , esencialmente , una suma infinita , contable , de copias de $[0, \Omega)$. Este nuevo espacio no es (como $[0, \Omega)$) metacompacto , y , además , no es contablemente compacto , puesto que los sumandos forman un cubrimiento contable sin ningún subrecubrimiento finito .

PROPOSICION 2.25

El espacio topológico X , no es necesariamente completo .

Demostración

Tomamos como X el conjunto de los hiperreales $\mathbb{R}^{\sim}$, con la topología del orden . Veamos que $\mathbb{R}^{\sim}$ no es completo . En efecto , consideremos el conjunto de los números naturales $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^{\sim}$. Vemos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente en $\mathbb{R}^{\sim}$, porque algún infinito $\frac{1}{\epsilon}$ (donde ϵ es algún infinitesimal) es una cota superior. Ahora, si existiera λ tal que $\lim_{n \to \infty} n = \lambda$, entonces λ debe ser infinito, es decir, $\lambda \notin \mathbb{R}$ (por propiedad arquimediana). Luego $n < \lambda$, para todo n natural. Pero sea $a > 0$ un real cualquiera, entonces $n < \lambda - a$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda - a \neq \lambda$, pues $\mathbb{R}^{\sim}$ es un cuerpo; esto es λ no puede ser extremo superior de $\mathbb{N}$ (absurdo).

PROPOSICION 2.26

El espacio topológico X, no es necesariamente separable.

Demostración

Tomemos $X = \mathbb{R}^{\sim}$, como antes, y veamos que $\mathbb{R}^{\sim}$ no es separable. En efecto: sea $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ un infinitesimal. Consideremos la colección

$$\{ (x, x + \epsilon) | x \in \mathbb{R} \}$$

Tenemos que si $x \neq y$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$(x, x + \epsilon) \cap (y, y + \epsilon) = \emptyset ;$$

por lo tanto, tenemos que $\{(x, x + \epsilon) | x \in \mathbb{R}\}$ es una colección no-contable de intervalos disyuntos dos a dos.

Ahora si $\tilde{\mathbb{R}}$ fuera separable , podríamos tomar $D = \{ d_K \mid K \in \mathbb{N} \}$ un subconjunto denso y numerable de $\tilde{\mathbb{R}}$. Como $\bigcup (x, x + \epsilon) \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$, entonces existiría un $d_{n(x)}$ en D tal que $d_{n(x)} \in (x, x + \epsilon)$ y $d_{n(x)} \neq d_{n(y)}$, para $x \neq y$. Por lo tanto , el conjunto $\{ d_{n(x)} \mid x \in \mathbb{R} \}$ es contable (absurdo) .

Nota Editorial

En el próximo número del Boletín se publicará una secuela del presente artículo escrita por el mismo autor .

BIBLIOGRAFIA

(1) Apostol,T., Mathematical Analysis . Addison-Wesley Publishing Company, New York. 1965.

(2) Bourbaki,N., General Topology, Parts I - II, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1966 .

(3) Dieudonne,J., Fundamentos de Análisis Moderno, Editorial reverté, Barcelona, 1966 .

(4) Dugundji, J., Topology, Allyn and Bacon, Ino, Boston

1966 .

(5) Gaal,S., Point Set Topology, Academic Press, New York, 1964.

(6) Gemignani,M., Elementary Topology, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

(7) Kelley,J., General Topology., D. Van Nostrand Compa ny Inc, New York, 1955 .

(8) Lipschutz,S., Topología General, Mc Graw-Hill, Mexi co, 1970 .

(9) Mejía,V., Un conjunto totalmente ordenado sin estruc tura algebraica, Tesis de grado, 1980 .

(10) Morales-Roig, Problemas de Topología general, edito- rial alhambra, Madrid, 1969 .

(11) Nachbin,L., Topology and order, Princeton, N.J., D. Van Nostrand, 1965 .

(12) Pervin,W., General Topology, Academic Press,New York, 1964 .

(13) Royden,H., Real Analysis, Second edition, Collier- Mac Millan, 1969 .

(14) Willard,S., General Topology, Addison-Wesley Publis- hing Company, 1970 .

Víctor MEJIA B.

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .