Boletín de Matemáticas
Vol. 16 No. 1 (1982) pags. 1 - 8

UN TEOREMA SOBRE SOLUCION DE ECUACIONES DIOFANTICAS

Nelson MEDINA FERRER

Vamos a considerar el problema de determinar el número de soluciones de la ecuación diofántica

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_b = a$$

donde c es el menor entero permitido como solución. Una solución a dicha ecuación es una b-tupla ordenada $(k_1, k_2, \dots, k_b)$ tal que $k_i \geq c$ para $i = 1,2,\dots,b$ y, naturalmente, tal que $k_1+k_2+\dots+k_b = a$

Determinaremos una función $f(a,b,c)$ cuyo valor será precisamente el número de soluciones enteras de la citada ecuación. Cada una de las variables x_i toma valores que fluctúa entre c y $a-c(b-1) = c + (a-cb)$.

Ahora bien, si $x_i = c$ el número de soluciones viene dado por $f(a-c, b-1, c)$ puesto que se ha reemplazado una de las variables por el valor constante c, y así se rebaja el número de variables en 1 al mismo tiem po que se rebaja la suma en c .

Igualmente , si $x_i = c+1$, el número de soluciones se da por $f(a-c-1,\ b-1,\ c)$, y generalizando ,

$$x_i = c+2 \quad \rightarrow \quad f(a-c-2,\ b-1,\ c)$$

$$x_i = c+k \quad \rightarrow \quad f(a-c-k,\ b-1,\ c)$$

$$x_i = c+(a-cb) \quad \rightarrow \quad f(c(b-1),\ b-1,\ c)$$

Como todos estos valores de x_i son posibles según las condiciones del problema , tenemos

$$f(a,\ b,\ c) = f(a-c,\ b-1,\ c) + f(a-c-1,\ b-1,\ c) + \ldots + f(a-c-k,\ b-1,\ c) + \ldots + f(c(b-1),\ b-1,\ c)$$

$$f(a,\ b,\ c) = \sum_{k=0}^{a-cb} f(a-c-k,\ b-1,\ c)$$

Donde claramente , $a \geq bc$.

Ahora ,

Si $b = 1$, $f(a,\ b,\ c) = 1$.

Si $b = 2$, entonces

$$f(a,\ 2,\ c) = f(a-c,\ 1,\ c) + \ldots + f(c(b-1),\ 1,\ c)$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{a-cb+1 \text{ veces}}$$

$= a - cb + 1$

$= a - 2c + 1$

En resúmen , si $b = 2$, entonces

$$f(a, b, c) = a - 2c + 1$$

Antes de examinar $b = 3, 4,$ y el caso general , recordemos que

$$1 + 2 + 3 + \dots + N = \frac{N(N+1)}{2},$$

y que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \quad + N(N+1) = \dfrac{N(N+1)(N+2)}{3}$

Ahora bien , si $b = 3$ entonces

$$f(a, 3, c) = \sum_{k=0}^{a-cb} f(a-c-k, b-1, c)$$

$$= f(a-c, 2, c) + f(a-c-1, 2, c) + \dots +$$

$$f(a-c-(a-cb), 2, c)$$

Ahora , como

$$f(a-c, 2, c) = (a-c) - 2c + 1 = a - 3c + 1$$

$$f(a-c-1, 2, c) = (a-c-1) - 2c + 1 = a - 3c$$

$$\vdots$$

$$f(c(b-1), 2, c) = c(b-1) + 2c + 1 = 2c - 2c + 1 = 1,$$

Dado que estamos considerando el caso $b = 2$, sumando estas igualdades obtenemos que

$$f(a,\ 3,\ c) = a - 3c + 1 + a - 3c + a - 3c - 1 + \dots + 1$$

$$= \frac{(a-3c+1)(a-3c+2)}{2}$$

Similarmente , para $b = 4$ tenemos

$$f(a,\ 4,\ c) = \sum_{k=0}^{a-cb} f(a-c-k,\ b-1,\ c)$$

$$= f(a-c,\ 3,\ c) + \dots + f(c(b-1),\ 3,\ c)$$

$$= \frac{(a-4c+1)(a-4c+2)}{2} + \frac{(a-4c)(a-4c+1)}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{(cb-4c+1)(cb-4c+2)}{2}$$

Y como $cb-4c+1 = 1$ (pues $b = 4$) , obtenemos que

$$f(a,\ 4,\ c) = \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+(a-4c+1)(a-4c+2)}{2}$$

$$= \frac{(a-4c+1)(a-4c+2)(a-4c+3)}{6}$$

Reuniendo en una tabla los valores obtenidos , vemos que

$$f(a,\ 0,\ c) = 0$$

$$f(a,\ 1,\ c) = 1$$

$$f(a,\ 2,\ c) = a-2c+1$$

$$f(a,\ 3,\ c) = \frac{(a-3c+1)(a-3c+2)}{2}$$

$$f(a,\ 4,\ c) = \frac{(a-4c+1)(a-4c+2)(a-4c+3)}{6}$$

Lo cual hace suponer que

$$f(a,\ b,\ c) = \frac{(a-bc+1)(a-bc+2)\ .\ .\ .\ (a-bc+b-1)}{(b-1)!}$$

o sea ,

$$f(a,\ b,\ c) = \binom{a-bc+b-1}{b-1}$$

Nuestro propósito en este artículo es demostrar que esta fórmula es válida en el caso general . Para éllo partamos de que

$$\frac{n}{i(n-i)} = \frac{i+n-i}{i(n-i)} = \frac{i}{i(n-i)} + \frac{n-i}{i(n-i)} = \frac{1}{i} + \frac{1}{n-i}$$

Multiplicando ambos miembros de la última igualdad por $(n-1)!$ y dividiendo por $(i-1)!\ (n-i-1)!$ se tiene que

$$\frac{n}{i\ (n-i)} = \frac{(n-1)}{i\ \ (n-i-1)} + \frac{(n-1)}{(i-1)\ \ (n-i)}\ ,$$

que se puede escribir como

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\ ,\qquad n \geq i \geq 1$$

Como esta última identidad es cierta para todo

$n \geq 1$, se tiene

$$\binom{n-1}{i} = \binom{n-2}{i-1} + \binom{n-2}{i}, \quad n \geq i \geq 1, \quad n \geq 2$$

$$\binom{n-2}{i} = \binom{n-3}{i-1} + \binom{n-3}{i}, \quad n \geq i \geq 1, \quad n \geq 3$$

etc.

Dado que el valor mínimo de $\binom{a}{b}$ es 1 , puede llegarse a la importante conclusión

$$\binom{n}{i} = \sum_{k=1}^{n-i+1} \binom{n-k}{i-1}, \quad n \geq i$$

Ahora volvamos a nuestra fórmula para f . Sabemos que se cumple cuando b toma los valores 1, 2, 3, 4 ; asumamos que se cumple para un valor b cualquiera . Entonces ,

$$f(a,\ b+1,\ c) = \sum_{k=0}^{a-c(b+1)} f(a-c-k,\ b,\ c)$$

Luego ,

$$f(a,\ b+1,\ c) = f(a-c,\ b,\ c) + f(a-c-1,\ b,\ c) + \ldots$$
$$+ f(cb,\ b,\ c)$$

y como hemos supuesto que

$$f(a, b, c) = \binom{a-bc+b-1}{b-1}$$

entonces ,

$$f(a, b+1, c) = \binom{a-c-bc+b-1}{b-1} + \binom{a-c-bc+b-1-1}{b-1}$$

$$+ \binom{a-c-bc+b-1-2}{b-1} + \dots + \binom{bc-bc+b-1}{b-1}$$

Tomando $c_1 = a-c-bc+b-1$ y $c_2 = b-1$

$$f(a, b+1, c) = \binom{c_1}{c_2} + \binom{c_1-1}{c_2} + \binom{c_1-2}{c_2} + \dots + \binom{c_2}{c_2}$$

$$= \sum_{k=0}^{c_1-c_2} \binom{c_1-k}{c_2}$$

$$= \binom{c_1+1}{c_2+1}$$

$$= \binom{a-c(b+1)+(b+1)-1}{(b+1)-1}$$

Esta última igualdad prueba inductivamente el resultado .

Nelson MEDINA FERRER

Miembro , Equipo Colombiano

Olimpiada Internacional de Matemáticas , 1981 .