

COMENTARIOS SOBRE LAS ESTRUCTURAS CELULARES

LOCALMENTE FINITAS .

Carlos J. RUIZ S.

1. CONJUNTOS CON ESTRUCTURA CELULAR

Un conjunto con estruc
tura celular será para nosotros una pareja (X, Σ) donde Σ denota una colección de subconjuntos del conjunto X , sujeta a las condiciones siguientes :

(a) Los elementos de Σ son dos a dos disyuntos y recubren X ;

(b) Existe una aplicación $d : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, encargada de asignar a cada celda $c \in \Sigma$ su dimensión, y ,

(c) Una aplicación $\delta : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(X)$ cuya función consiste en establecer , para cada celda $c \in \Sigma$ su borde $\delta(c) \subset X$;

todo lo anterior dado de tal manera que

(d) Si se denota por X^n la reunión de las celdas

c cuya dimensión $d(c)$ es a lo sumo n , entonces una celda u , cuya dimensión es, por ejemplo p , tiene su borde $\delta(u)$ contenido en X^{p-1} ;

(e) Si la dimensión de una celda v es 0, su borde es el conjunto vacío.

Nota :

Si, por extensión, hubiéramos definido X^{-1} como el conjunto vacío, nos habríamos evitado escribir la condición (e).

Si u denota una celda (sabe decir $u \in \Sigma$), se usará corrientemente la notación \tilde{u} para designar el conjunto $u \cup \delta(u)$, reunión de u y de su borde. Es costumbre hablar de celda cerrada para referirse a \tilde{u} , y, por oposición, de celda abierta, para referirse a u . También u se denomina interior celular de \tilde{u} .

Cuando hablemos de un sub-conjunto con estructura celular, nos referimos a un $Y \subset X$, que cumple la siguiente ley de compatibilidad con respecto a los datos (Σ, d, δ) : si la intersección $u \cap Y$, del conjunto Y con una celda $u \in \Sigma$, no es vacía, toda la celda cerrada \tilde{u} está contenida en Y . La estructura celular que Y hereda, de esta manera, podríamos notarla

$(\Sigma|_Y, d|_Y, \delta|_Y)$. Es de anotar que para cada p , $Y^p = X^p \cap Y$.

Nota :

Toda intersección y toda reunión de sub-conjuntos con estructura celular , subconjuntos del conjunto con estructura celular X , es de nuevo un sub-conjunto que hereda la estructura celular de X ; razón ésta que , como en el caso de los espacios topológicos , da lugar al concepto de mínimo sub-conjunto con estructura celular que contiene a un conjunto dado $A \subset X$. Igualmente , tiene sentido el preguntarse sobre el máximo conjunto con estructura celular que pueda estar incluido dentro de A . El primero hace las veces de una adherencia , el segundo , de un interior para una misma topología conocida con el nombre de portadora . De manera precisa , los conjuntos cerrados son los sub-conjuntos de X , que heredan la estructura celular .

2. TOPOLOGIA DEBIL

Imaginémonos ahora que sobre el conjunto X haya de antemano una topología , a la que no impondremos condiciones de compatibilidad con la estructura celular de X , que por lo demás mantendremos fija - para dejar variable únicamente la topología - . En estas condiciones cada celda \tilde{u} se enriquece con la topología de subespacio generando una colección de espacios . Si con

la letra π hemos notado la topología inicialmente dada sobre X , podríamos convenir en denotar por π^Σ la familia de espacios topológicos $(\tilde{u}, \pi|_{\tilde{u}})$ ($u \in \Sigma$).

Hagamos una aclaración: a la familia Σ de subconjuntos de X corresponde una nueva, que podríamos denotar por $\tilde{\Sigma}$, constituida por las celdas cerradas $\tilde{u} = u \cup \delta(u)$, construidas, éllas, a partir de las celdas abiertas $u \in \Sigma$. En la notación π^Σ hubiera sido más conveniente, pero es más engorroso, escribir $\tilde{\Sigma}$ en el lugar de Σ .

Para simplificar, emplearemos la notación $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$ cuando queramos referirnos al conjunto producto de los conjuntos $\text{Top}(\tilde{u})$ uno por cada $u \in \Sigma$; en este último caso $\text{Top}(\tilde{u})$ si tiene el sentido tradicional del conjunto de topologías sobre \tilde{u} . La información que conlleva un elemento de $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$ es simplemente la de una estructura topológica por cada celda cerrada de la estructura celular.

Sobre $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$ vamos a tener que utilizar el orden lexicográfico, según el cual $(\lambda_{\tilde{u}}) > (\rho_{\tilde{u}})$, si para cada uno de los conjuntos $\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}$, la topología $\lambda_{\tilde{u}}$ es más fina que $\rho_{\tilde{u}}$. Referente a dicho orden parcial nos contentamos con recordar que todo conjunto no vacío admite

extremo superior e inferior ; en particular , hay en él un elemento máximo y un mínimo .

La función que a cada topología π sobre X hace corresponder el elemento π^Σ de $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$ es una aplicación monótona creciente del conjunto $\text{Top}(X)$, de las topologías sobre X , con su orden natural , en el conjunto $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$ cuando se le considera con el orden lexicográfico .

Dicha función $\text{Top}(X) \rightarrow \text{Top}(\tilde{\Sigma})$, $\pi \mapsto \pi^\Sigma$, admite un adjunto $\text{Top}(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \text{Top}(X)$, cuya función es la de tratar de recuperar una topología sobre el conjunto total X , con base en topologías "locales" $p_{\tilde{u}}$, una sobre cada celda cerrada \tilde{u} ; de manera más formal , demosetremos la

AFIRMACION 1.

La función $\pi \mapsto \pi^\Sigma$, de fuente $\text{Top}(X)$ y meta el conjunto $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$, admite un adjunto a derecha , con lo cual queremos significar que existe una - y no más de una - aplicación w que reúne las siguientes propiedades : (a) $w : \text{Top}(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \text{Top}(X)$ es monótona creciente (b) para cada topología π sobre el conjunto X , la topología $w(\pi^\Sigma)$ es más fina que π (sin excluir la igualdad , claro está) , y (c) cada uno de los elementos f de $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$ da lugar a la desigualdad $f > (w(f))^\Sigma$. En re-

sumen si denotamos por $i : \text{Top}(X) \rightarrow \text{Top}(\tilde{X})$ la aplicación $\pi \mapsto \pi^{\tilde{X}}$, se van a cumplir las dos desigualdades que destacamos en seguida :

$$w(i(\pi)) > \pi, \quad y, \quad f > i(w(f))$$

con cada π en $\text{Top}(X)$ y cada f en $\text{Top}(\tilde{X})$.

DEFINICION

La topología $w(f)$, asociada a una familia $f = (\rho_{\tilde{u}})$, se denomina topología débil.

No regresemos sobre la unicidad de adjunto, que puede ser consultada por ejemplo en (7). Contentémonos con mostrar, como se construye w : la topología $w(f)$ estará formada por los conjuntos $A \subset X$ que pasan la prueba: $A \cap \tilde{u}$ es un abierto de $\rho_{\tilde{u}}$, y esto para cada $\tilde{u} \in \tilde{X}$.

Nota :

La familia $\pi^{\tilde{X}} = (\pi|_{\tilde{u}})_{\tilde{u} \in \tilde{X}}$, de restricciones a cada una de las celdas cerradas, cumple una condición de compatibilidad, y no hay razón para esperar encontrarla en el caso de un elemento arbitrario f del conjunto $\text{Top}(\tilde{X})$; se trata de la siguiente: si consideramos las restricciones de las topologías $\pi|_{\tilde{u}}$ y $\pi|_{\tilde{v}}$ al conjunto

$\tilde{u} \cap \tilde{v}$ encontramos que coinciden, siendo iguales a
 $\pi |_{\tilde{u} \cap \tilde{v}}$.

AFIRMACION

La topología $w(f)$, asociada a una familia $f = (\rho_{\tilde{u}})_{\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}}$, perteneciente élla a $\text{Top}(\tilde{\Sigma})$, satisface una propiedad "universal" que permite detectar con cierta facilidad cuándo una función $g : X \rightarrow Y$, del espacio $(X, w(f))$ en el espacio (Y, λ) , es continua: para que así suceda basta que la restricción de g a cada \tilde{u} , sea continua del espacio $(\tilde{u}, \rho_{\tilde{u}})$ en el espacio (Y, λ) .

PROBLEMA

Cómo se transmiten a $w(f)$ las propiedades topológicas de las topologías $\rho_{\tilde{u}}$ de la familia f ?

3. COMO UTILIZAR LAS CELDAS ABIERTAS PARA CARACTERIZAR CERRADOS.

Es de anotar que la topología débil asociada a una familia $f = \{\rho_{\tilde{u}}\}_{\tilde{u} \in \tilde{\Sigma}}$, no va a ser la misma si en el lugar de las celdas con frontera \tilde{u} usamos las celdas u : es decir hay dos colecciones distintas de conjuntos "cerrados", definidas así:

" A es cerrado en X si y solo si $A \cap \tilde{u}$ es cerrado en $t_{\tilde{u}}$ para cada $u \in \Sigma$ " .

" A es cerrado en X si y solo si $A \cap u$ es cerrado en $t_{\tilde{u}}$ para cada $u \in \Sigma$ " .

Sin embargo , como las celdas abiertas son dos a dos disyuntas , en ocasiones es más útil disponer de una caracterización del segundo tipo para los cerrados , cuando ésto es posible !

Establecemos a continuación condiciones sobre las celdas , que nos permiten de cierta manera lograr nuestros deseos .

AFIRMACION

Supongamos que en $t_{\tilde{u}}$, $\delta(u)$ es un subconjunto cerrado . En esas condiciones ,

1. X^n es cerrado en X^{n+1} ;
2. La topología de sub-espacio de X^n en X^{n+1} y la topología final en X^n asociada a la familia $\{t_{\tilde{u}}\}$ (en donde la dimensión de \tilde{u} es menor que n) coinciden;
3. Si un conjunto A satisface la condición de que su traza $A \cap u$ sea cerrada en \tilde{u} (para $t_{\tilde{u}}$) , y

esto para cada celda $u \in \Sigma$, entonces A es cerrado en X , para la topología débil engendrada por las $t_{\tilde{u}}$ ($u \in \Sigma$).

En efecto, veamos la razón de ser de la tercera afirmación. Vamos a demostrarla por recurrencia sobre n . Demostremos que $A \cap X^0$ es cerrado en X^0 .

Esto se debe a que X^0 tiene la topología débil para sus celdas y por dicha razón basta demostrar que para cada celda u de dimensión 0, $A \cap \tilde{u}$ es cerrado en \tilde{u} . Pero para dichas celdas hemos supuesto $\delta u = \emptyset$. Así que $A \cap \tilde{u} = A \cap u$ y éste por hipótesis es cerrado en \tilde{u} . Supongamos que $A \cap X^n$ es cerrado en X^n . Veamos que $A \cap X^{n+1}$ es cerrado en X^{n+1} . Pero por asociatividad de topologías finales basta demostrar que $A \cap X^n$ es cerrado en X^n y $A \cap \tilde{u}$ es cerrado en \tilde{u} cuando la dimensión de \tilde{u} es igual a $n + 1$.

$$\begin{array}{rcl}
 & & X^n \\
 & & \downarrow \\
 \text{En dim. } n+1 : & \tilde{u} \rightarrow & X^{n+1} \\
 & \tilde{v} \rightarrow & \\
 & \tilde{w} \rightarrow & \\
 & \vdots &
 \end{array}$$

Pero $A \cap \tilde{u} = (A \cap u) \cup (A \cap \delta u)$. Por hipótesis $A \cap u$

es cerrado en \tilde{u} . Veamos que pasa con $A \cap \delta u$.

$A \cap \delta u = A \cap X^n \cap \delta u$ (porque $\delta u \subset X^n$). Pero $A \cap X^n$ es cerrado en X^n por hipótesis de inducción, entonces, analicemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \delta u & \xrightarrow{\varphi} & X^n \\
 j \downarrow & & \downarrow j' \\
 u & \xrightarrow{\varphi'} & X^{n+1}
 \end{array}$$

j' es continua y X^n tiene también la topología de sub-espacio.

Para ver que φ es continua basta entonces que $j' \circ \varphi$ sea continua, pero $\varphi' \circ j = j' \circ \varphi$ y $\varphi' \circ j$ si es continua (j por sub-espacio, φ' porque X^{n+1} tiene la topología final para sus celdas). Como, en fin, φ es continua, $\varphi^{-1}(A \cap X^n)$ es cerrado en δu pero

$\varphi^{-1}(A \cap X^n) = A \cap X^n \cap \delta u = A \cap \delta u$. Y como δu es cerrado en \tilde{u} entonces, $A \cap \delta u$ es cerrado en \tilde{u} .

4. CONJUNTOS DISCRETAMENTE COMPACTOS : La imposibilidad de tocar muchas celdas abiertas

Digamos que K en un

espacio Y es discretamente compacto si , cuando cada vez que un sub-conjunto P de K tiene todos sus sub-conjuntos P' cerrados en Y , necesariamente es finito . (Ver notas sobre esta propiedad un poco más adelante) .

AFIRMACION

Si en X (o mejor en las celdas) los puntos son cerrados , entonces todo conjunto discretamente compacto , necesariamente , encuentra finitas celdas abiertas . (Suponemos claro está que δ_u es cerrado en \tilde{u} para la topología $t_{\tilde{u}}$, y esto para cada celda $u \in \Sigma$).

En efecto sea $\Sigma' \subset \Sigma$ el sub-conjunto de Σ formado justamente por las celdas cuyos interiores encuentran a K . De cada una elegimos un punto $x_u \in u \cap K$. Veamos que el conjunto F así formado es finito : nótese que si $F' \subset F$, entonces

a) $F' \cap \tilde{v}$ es vacío , o bien

b) tiene a lo sumo un punto ;

en ambos casos es cerrado en \tilde{v} , si se asume que los puntos son cerrados en las celdas . Por nuestra propiedad de cerrados , F' será cerrado en X . Con lo cual F y todos sus sub-conjuntos serán cerrados en X . Como hemos supuesto que K es discretamente compacto , concluimos que

F debe ser finito . Teniendo en cuenta que , evidentemente , F está en correspondencia biunívoca con Σ' , queda terminada la demostración .

CONSECUENCIA 1.

En las condiciones de la afirmación anterior , si una celda \tilde{u} es discretamente compacta , relativamente a t_u^- , encuentra a lo sumo finitas celdas abiertas $v \in \Sigma$. (El complejo es de clausura finita) .

CONSECUENCIA 2.

Enriquecemos las condiciones de la Afirmación , agregando que cada celda \tilde{u} es discretamente compacta , en t_u^- . Eso dicho , si un conjunto K es discretamente compacto en (X, t_X) , entonces el menor sub-complejo $C(K)$ de X que lo contiene , es también discretamente compacto en (X, t_X) .

Esto se debe a que $C(K)$ se va formando sucesivamente con las celdas \tilde{u} para las que $u \cap K$ es no vacío (las hay en número finito de acuerdo con la Afirmación) . Luego , se toma una celda \tilde{v} , si v encuentra una de las \tilde{u} ya elegida en el paso anterior (también éstas son en número finito) y se continúa . (Nótese que como K

encuentra finitas celdas abiertas , K está por fuerza en algún X^n . Se llega hasta celdas de dimensión cero. En consecuencia $C(K)$ está formado por finitas celdas . Como se supone que cada una es un espacio discretamente compacto , van a ser discretamente compactas en (X, t_X) y así lo será $C(K)$.

CONSECUENCIA 3.

En las condiciones de la Segunda Consecuencia , un sub-complejo celular K es discretamente compacto si y únicamente si lo forman a lo sumo finitas celdas .

5. NOTAS SOBRE LA PROPIEDAD "DISCRETAMENTE-COMPACTO"

Hemos dicho que un sub-conjunto K de un espacio topológico X es discretamente compacto si

" Cuando un sub-conjunto F es tal que todos sus sub-conjuntos F' son cerrados en X , necesariamente , F es finito " .

Referente a este aspecto de la compacidad , podemos anotar que , un sub-conjunto L de un tal conjunto K , es , también , discretamente compacto , en el espacio X .

Por otra parte , si K es un sub-conjunto discretamente compacto del espacio $(K, t_{X|K})$, se cumple asi mismo que K es un sub-conjunto discretamente compacto de (X, t_X) : supongamos que $F \subset K$ y cualquiera de sus sub-conjuntos F' sean cerrados en X para la topología t_X , entonces $F' \cap K$ es cerrado en $t_{X|K}$ y como K es allí discretamente compacto , el conjunto F será necesariamente finito .

Inversamente , si de antemano se sabe que K es un sub-conjunto cerrado del espacio (X, t_X) entonces la propiedad de ser discretamente compacto como sub-conjunto de (X, t_X) entraña la de serlo como sub-conjunto de $(K, t_{X|K})$.

Sean Y un conjunto , y , $t_1 < t_2$ dos topologías ; si $K \subset Y$ es discretamente compacto en (Y, t_2) , lo es así mismo en (Y, t_1) . En palabras : a medida que se desplaza hacia la topología grosera tienden a aumentar los conjuntos discretamente compactos . (En la topología la menos fina sobre X , cualquier conjunto K es discretamente compacto).

Para terminar agreguemos que si una celda con borde \tilde{u} es discretamente compacto en $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$, también

es discretamente compacta en $(\tilde{u}, t_X|_{\tilde{u}})$ y de la misma manera lo es en (X, t_X) .

Recuérdese para demostrar que $t_{\tilde{u}} \geq t_X|_{\tilde{u}}$, que t_X es la topología débil engendrada por las celdas.

6. COMO LA FALLA EN LA FINITUD PUNTUAL INFIERE EN LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Recordemos que un complejo es puntualmente finito si no existe un punto común a infinitas celdas.

Vamos a suponer que la topología de cada celda \tilde{u} satisface la siguiente característica, que por lo demás ya había sido utilizada en una forma un poco diferente.

(D_g) : u es secuencialmente denso en \tilde{u} .

Con lo cual queremos decir que todo punto de \tilde{u} es límite de una sucesión de puntos de u .

También retenemos en esta sección la hipótesis

" u es cerrado en \tilde{u} para la topología $t_{\tilde{u}}$ "; en todas y cada una de las celdas.

Y, finalmente, recordemos que habíamos utilizado frecuentemente la condición de que los puntos fueran cerrados en las celdas \tilde{u} para la topología $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$.

Teniendo en cuenta todas estas condiciones , pasemos a observar lo que puede suceder en un complejo que no es puntualmente finito .

Sea , para tal efecto , x_0 un punto común a infinitas celdas cerradas . Tomemos enumerables de ellas $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \dots$ de tal manera que $x_0 \in \delta u_n$ ($n=1,2,3,\dots$)

Ahora bien , hay una sucesión $S^{(n)}$ en la celda U_n que converge a x_0 y esto , para cada una de las celdas en consideración . Así que tenemos una bisucesión

$$S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$$

$$(n, k) \mapsto S^{(n)}(k)$$

que , para cada uno de los índices n , cumple la proposición " $S^{(n)}$ converge a x_0 " en \tilde{u}_n , y , a fuerza , en X .

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & \dots & & \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n & \dots & & \\ x_3^1 & x_3^2 & \dots & x_3^n & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \\ x_0 & x_0 & & x_0 & \dots & & \end{array}$$

Si en cada celda abierta u_n de las que intervienen, elegimos un punto x_k^n , ayudados de una función $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\phi(n) = (n, k)$, la sucesión $T = S \cdot \phi$, es una amalgama de las sucesiones $S^{(n)}$, en cuya formación contribuyen todas -o casi todas- las $S^{(n)}$ en cuestión.

Hacemos notar, y ése es nuestro objetivo, que una función T así formada no converge al punto x_0 . En efecto el conjunto $V = \{T(1), T(2), \dots\}$ es cerrado, de acuerdo a nuestro criterio para formar cerrados en el Capítulo 3. Y además x_0 no está en V .

Demos una definición: un espacio X satisface la condición AI de amalgamas infinitas si dada una bisucesión $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$ para la cual, cada sucesión $S^{(n)} : \mathbb{N} \rightarrow X$, definida por $S^{(n)}(k) = S(n, k)$, es convergente al punto x_0 , existe una función $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

a) para todo n , existe $\tilde{n} \geq n$, tal que $\phi^{-1}(\tilde{n} \times \mathbb{N}) \neq \emptyset$

b) $S \cdot \phi$ es convergente a x_0 .

COMENTARIO :

Esta manera de ver las amalgamas infinitas la hemos tomado del trabajo de M. SUAREZ.

Pasemos , sin más , a resumir lo dicho anteriormente .

AFIRMACION

En las condiciones impuestas al espacio celular X que recordamos al comenzar este capítulo , si X satisface la condición AI , de amalgamas infinitas , satisface también la condición de ser puntualmente finito .

7. CONDICIONES DE FINITUD LOCAL

Reconsideremos , pero en un marco más general , las condiciones de finitud local que J. H. C. Whitehead daba sobre sus CW-complejos ; condiciones que conducían a la compacidad local . Entre otras cosas , este tema a la par que da una respuesta al problema planteado en el Capítulo 2, por lo menos en el caso de celdas con ciertas condiciones de compacidad , muestra que se imponen ciertos cuidados sobre la forma como las celdas se encuentran las unas con respecto a las otras y , de manera muy particular , la trascendencia sobre la topología del espacio de las aglomeraciones que se permitan en las cercanías de un punto .

Para definir lo que al fin y al cabo llamaremos un complejo celular localmente finito , disponemos de dos topologías - la portadora y la débil - y de dos tipos de celdas - las abiertas y las cerradas - y las cuatro combinaciones conducen a propiedades locales enteramente diferentes en el caso general . No volveremos aquí sobre los casos que hacen intervenir la topología portadora ; si se desea puede consultarse (2) . En consecuencia solo encontraremos aquí la topología débil , en las condiciones de Whitehead , que regulan las aglomeraciones .

Enunciamos a continuación dos condiciones de finitud local que podrían ser satisfechas en una estructura celular, y entramos a compararlas :

Wh.1.a : Todo punto admite una vecindad que encuentra a lo sumo un número finito de celdas abiertas ;

Wh.1.c : todo punto admite una vecindad que encuentra a lo sumo un número finito de celdas cerradas .

Es evidente que la condición que hace intervenir celdas cerradas entraña la otra , pero , en general , no son equivalentes .

Se impone agregar una condición sobre la topología

t_u^{\sim} en cada celda , que asegure que las fronteras δu no estén alejadas de u : la condición de densidad que se enuncia así :

(D): en cada t_u^{\sim} , el conjunto u es denso en \tilde{u} .

Un conjunto abierto de X , para la topología débil $w(f)$ asociada a la familia $f = \{t_u^{\sim} \mid u \in \Sigma\}$, da lugar , al trazarlo con \tilde{u} , a un conjunto abierto en t_u^{\sim} , que si no es vacío , debe trazar también a u , como lo entraña la condición (D) . Así pues

$$\text{Wh.1.a} + (D) \Rightarrow \text{Wh.1.c} .$$

Otro aspecto de la finitud local es este :

Wh.2 : Todo punto admite una vecindad que es un sub-complejo finito .

Como un sub-complejo V absorbe enteramente toda una celda con borde \tilde{v} , desde que $v \cap V$ no sea vacío , entonces , la vecindad de que habla Wh.2 encuentra a lo sumo finitas celdas abiertas ; así que sin otras suposiciones

$$\text{Wh.2} \Rightarrow \text{Wh.1.a}$$

Inversamente supongamos que cada celda \tilde{u} es dis-

cretamente compacta en $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$, que δu es cerrado en \tilde{u} para $t_{\tilde{u}}$, y que los puntos del espacio X son cerrados. Veamos que en estas condiciones la finitud local de Whitehead, en su forma 1.a entraña, entonces, la de la forma 2: en efecto si V es una vecindad de un punto x que encuentra a lo sumo finitas celdas abiertas, procedemos así:

Con cada punto y en V buscamos una celda abierta $u_y \in \Sigma$ que lo contiene (las hay en número finito). Con cada una de ellas disponemos de su complejo portador $C(u_y)$ que, como vimos, es también finito - por cuanto las \tilde{u} se suponen discretamente compactas. La reunión $\cup C(u_y)$ es de nuevo un complejo finito, que, por contener a V , es una vecindad del punto. Así que

AFIRMACION

Si en el espacio X los puntos son cerrados, cada celda \tilde{u} es discretamente compacta en $(\tilde{u}, t_{\tilde{u}})$, y, en fin δu es cerrado en $t_{\tilde{u}}$, entonces las condiciones Wh.2 y Wh.1.a son equivalentes.

CONSECUENCIA

Si un complejo celular cumple con las

condiciones anotadas en la Afirmación anterior, entonces la condición Wh.2 equivale a la condición " todo punto del espacio admite una vecindad discretamente compacta " .

Comentario : El trabajo de Tesis de J. LUNA , que está por aparecer , en uno de sus apartes , se ocupa también de la finitud local en complejos celulares generales . El no utiliza la compacidad en el sentido que la entendimos aquí , sino en su forma tradicional . Se interesa , por otra parte , en un aspecto de la finitud local , introducido inicialmente - según creemos - para los CW-complejos , en el libro de Lundell-Weingram , y lo trata con éxito , en el caso general .

BIBLIOGRAFIA

- (1) Whitehead J.H.C., Combinatorial Homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213-245.
- (2) Ruiz C., Topología y Complejos Celulares. Tesis de Titularidad. Universidad Nacional Bogotá. (1973).
- (3) Ruiz C., Notas de Curso: Topología de Complejos Celulares. Universidad Nacional Bogotá. (1979).

- (4) Luna J., Tesis. Universidad Nacional Bogotá. (1981).
- (5) Suárez M., Trabajos no publicados sobre Convergencia.
- (6) Lundell A.; Weingram S., The Topology of CW-complexes. The University Series in Higher Mathematics. Van-
Nostrand; (1969).
- (7) Ruiz C., Topología o Convergencia. Ediciones La Rana
y El Aguila. U.P.T.C. Tunja. (1975).

Carlos J. RUIZ S.

Departamento de Matemáticas

Universidad Nacional

Bogotá - Colombia .