Boletín de Matemáticas
Vol. XIII, Nos 2,3,4 (1979), pags , 137 - 145 .

EL TEOREMA DE PULLBACK

IVAN CASTRO CHADID +

Definición .

Diremos que la estructura algebraica $(A\ ;\ \lambda_1\ ,\dots,\ \lambda_n)$ está contenido algebraicamente en la estructura algebraica $(E\ ;\ \rho_1\ ,\dots,\ \rho_n)$ si :

1) $A \subseteq E$

2) $x\ \rho_i\ y = x\ \lambda_i\ y$; para todo $i = 1\ ,\dots,\ n$ y para todo $x\ ,\ y \in A$.

Observación :

En este caso , también se suele afirmar que la estructura algebraica $(E\ ;\ \rho_1\ ,\dots,\ \rho_n)$ contiene algebraicamente a la estructura algebraica $(A\ ;\ \lambda_1\ ,\dots,\ \lambda_n)$.

Analicemos los siguientes problemas :

Problema 1.

Sea $f(x)$ un polinomio no constante

sobre el cuerpo F. Demuestre que $f(x)$ tiene por lo menos una raíz, en una extensión adecuada de F.

Problema 2.

Dado un dominio entero D, existe por lo menos un cuerpo extensión de D.

El método usual para resolverlos es el siguiente:

Solución del problema 1.

Sea $h(x)$ un factor irreducible de $f(x)$. El anillo $F[x]/(h(x))$ es un cuerpo para las operaciones de suma y producto usuales. En realidad las operaciones se llaman adición y multiplicación. El conjunto $\tilde{F}$ formado por los elementos $a+(h(x))$, con $a \in F$, es un subcuerpo de $F[x]/(h(x))$. La aplicación

$$\phi : F \to \tilde{F}$$
$$a \mapsto \phi(a) = a + (h(x))$$

es un isomorfismo.

(1)	Existe un cuerpo K, extensión de F, y un isomorfismo $\tilde{\phi}$ de K sobre $F[x]/(h(x))$ que extiende a ϕ.

Sea $c = \tilde{\phi}^{-1}(x + (h(x)))$. El paso siguiente consiste en demostrar que c es raíz de $h(x)$ y por lo tanto de $f(x)$.

Solución del problema 2.

Sean (a,b), $(c,d) \in M = D \times (D - 0)$ y la relación $\sim$, definida por $(a,b) \sim (c,d)$, si y solo si $ad = bc$

La relación $\sim$ es de equivalencia.

Sean $[a,b]$ la clase de equivalencia de la pareja (a,b) por esta relación, y H el conjunto de los $[a,b]$ con (a,b) en M.

Sobre H definimos las siguientes operaciones:

Suma : $[a,b] + [c,d] = [ad+bc, bd]$

Producto : $[a,b] \cdot [c,d] = [ac, bd]$

$(H, +, \cdot)$ es un cuerpo y el conjunto $\tilde{D}$ formado por los elementos $[a,1]$ con $a \in D$ es un subdominio de H.

La aplicación

$$\phi : D \rightarrow \tilde{D}$$
$$a \rightarrowtail \phi(a) = [a,1]$$

es un isomorfismo

$$\boxed{\text{Existe un cuerpo } K \text{, extensión de } D \text{, y un isomorfismo } \tilde{\phi} \text{ de } K \text{ sobre } H \text{ que extiende a } \phi.} \quad (2)$$

Observación

Como podemos ver , la clave para la solución de estos dos problemas , estriba en la justificación de las afirmaciones (1) y (2) . Más aún si demostramos que :

(3)

Dado un isomorfismo ϕ de la estructura algebraica $(A; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sobre la estructura algebraica $(A'; \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$, contenida algebraicamente en la estructura algebraica $(E'; \rho'_1, \ldots, \rho'_n)$; existe una estructura algebraica $(E; \rho_1, \ldots, \rho_n)$ que contiene algebraicamente a la estructura $(A; \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y un isomorfismo $\tilde{\phi}$ de $(E; \rho_1, \ldots, \rho_n)$ sobre $(E'; \rho'_1, \ldots, \rho'_n)$ que extiende a ϕ .

tendremos , entre otras , la respuesta a las afirmaciones (1) y (2) .

Si demostramos (3) para $n = 1$, fácilmente podremos demostrarlo para cualquier $n > 1$ definiendo simplemente las operaciones ρ_i para todo $i = 2, \ldots, n$ de la siguiente manera :

$$x \rho_i y = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(x) \rho'_i \tilde{\phi}(y)) \text{ para todo } x, y \in E ,$$

(1) donde $\tilde{\phi}$ es el isomorfismo obtenido en el caso $n=1$ de $(E;\ \rho_1)$ sobre $(E';\ \rho_1')$, que extiende a ϕ.

Gracias a la definición dada en (1) de los operadores ρ_i, resulta muy sencillo demostrar que $\tilde{\phi}$ es un isomorfismo de la estructura algebraica $(E;\ \rho_1, \ldots, \rho_n)$ sobre la estructura algebraica $(E';\ \rho_1', \ldots, \rho_n')$, que extiende a ϕ.

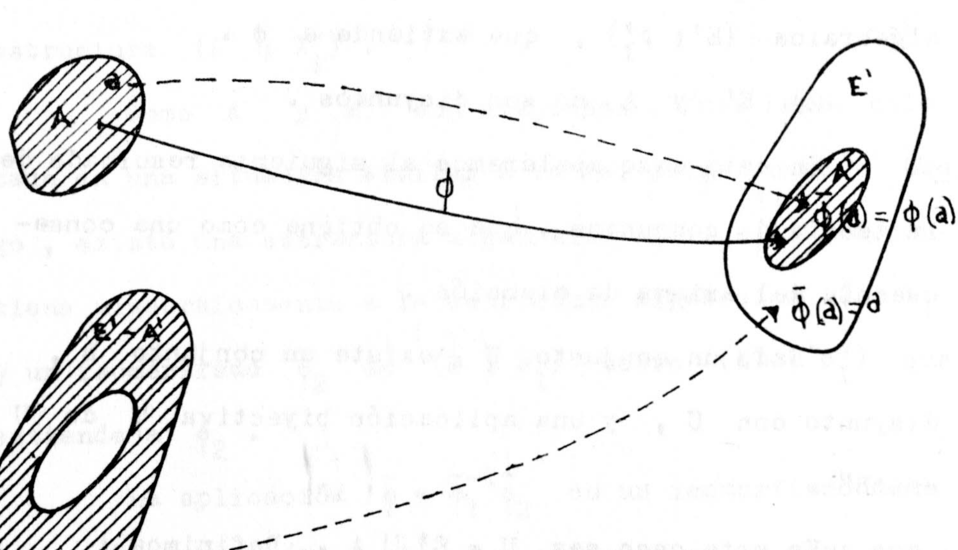
Para el caso $n = 1$, este problema es conocido con el nombre de "Teorema de Pullback".

Demostración del Teorema de Pullback.

Se presentan dos posibilidades:

1) E' y A son disyuntos.

En este caso se define $E = A \cup (E' - A')$



y $\tilde{\phi} : E \to E'$

$$a \mapsto \tilde{\phi}(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \in E' - A' \\ \phi(a) & \text{si } a \in A . \end{cases}$$

$\tilde{\phi}$, así definida , es una aplicación biyectiva .

Definimos el operador ρ_1 de la siguiente manera:

$$x \rho_1 y = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(x) \rho_1' \tilde{\phi}(y))$$

para todo $x , y \in E$.

Si $x,y \in A$ entonces $x \rho_1 y = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(x) \rho_1' \tilde{\phi}(y))$ $= \tilde{\phi}^{-1}(\phi(x) \lambda_1' \phi(y)) = \tilde{\phi}^{-1}(\phi(x \lambda_1 y)) = \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(x \lambda_1 y)) =$ $x \lambda_1 y$. Luego , la estructura algebraica $(E; \rho_1)$ contiene algebraicamente a la estructura $(A; \lambda_1)$.

Además , es evidente que $\tilde{\phi}$ es un isomorfismo de la estructura algebraica $(E ; \rho_1)$ sobre la estructura algebraica $(E'; \rho_1')$, que extiende a ϕ .

2) E' y A no son disyuntos .

En este caso apelaremos al siguiente resultado de la teoría de conjuntos , que se obtiene como una consecuencia del axioma de elección .

"Dado un conjunto U , existe un conjunto B , disyunto con U , y una aplicación biyectiva ψ de U en B" .

En este caso sea $U = E' \cup A$. Definimos :

i) $E'' = \psi(E')$, $A'' = \psi(A')$

ii) Los operadores ρ_1'' y λ_1'' por las fórmulas

a) $x \rho_1'' y = \psi(\psi^{-1}(x) \rho_1' \psi^{-1}(y))$; para $x, y \in E''$.

b) $x \lambda_1'' y = \psi(\psi^{-1}(x) \lambda_1' \psi^{-1}(y))$; para $x, y \in A''$.

c) $\psi|_{E'} = \tilde{\phi}_1$ y $\tilde{\phi}_1|_{A'} = \phi_1$

De a) y b) se deduce que la estructura algebraica $(A'' ; \lambda_1'')$ está contenida algebraicamente en la estructura algebraica $(E'' ; \rho_1'')$.

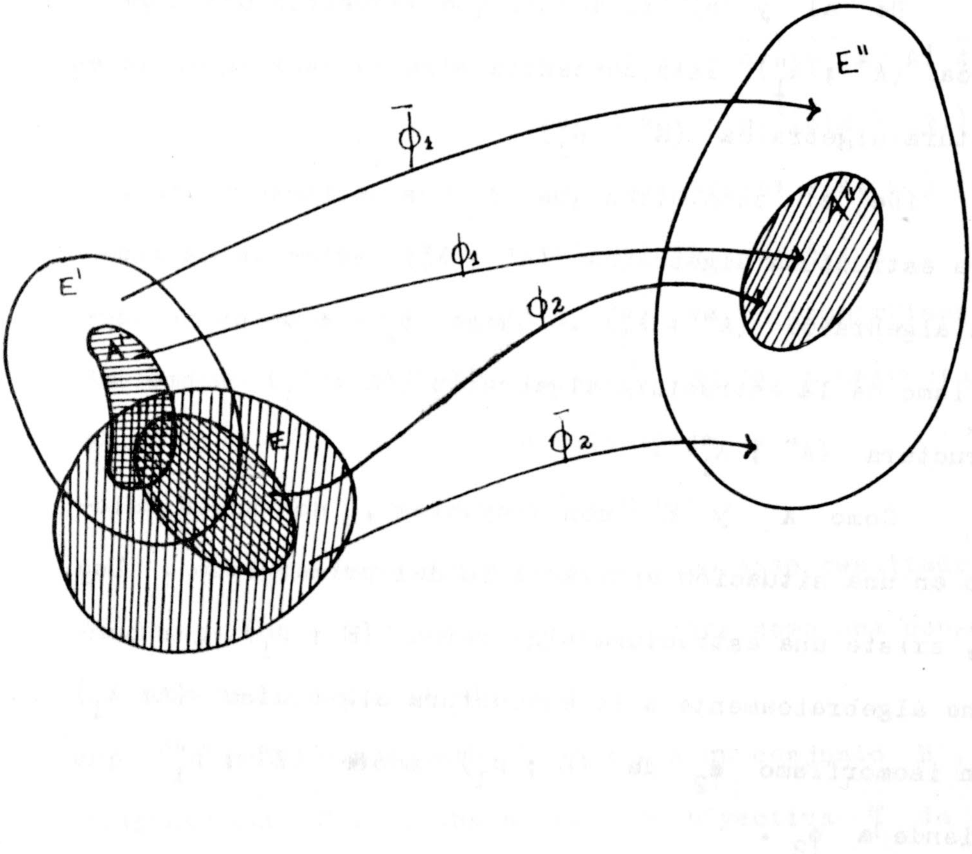
De c) concluímos que ϕ_1 es un isomorfismo , de la estructura algebraica $(A' ; \lambda_1')$ sobre la estructura algebraica $(A'' ; \lambda_1'')$. Luego $\phi_2 = \phi_1\phi$ es un isomorfismo de la estructura algebraica $(A ; \lambda_1)$ sobre la estructura $(A'' ; \lambda_1'')$.

Como A y E'' son disyuntos , nos hemos colocado en una situación similar a la del primer caso . Luego , existe una estructura algebraica $(E ; \rho_1)$ que contiene algebraicamente a la estructura algebraíca $(A ; \lambda_1)$ y un isomorfismo $\tilde{\phi}_2$ de $(E ; \rho_1)$ sobre $(E'' ; \rho_1'')$ que extiende a ϕ_2 .

La aplicación $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_1^{-1}\tilde{\phi}_2$ es un isomorfismo de $(E ; \rho_1)$ sobre $(E' ; \rho_1')$ que extiende a ϕ , ya que

$$(\tilde{\phi}_1^{-1}\ \tilde{\phi}_2)\ |\ A = \phi_1^{-1}\ \phi_2 = \phi_1^{-1}\ \phi_1\ \phi = \phi\ .$$

que era lo que queríamos demostrar .



BIBLIOGRAFIA

1) Warner Seth , Modern Algebra .
Prentioe - Hall , Inc. (1965) .

2) Herstein I.N. , Algebra Moderna .
Ed. Trillas , S.A. México , 1970 .

3) Fraleigh John B. , A First Course in Abstact
Algebra . Addison - Wesley
Publishing Company (1977) .

+ Este trabajo fué presentado en el VIII Coloquio Colombiano de Matemáticas .

Iván Castro Chadid
Departamento de Matemáticas
Universidad Javeriana
Bogotá - Colombia .