Boletín de Matemáticas
-Vol.XIII, Nos. 2,3,4 (1979) , pags , 119 - 136

EL ASPECTO ALGORITMICO DEL ALGEBRA LINEAL

JESUS HERNANDO PEREZ

∫ 1. Introducción

Una de las características más importantes del Algebra Lineal , es la de contar con una serie de algorítmos que reducen la mayoría de los problemas a simples cálculos aritméticos cuya realización no presenta mayor dificultad . Sinembargo , la totalidad de los textos en esta materia , relegan esta importante cualidad al nivel de los problemas y aplicaciones . El presente trabajo es tomado de una propuesta general que hemos venido ofreciendo para desarrollar los cursos de Algebra Lineal en forma tal que tanto en la teoría como en las aplicaciones quede explícito su carácter algorítmico .

A manera de ejemplo , presentaremos la forma cómo se debería introducir el concepto de dimensión de los espacios vectoriales sobre un campo K que supondremos de característica cero .

∫2. Matrices y Funciones Elementales

De todos es conocido el papel trascendental que juegan las matrices elementales en diferentes algoritmos del Algebra Lineal ; pongamos por caso el de Gauss para resolver ecuaciones lineales , o el de eliminación para determinar la inversa de una matriz invertible . Son tan numerosos los algoritmos que descanzan sobre las propiedades de estas matrices que uno realmente se pregunta por el peso dentro de la teoría , del concepto de matriz elemental . Buscando una respuesta para esta inquietud hemos logrado encontrar una forma amena de introducir y desarrollar algoritmicamente la teoría de los espacios vectoriales de dimensión finita .

Veamos en primer lugar , algunos conceptos , resultados y anotaciones generales .

1. Si V y W son espacios vectoriales sobre K , por $L(V,W)$, se denota el espacios vectorial de las

funciones lineales de V hacia W .

2. Para n , m enteros positivos $M_{n,m}(K)$ denota el espacio vectorial de las matrices de n filas y m columnas con elementos en K . Cuando $n = m$, escribimos simplemente $M_n(K)$.

Emplearemos dos notaciones que resultan cómodas para las matrices . Si $A \in M_{n,m}(K)$,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} ; \quad A = (A^1, \ldots A^j, \ldots A^m)$$

donde $A_i \in K^m$ es la fila i de A , $i = 1,\ldots,n$; $A^j \in M_{n,1}(K)$ es la columna j de A , $j = 1,\ldots,m$.

3. Entre los espacios $L(K^n,K^m)$ y $M_{n,m}(K)$ hay un isomorfismo :

$$L(K^n,K^m) \rightarrow M_{n,m}(K)$$

$$f \rightarrowtail M(f) = \begin{bmatrix} f(E_1^n) \\ \vdots \\ f(E_n^n) \end{bmatrix} ,$$

$$F(A) \leftarrow A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

donde $E_i^n = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \ldots, \delta_{ni}) \in K^n$ (δ_{ij} es el δ de Kronecker) y $F(A)$ es la función definida por

$$F(A)(x_1, \ldots, x_n) = x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$$

para todo $(x_1, \ldots x_n) \in K^n$. Las funciones M y F además de ser lineales, satisfacen las siguientes propiedades:

a) $F.M = id_P$, $M.F = id_Q$

donde $P = L(K^n, K^m)$ y $Q = M_{n,m}(K)$. Esto muestra que F y M son inversas la una de la otra y por lo tanto son biyectivas;

b) Si $f \in L(K^n, K^m)$, $g \in L(K^m, K^p)$, entonces, $M(g.f) = M(f) x M(g)$;

c) Si $A \in M_{n,m}(K)$ y $B \in M_{m,p}(K)$, entonces, $F(AxB) = F(B) . F(A)$.

d) Si $I_n \in M_n(K)$ es la matriz idéntica, $I_n = M(id_H)$, $H = K^n$

e) Para $f \in L(K^n, K^m)$ y $A \in M_{n,m}(K)$, f es invertible si y solo si $M(f)$ es invertible; A es invertible si y solo si $F(A)$ es invertible . Además $M(f)^{-1} = M(f^{-1})$, $F(A)^{-1} = F(A^{-1})$.

En adelante , $M(f)$ y $F(A)$, se llamarán respectivamente la matriz de f y la función de A .

4. Si $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$, $\mathbb{P}_p$ denotará al grupo de las permutaciones del conjunto formado por $1,2,\ldots,p$.

Llamaremos funciones elementales , a las funciones lineales y biyectivas de uno cualquiera de los tres tipos siguientes :

a) Funciones de permutación . Para $\pi \in \mathbb{P}_n$, p_π está definido por

$$K^n \xrightarrow{p_\pi} K^n$$

$$(x_1,\ldots x_n) \rightarrow (x_{\pi(1)},\ldots x_{\pi(n)}) .$$

Obsérvese que $p_\pi^{-1} = p_{\pi^{-1}}$

b) Funciones simples . Para $a \in K$, $a \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$,

$$S_i(a) : K^n \rightarrow K^n$$

$$(x_1,\ldots,x_n) \rightarrowtail (x_1,\ldots,ax_i,\ldots x_n) .$$

Obsérvese que $S_i(a)^{-1} = S_i(1/a)$.

c) Funciones propiamente elementales . Dados

$a \in K$; i , $j = 1,\ldots,n$ $i \neq j$ (supongamos por ejemplo $j > i$) .

$$e_{ij}(a) : K^n \to K^n$$

$$(x_1\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_i+ax_j,\ldots,x_n) .$$

Obsérvese que $e_{ij}(a)^{-1} = e_{ij}(-a)$.

Correspondientemente las matrices elementales , son las matrices de las funciones elementales . Estas matrices son invertibles .

a') Matrices de permutación . Para $\pi \in \mathbb{P}_n$,

$$P_\pi = M(p_\pi) = \begin{bmatrix} E^n_{\theta(1)} \\ \vdots \\ E^n_{\theta(n)} \end{bmatrix} = (F_n^{\pi(1)} \ldots F_n^{\pi(n)})$$

donde $\theta = \pi^{-1}$ y $F_n^j = \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{bmatrix}$

Estas matrices tienen la siguiente propiedad fundamental . Si $A \in M_{n,m}(K)$, $\pi \in \mathbb{P}_n$, $\lambda \in \mathbb{P}_m$, entonces ,

$$P_\pi \times \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\theta(1)} \\ \vdots \\ A_{\theta(n)} \end{bmatrix} , \theta = \pi^{-1}$$

$$(A^1,\ldots A^m) \times P_\lambda = (A^{\lambda(1)},\ldots,A^{\lambda(m)})$$

b') Matrices simples . Nuevamente sean $a \in K$, $a \neq 0$, $i = 1,\ldots, n$.

$$S_i(a) = M(s_i(a)) = \begin{bmatrix} E^n_1 \\ \vdots \\ aE^n_i \\ \vdots \\ E^n_n \end{bmatrix} = (F^1_n,\ldots,aF^i_n,\ldots,F^n_n) .$$

Además

$$S_i(a) \times \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ aA_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} ;$$

$$(A^1,\ldots,A^m) \times S_j(a) = (A^1,\ldots,aA^j,\ldots,A^m) .$$

En estas últimas relaciones debemos tener en cuenta que $S_i(a) \in M_n(K)$ y $S_j(a) \in M_m(K)$; por lo tanto, i pertenece al conjunto formado por $1,\ldots,n$, j pertenece al conjunto formado por $1,\ldots,m$.

c') Matrices propiamente elementales . Para

$a \in K$, $n \geq j > i \geq 1$,

$$E_{ij}(a) = M(e_{ij}(a)) = \begin{bmatrix} E^n_1 \\ \vdots \\ E^n_i \\ \vdots \\ E^n_j + aE^n_i \\ \vdots \\ E^n_n \end{bmatrix}$$

$$= (F^1_n, \ldots, F^i_n + aF^j_n, \ldots, F^j_n, \ldots, F^n_n) .$$

Si $A \in M_{n,m}(K)$,

$$E_{ij}(a) \times \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j + aA_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} ,$$

$$(A^1, \ldots, A^m) \times E_{ij}(a) = (A^1, \ldots, A^i + aA^j, \ldots A^j, \ldots A^m) .$$

5. Llamaremos cambios elementales en las filas (o columnas) de una matriz A , o simplemente , cambios elementales , a una cualquiera de las siguientes operaciones :

a) Permutar filas (o columnas)

b) Multiplicar una fila (o columna) por un escalar diferente de cero .

c) Sumar a una fila (o columna) , un múltiplo de otra .

De acuerdo con las propiedades de las matrices elementales , podemos afirmar lo siguiente :

Un cambio elemental en las filas de una matriz A , equivale a multiplicar esta matriz a izquierda por una matriz elemental .

Si $A,B \in M_{n,m}(K)$ y si B se obtiene de A por cambios elementales , entonces existen matrices elementales $P_1,\ldots P_k \in M_n(K)$ y $Q_1,\ldots,Q_t \in M_m(K)$ tales que , $B = P_k \times \ldots \times P_1 \times A \times Q_1 \times \ldots \times Q_t$.

Como el producto de matrices invertibles es una matriz invertible , entonces

$$B = P \times A \times Q$$

donde $P \in M_n(K)$ y $Q \in M_m(K)$ son invertibles .

§ 3. La relación de semejanza

Para f, $g \in L(K^n,K^m)$ diremos que f es semejante a g, (y escribiremos $f \sim g$) si existen isomorfismos $p \in L(K^n,K^n)$, $q \in L(K^m,K^m)$ tales que $g = q.f.p$.

La relación correspondiente en $M_{n,m}(K)$ se enuncia así : A es semejante a B si $B = P \times A \times Q$ donde P y Q son matrices invertibles . Observemos que si B se obtiene de A por cambios elementales , entonces A es semejante a B . La afirmación recíproca de esta última también es verdadera , aunque no nos ocuparemos de éllo en este trabajo .

Los siguientes teoremas se demuestran sin dificultad .

Teorema 1.

Sean f , $g \in L(K^n,K^m)$ y f semejante a g .

a) f es 1-1 si y solo si g es 1-1 .

b) f es sobre si y solo si g es sobre .

Teorema 2.

Toda matriz $A \in M_{n,m}(K)$ no nula , es semejante a una matriz C_r de la forma :

$$C_r = \begin{bmatrix} E_1^m \\ \vdots \\ E_r^m \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde el mínimo de los valores de n y m es mayor o igual que r y $r \geq 1$.

En adelante , estas matrices incluyendo la matriz nula , recibirán el nombre de "Matrices canónicas de Hermite" .

Las funciones canónicas , son las funciones de las matrices canónicas .

El teorema 2 , es equivalente a la siguiente afirmación :

Si $f \in L(K^n,K^m)$ entonces f es semejante a una función de Hermite .

De los teoremas 1 y 2 se deduce un algoritmo muy útil que llamaremos Algoritmo de Hermite :

Para determinar si f es 1-1 ó sobre , segui mos los siguientes pasos :

a) Calculamos la matriz $A = M(f)$

b) Transformamos la matriz A en una matriz canónica C_r, mediante cambios elementales .

c) Buscamos la función canónica $F(C_r)$ y determinamos si esta función es 1-1 ó sobre . La respuesta para f será la misma que se obtenga para $F(C_r)$.

Ejemplo : Determinemos si la función lineal

$$f(x,y,z,w) = (x+y+z+w , x-y+z+w , x-y-z-w)$$

es 1-1 ó sobre

$$A = M(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Utilizando cambios elementales obtenemos que A es semejante a la matriz C_r

$$C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La función canónica $F(C_r) = \varphi$ es

$\varphi(x,y,z,w) = (x,y,z)$

φ es sobreyectiva pero no 1-1 . Por lo tanto , f es sobre y no es 1-1 .

$\int$4. Dimensión

Diremos que los K-espacios vectoriales V y W tienen la misma dimensión o son equidimensionales , si son isomorfos , es decir , si existe una biyección $f \in L(V,W)$.

La relación de equidimensionalidad es de equivalencia sobre el conjunto de los K-espacios vectoriales .

El siguiente teorema nos da una idea inicial de esta relación de equivalencia .

Teorema 3.

K^n es isomorfo a K^m si y solo si $n = m$.

Demostración

Supongamos $n \neq m$. Consideremos dos casos :

a) $m > n$. En este caso , las funciones canónicas en $L(K^n,K^m)$ son las siguientes :

$$\varphi_0(X) = 0 \quad , \quad X \in K^n$$

$$\varphi_r(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_r,0,\dots,0) \; ; \; r = 1,\dots,n.$$

Ninguna de estas funciones es sobreyectiva pues $\varphi_r(X) \neq E_m^m$ para todo $X \in K^m$ y todo r que pertenece al conjunto de elementos $0 , 1 , \ldots , n$.

De éstas , la única función 1-1 es φ_n . Como toda función de $L(K^n,K^m)$ es semejante a una canónica , entonces ninguna de ellas es sobreyectiva .

b) $n > m$. En este caso la situación es la siguiente : ninguna función canónica es inyectiva y la única sobreyectiva es φ_m, luego ningún elemento de $L(K^n,K^m)$ es 1-1 . Por lo tanto , si $n \neq m$, K^n y K^m no son isomorfos .

Observemos que , entre las funciones canónicas de $L(K^n,K^m)$, la única que es 1-1 es $\varphi_n = id_H(H = K^n)$, que también es sobreyectiva . Esto nos lleva al siguiente resultado :

Si $f \in L(K^n,K^m)$ entonces f es 1-1 si y solo si f es sobre .

Regresando al problema de la dimensión , para un espacio vectorial V se tiene una y solo una de las siguientes posibilidades :

a) V es isomorfo a un espacio nulo . En este caso, V es también un espacio nulo , pues toda función li neal transforma el cero en cero . De otra parte , es evidente que dos espacios nulos son isomorfos . Se tiene entonces que los espacios nulos forman una clase de equivalencia . Es la clase de equivalencia de los espacios de dimensión cero .

b) V es diferente del espacio nulo y existe $n \geq 1$ tal que V es isomorfo a K^n . n queda determinado de manera única por V pues si V es isomorfo a K^n y V es también isomorfo a K^m , entonces K^n y K^m son isomorfos , luego $n = m$.

La dimensión de V es n . Para cada $n = 1,2,\ldots$, hay entonces una clase de equivalencia : la de los espacios isomorfos a K^n , o de dimensión n .

c) V es diferente del espacio nulo y para cada $n = 1,2,\ldots,$ V no es isomorfo a K^n . Llamaremos a estos espacios , espacios vectoriales de dimensión infinita , en oposición a los anteriores , a los cuales llamaremos de dimensión finita . Aunque estos espacios no son isomorfos entre sí , pueden considerarse , en una primera aproximación , como una sola clase .

Un diagrama de Venn nos muestra la manera como queda la partición sobre el conjunto de los espacios vectoriales sobre K .

0	1	2	...	n	...
			ω		

§ 5. Bases

En el proceso desarrollado previamente, hemos llegado al concepto de dimensión sin pasar por los conceptos de independencia lineal, generador lineal y base de un espacio vectorial.

Estos conceptos y en general los temas del Algebra Lineal pueden ser desarrollados con base en este enfoque[1].

Terminaremos el trabajo explicando cómo introducir el concepto de base.

Consideremos $X_1, \ldots X_p$, vectores de un espacio vectorial V. La función lineal $f : K^p \to V, f(x_1, \ldots, x_p) = x_1 X_1 + \ldots + x_p X_p$ recibirá el nombre de función lineal asociada a los vectores $X_1, \ldots, X_p$.

Esta función depende de la forma como se enumeren los vectores. Sinembargo si $\pi \in \mathbb{P}_p$, la función f asociada a $X_1, \ldots, X_p$, y la función g asociada a $X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(p)}$, se relacionan de la manera siguiente:

$$g = f \cdot p_\theta \quad (\theta = \pi^{-1})$$

Por esta razón, la definición que damos a conti nuación , no depende de la forma como se enumeren los vectores .

Definición

Los vectores $X_1,\ldots,X_p \in V$ se dicen:

a) Linealmente independientes si y solo si f es 1-1 .

b) Un generador lineal de V si y solo si f es sobre .

c) Una base de V si y solo si f es biyectiva (un isomorfismo) .

Si en la definición $V = K^n$, el algoritmo de Hermite nos permite decidir si los vectores son linealmente independientes , forman un generador lineal , o una base de K^n .

Consideremos como ejemplo los vectores $E_1^n,\ldots,E_n^n$. La función asociada a estos vectores es : $id_H (H = K^n)$ y entonces , forman una base de K^n .

Los teoremas clásicos sobre la dimensión se demuestran sin ninguna dificultad . Veamos uno como ejemplo :

Teorema 4

Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $X_1,\ldots,X_p$ vectores de V

a) Si $X_1,\dots,X_p$ son linealmente independientes, entonces $n \geq p$.

b) Si $X_1,\dots,X_p$ es un generador lineal de V , entonces $p \geq n$.

c) Si $X_1,\dots,X_p$ es una base de V , entonces $p = n$.

Demostración

Llamaremos $f : K^p \to V$ a la función lineal asociada a $X_1,\dots,X_p$.

Sea $\varphi : V \to K^n$ un isomorfismo .

Si $X_1,\dots,X_p$ son linealmente independientes , entonces $\varphi \cdot f \in L(K^p,K^n)$ es 1-1 . Como en $L(K^p,K^n)$ para $p > n$, no hay funciones 1-1 , se concluye que $n \geq p$.

Las restantes afirmaciones se demuestran análogamente .

1 Ver el texto Algebra Lineal y Geometría por Gilma de Villamarín y Jesús Hernando Pérez , Universidad Nacional , 1979 .

Jesús Hernando Pérez
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional . Bogotá .