# FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE MEDICION EN CIENCIAS EMPIRICAS

por

Siegfried Weber

Un método y al mismo tiempo una característica de las llamadas ciencias naturales como física, química, etc., consiste en medir propiedades de objetos, esto es, la medición (ver p.ej. [1] V. Helmholtz, [2] O., Hölder). En las últimas décadas se ha empezado a introducir sistemáticamente la medición también en las llamadas ciencias sociales como psicología, economía, etc., (ver p.ej. [3] V. Neumann, Morgenstern, [4] Arrow, Karlin, Suppes, [5] Krantz, Luce, Suppes, Tversky). Areas como psicometría, econometría, teoría de escalas, muestran que las ciencias también pueden clasificarse de otra manera, p.ej., la psicometría como parte de la psicología estaría en las ciencias naturales. Naturalmente se tiene que tomar en consideración la consistencia, la reproducibilidad y los errores.

Se distinguen cuatro modos fundamentales de medir (escalas), los cuales describen lo que es empírica mente razonable en las propiedades en cuestión:

1) Escala **nominal**: Los objetos son clasificados con respecto a una propiedad, es decir, tienen sentido las relaciones "igual","diferente", "no comparable". Por ejemplo: (fumador - no fumador) ó (recomendar - rechazar - irresoluto) frente a un sistema político, un artículo, etc. Cada escala nominal es única salvo transformaciones biyectivas (se permite el cambio en la denominación).

2) Escala **ordinal**: Los objetos son ordenados con respecto a una propiedad, es decir, tienen sentido las relaciones "igual", "mayor", "menor". Por ejemplo, la escala de dureza de Mohs es la física, o también, en competencias deportivas, la escala con respecto a la relación "vencer" (no necesariamente transitiva! ).

Cada escala ordinal es única salvo transformaciones estrictamente crecientes.

3) Escala de **intervalos**: Además de las de 2) son invariantes los cocientes de diferencias. Por ejemplo escalas de temperaturas o tests de inteligencia. Cada escala de intervalos es única salvo transformaciones afines $f \to \alpha \cdot f + \beta$ con $\alpha > o$.

4) Escala de razones: Además de las de 3) son invariantes los cocientes. Por ejemplo, medir el peso o estimar el tamaño en la psicofísica. Cada escala de razones es única salvo transformaciones de semejanza: $f \to \alpha \cdot f$ con $\alpha > o$.

En general solamente 2), 3) y 4) se consideran como escalas de medición. Formulado en general, el objetivo de la medición puede describirse así: empesando con una estructura relacional empírica $(A, r_1, \ldots, r_n)$ se trata de hallar (todos) los homomorfismos $f : A \to \mathbb{R}^k$, que transforman la estructura empírica en una estructura relacional numérica $(\mathbb{R}^k, S_1, \ldots, S_n)$. El problema de representación consiste en hallar axiomas para la estructura empírica (formulación cualitativa) tales que exista un homomorfismo (formulación cuantitativa). El problema de unicidad consiste en hallar todas las transformaciones permisibles de tales homomorfismos, donde $k$ es el número de las propiedades medidas al mismo tiempo. La llamada medición conjunta trata del caso $k > 1$, siendo

$$A = A_1 x \ldots x A_k \ , \ f = (f_1, \ldots, f_k), f_i : A_i \to \mathbb{R}.$$

En seguida damos dos resultados conocidos para el caso $k = 1$ y $n = 1$ para mostrar lo característico de la teoría de la medición.

**Medición ordinal.** (ver [2] ):

Teorema 1. Sea $A$ un conjunto finito, no vacío. Sea $\gtrsim$ un preorden en $A$ (es decir, para todo $a$ y $b$, $a \gtrsim b$ ó $b \gtrsim a$ ; además $a \gtrsim b$ y $b \gtrsim c$ implican $a \gtrsim c$ ).

Entonces: (1.R) Existe $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $a \gtrsim b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$, es decir, existe un homomorfismo "fuerte" $f$, y,

(1.U) Para cualquier otro homomorfismo fuerte $g : A \to \mathbb{R}$ existe una transformación estrictamente creciente $\mathcal{S}$: Rango $(f) \to$ Rango $(g)$ tal que $g = \mathcal{S} \circ f$ es la composición de $f$ con $\mathcal{S}$.

Esbozo de la demostración: Para cualquier $a \in A$ se define: la clase de equivalencia

$$[a] : = \{b \in A \mid a \gtrsim b \quad y \quad b \gtrsim a \text{, o sea } a \sim b\} ;$$

se introduce un orden conviniendo que $[a] \gtrsim [c] : \Longleftrightarrow a \gtrsim c$ , y se define una función $\overline{f}$ por $\overline{f}([a]) : =$ número de las clases de equivalencia $[c]$ tales que $[a] \gtrsim [c]$ y una función $f$ por $f(a) : = \overline{f}([a])$. El resto se prueba fácilmente.

Nota: Teoremas más generales se hallan en [6] Cantor, [7] Birkhoff y [8] Debreú.

Medición de probabilidades como aplicación de medición de razones ( ver [4] ). Se empieza con una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ sobre un conjunto no vacío $\Omega$. Se tra ta de ordenar los sucesos $A \in \mathcal{A}$ (mediante un preorden $\gtrsim$ en $\mathcal{A}$ con axiomas adicionales, "probabilidad cualitativa" ) de tal manera que se tenga la existencia de una probabilidad (probabilidad cuantitativa) $P : \mathcal{A} \to [0,1]$.

La ventaja es, que a veces se puede definir más fácilmente $\gtrsim$ que $P$ o que $\gtrsim$ sea dado de antemano intuitivamente. Esta es la razón por la cual la probabilidad cualitativa se denomina también probabilidad subjetiva ó intuitiva ó personal; ver [9] Kyburg Smokler.

<u>Definición 1</u>: Se dice que $(\Omega, \mathcal{A}, \gtrsim)$ es una estructura de probabilidad cualitativa sí y solo si:

a) $\gtrsim$ es un preorden en $\mathcal{A}$,

b) para cada $A$, $A \gtrsim \phi$, $\Omega \gtrsim \phi$ (es decir, $\Omega \gtrsim \phi$ y no $\phi \gtrsim \Omega$);

c) si $A \cap B = A \cap C = \phi$ entonces $B \gtrsim C \Longleftrightarrow A \cup B \gtrsim A \cup C$.

<u>Nota</u>: Para que exista una probabilidad $P$ con $A \gtrsim B \Leftrightarrow P(A) \geqslant P(B)$ los axiomas a), b) y c) son necesarios. No es posible definir $A \gtrsim B$ por $A \supseteq B$, porque en general $P(A) \geqslant P(B)$ no implica $A \supseteq B$.

<u>Definición 2</u>: De una estructura de probabilida cualitativa $(\Omega, \mathcal{A}, \gtrsim)$ se dice que es

d) arquimediana: sí y sólo si para cada $A \gtrsim \phi$ ,

$A \neq \phi$, cada sucesión $\{A_i\}_i$ con la propiedad "existen $B_i$, $C_i$ tales que $B_1 = A_1$, $B_1 \sim A$, $B_i \sim A_i$, $C_i \sim A$, $B_i \cap C_i = \emptyset$, $B_i \cup C_i = A_{i+1}$" es finita.

e) Regular sí y sólo si para $A \cap B = \emptyset$, $A \gtrsim C$, $B \gtrsim D$ existen $C'$, $D'$, $E$ tales que $C' \sim C$, $D' \sim D$, $E \sim A \cup B$, $C' \cap D' = \emptyset$, $C' \cup D' \subset E$.

<u>Nota</u>: La condición d) se cumple cuando $\Omega$ es finito; la condición e) es realizable p.ej. para $\Omega = \{A,B,C,D\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $A \sim B \sim C$, $D \succ A$.

<u>Teorema 2</u>: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \gtrsim)$ una estructura de probabilidad cualitativa arquimediana regular.

Entonces existe una única probabilidad (finito-aditiva) $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ tal que $A \gtrsim B \Leftrightarrow P(A) \geq P(B)$,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

es decir, $P$ es un homomorfismo fuerte con respecto al orden y un homomorfismo restringido con respecto a las operaciones $\cup$ y $+$.

Indicación para la demostración (una demostración completa se halla en [5]):

Se reduce la estructura de probabilidad a una estructura especial ordenada, aditiva $(\mathfrak{A}, \gtrsim, \mathfrak{B}, \square)$, donde $\mathfrak{A}$ se define por formación de ciertas clases de conjuntos de $\mathcal{A}$, $\gtrsim$ es el preorden en $\mathfrak{A}$

derivado de $\succsim$ ; y, por último $\square : \mathcal{B} \to \mathcal{O}\!\mathcal{L}$ es la operación binaria en $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ restringida a $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}\!\mathcal{L} \times \mathcal{O}\!\mathcal{L}$, derivada de $\cup$. Para obtener la propiedad $P(\Omega) = 1$ se especifica el coeficiente $\alpha$ logrando así que P sea única.

Nota: Para una información más detallada sobre la teoría de medición y muchas referencias, ver p. ej. [5] .

***

## BIBLIOGRAFIA

[1] V.Helmholtz, H., Counting and measuring, Princeton, New Jercey, Van Nostrand, 1930 (Traducción de "Gesammelt Abhandlungen", Vol.3, 1895, p. 356-391).

[2] Hölder, O., Die Axiome der Quantitat und die Lehre vom Mass. Ber. Verh. Kgl. Sächsisch. Ges. Wiss., Leipzig, Math. Phys. Classe 1901, 53, p. 1-64.

[3] V. Neumann, Morgenstern, O. Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, 1944.

[4] Arrow, K., Karlin, S., Suppes, P., Mathematical Methods in the social sciences, Stanford University Press, 1960.

[5] Krantz, D.H., Luce, R.D., Suppes, P. Tversky, A., Foundations of measurement, Academic Press, New York-London, 1971.

[6] Cantor, G., Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Annalen 1895, 46, p.481-512.

[7] Birkhoff, G., Lattice theory, New York, American Math. Society, Colloqium Publ, N° XXV 1948.

[8] Debreu, G., Representation of preference ordering by a numerical function. En Thrall, Coombs, Davis (Edit.): Decison processes, New York, Wiley, 1954, p. 159-165.

[9] Kyburg, H. E., Smokler, H.E. (Edit.), Studies in subjective probability, New York, Wiley, 1964.

***

*Universidad de los Andes*
*Bogota, D.E., Colombia S.A.*