Boletín de Matemáticas
Volumen X (1976), págs. 48--60

COMO RECONOCER Y ENCONTRAR UNA APROXIMACION OPTIMA PARA UNA FUNCION (*)

HERNANDO MATEUS

1.1. Para el problema de aproximación de funciones trabajaremos con los siguientes instrumentos :

$$\{ X, N, S, f, p \}$$

donde :

I. X es típicamente un subconjunto de funciones continuas en $[a,b]$, o X es un subespacio de R^n ; en general X será un espacio lineal sobre los reales o complejos.

II. N es una norma definida en X

III. S es un subespacio no vacío de X.

IV. f es un elemento de X .

V. p es un elemento de S.

1.2. Diremos que N es una seminorma definida en X si :

i. $N : X \to R$

ii. $N(\gamma f) = |\gamma| \cdot N(f)$ $\qquad \forall f, g \in X$

iii. $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$ $\qquad \forall \gamma \in R$

(*) Texto de la conferencia dictada por el autor en el V Coloquio Colombiano de Matemáticas, Medellín 1975. N. del E.

Usaremos de ahora en adelante la notación $N(f)$ ó $||f||$ según la conveniencia del problema.

Definición 1. N es una norma si N es una seminorma y además $N(f)=0 <=> f=0.$

Ejemplos de seminormas.

a) Sea $X = C[a,b]$ = conjunto de todas las funciones continuas en $[a,b]$; definamos $N(f) = ||f|| = |f(a)|$. Por definición vemos que :

i. $N: X \to \mathbb{R}$

ii. para $\gamma \in \mathbb{R}$

$$||\gamma f|| = |(\gamma f)(a)| = |\gamma f(a)| = |\gamma|\,|f(a)| = |\gamma|\;||f||$$

iii. $||f+g|| = |(f+g)| = |f(a)+g(a)| \leq |f(a)| + |g(a)| = ||f|| + ||g||$

luego N así definido es una seminorma ; podemos ver que N no es una norma ya que $||f|| = |f(a)| = 0$ no implica que $f(x) = 0 \;\forall\, x \in [a,b]$

b) Sea $X = C[a,b]$, $[a,b] = I$. Definimos $N(f) = \underset{x \in I}{máx}\,|f(x)|$. Por la definición de N vemos que la primera condición se cumple .

ii. Sea $\gamma \in \mathbb{R}$, entonces

$$N(\gamma f) = \underset{x\in I}{máx}\,|(\gamma f)(x)|\;\underset{x\in I}{máx}\,|\gamma f(x)| = |\gamma|\;\underset{x\in I}{máx}\,|f(x)| = |\gamma|\,N(f)$$

iii. $N(f+g) = \underset{x\in I}{máx}\,|f+g)(x)| = \underset{x\in I}{máx}\,|f(x)+g(x)| \leq \underset{x\in I}{máx}\,(|f(x)|+|g(x)|)$

$$\leq \underset{x\in I}{máx}\,|f(x)| + \underset{x\in I}{máx}\,|g(x)|$$

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g) .$$

Podemos ver que N así definida es una norma, pues :

$$f=0 <=> \underset{x\in I}{máx}\,|f(x)| = 0 = N(f)$$

Propiedades de toda seminorma.

a) $||f|| \geq 0$. Basta ver que

$$||0|| = ||0.f|| = |0| \times ||f|| = 0$$

ahora

$$||0|| = ||f+(-f)|| \leq ||f|| + ||-f|| = 2||f|| \Rightarrow 0 \leq ||f||$$

b) $|\,||f|| - ||g||\,| \leq ||f-g||$

Prueba : $||f|| = ||f+g-g|| \leq ||f-g|| + ||g|| \Rightarrow ||f|| - ||g|| \leq ||f-g||$ (i).

Por otro lado,

$$||g|| = ||f+g-f|| \leq ||f|| + ||g-f|| = ||f|| + ||f-g|| \Rightarrow ||g|| - ||f|| \leq ||f-g|| \Rightarrow$$

$$-(||f|| - ||g|| \leq ||f-g|| \Rightarrow -||f-g|| \leq ||f|| - ||g|| \quad \text{(ii)}$$

Por (i) y (ii) $-||f-g|| \leq ||f|| - ||g|| \leq ||f-g|| \Rightarrow |\,||f|| - ||g||\,| \leq ||f-g||$

1.3. Tomemos $\{X,N,S,f,P\}$. Definimos $d(f,S) = \inf_{P \in S} ||p-f||$.

Si existe $P^* \in S$ tal que $||P^*-f|| = d(f,S)$ entonces diremos que P^* es una aproximación óptima para f partiendo de S.

El conjunto de todas las aproximaciones óptimas para f partiendo de S será denotado por $J(f)$. Podemos ahora preguntarnos :

i) es $J(f) \neq \phi$?

ii) es $J(f)$ unitario

iii) como podemos reconocer y encontrar $P \in J(f)$

La contestación de estos interrogantes se encuentra en la teoría de la aproximación.

1.4. **Definición.** S es convexo si : para todo $f, g \in S \Rightarrow [\gamma f + (1-\gamma) g] \in S$, donde $\gamma \in (0,1)$

Definición. Sea $\phi : C^{convexo} \subset X \to R$. Definimos

$$\phi'(f,h) = \lim_{\substack{t \to o \\ t > o}} \frac{\phi(f+th) - \phi(f)}{t} \qquad f, h \in C$$

y la llamaremos la derivada direccional de ϕ en f con respecto a h.

Sea $\phi : C \to R$. Supongamos que existe $fo \in C$ tal que $\phi(fo)$ es mínimo, esto es :

$$\phi(f) \geq \phi(fo) \quad \text{para todo } f \text{ en } C$$

entonces para $t > 0$

$$\Rightarrow \frac{\phi(fo+th) - \phi(fo)}{t} \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{t \to o \\ t > o}} \frac{\phi(fo+th) - \phi(fo)}{t} \geq 0$$

$$\Rightarrow \phi'(fo,h) \geq 0 \quad \text{para todo } h \in C$$

Diremos que $\phi : C \subset X \to R$ es una función que satisface la condición de Lipschitz, si existe $M > 0$ tal que

$$|\phi(f) - \phi(g)| \leq M \, \| f-g \|$$

donde $\| f \| = N(f)$ es una *norma* definida en X. O mas sencillamente diremos que ϕ es M Lipschitz.

Definición. Sea $\phi: C^{convexo} \subset X \rightarrow R$.

ϕ es convexa si para todo $f,g \in C$, $\gamma \in (0,1) \Rightarrow \phi(\gamma f+(1-\gamma)g) \leq \gamma\phi(f) + (1-\gamma)\phi(g)$. Por ejemplo, sea :

$$\phi: S \subset X \rightarrow R$$

donde $\phi(P) = ||P-f||$, $P \in S$, $f \in X$ y $N(f) = ||f||$ es una norma defini - da en X. Podemos ver que ϕ así definida es convexa.

Sea $\gamma \in (0,1)$, $P_1 \in S$, $P_2 \in S$

$$\phi(\gamma P_1 + (1-\gamma)P_2) = ||\gamma P_1 + (1-\gamma)P_2 - f|| = ||\gamma P_1 + (1-\gamma)P_2 + \gamma f - \gamma f - f||$$

$$||\gamma(P_1 - f) + (1-\gamma)(P_2 - f)|| \leq \gamma||P_1 - f|| + (1-\gamma)||P_2 - f|| \Rightarrow \phi(\gamma P_1 + (1-\gamma)P_2) \leq \gamma\phi(P_1) + (1-\gamma)\phi(P_2).$$

1.5. **Teorema 1.** Sea $\phi: S \subset X \rightarrow R$. Asumimos:

(i) ϕ es convexa

(ii) ϕ es M Lipschitz

entonces $\exists\, \phi'(f,h)\ \forall f \in S$ y $\forall h$ tal que $(f+th) \in S$ para algún $t > 0$.

Prueba : Definamos $w(t) = \dfrac{\phi(f+th) - \phi(f)}{t}$ $t \in (0, t_o)$ entonces $|w(t)| = \dfrac{|\phi(f+th) - \phi(f)|}{t}$ y por la hipótesis ii vemos que $|w(t)| \leq \dfrac{M||th||}{t} = M||h||$ entonces $w(t)$ es una función acotada .

Ahora probaremos que $w(t)$ es una función creciente y como w es acotada entonces podemos concluir que $\lim\limits_{t\to o^+} w(t)$ existe; pero este límite es precisa - mente $\phi'(f,h)$. Entonces : sea $t, s \in (0,t_o)$ y $t < s$; probaremos que $w(t) \leq w(s)$.

Prueba : Podemos expresar a $f+th$ como una combinación lineal de $f+sh$

y de f; basta hacer :

$$f + th = \gamma\, f + (1 - \gamma)(f + sh)$$

resolviendo para γ encontramos, $\gamma = 1 - \frac{t}{s} \Rightarrow 0 < \gamma < 1 \Rightarrow \phi(f+th) = \phi(\gamma f + (1-\gamma)(f+sh)) \leq \gamma\,\phi(f) + (1-\gamma)\,\phi(f+sh)$ por la hip. (i)

$$\Rightarrow \frac{\phi(f+th) - \phi(f)}{t} \leq \frac{\gamma\,\phi(f) + (1-\gamma)\,\phi(f+sh) - \phi(f)}{t}$$

$$\leq \frac{(1-\gamma)\,\phi(f+sh) - (1-\gamma)\,\phi(f)}{t}$$

$$\leq \frac{(1-\gamma}{t}\,[\,\phi(f+sh) - \phi(f)\,]$$

pero

$$\gamma = 1 - \frac{t}{s} \Rightarrow \frac{1-\gamma}{t} = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\phi(f+th) - \phi(f)}{t} \leq \frac{\phi(f+sh) - \phi(f)}{s}$$

$\Rightarrow$ $w(t) \leq w(s)$ luego $w(t)$ es una función creciente y acotada, entonces $\lim\limits_{n \to o^+} w(t)$ existe y esto por definición es $\phi'(f,h)$.

1.6. Recordemos que

$$\phi(P) = \|P - f\| \quad p \in S, \quad f \in X$$

es una función convexa. Además para P_1, $P_2 \in S$

$$|\phi(P_1) - \phi(P_2)| = |\,\|P_1 - f\| - \|P_2 - f\|\,| \leq \|(P_1 - f) - (P_2 - f)\| = \|P_1 - P_2\|$$

luego $|\phi(P_1) - \phi(P_2)| \leq \|P_1 - P_2\|$ entonces ϕ es 1 Lipschitz.

En base a lo anterior podemos probar el siguiente teorema que será fundamental para la teoría posterior.

Teorema 2. Sea S un subespacio de X ; $N(f)$ una norma en X.

Sea $P \in S$ y $f \in X$, entonces $P \in J(f) <=> N'(P-f,h) \geq 0 \;\forall h \in S$.

Prueba : (i) Sea $P \in J(f)$; definamos $\phi(P) = N(P-f)$, luego si $P \in J(f) =>$ $\phi(P)$ es mínimo.

$$=> \phi'(P,h) \geq 0 => N'((P-f),h) \geq 0 \quad \forall h \in S$$

(ii) Asumamos $N'(P-f,h) \geq 0$ para todo $h \in S$. Sea $Q \in S$, entonces tendremos que probar que $N(Q-f) - N(P-f) \geq 0$.

Prueba : hagamos

$$\phi : S \subset X \to R \text{ donde } \phi(P) = N(P-f) = ||P-f||$$

entonces ϕ es convexa (como se probó anteriormente) y 1 Lipschitz.

Sea

$$w(t) = \frac{\phi(P+th) - \phi(P)}{t}$$

entonces por teorema 1 $w(t)$ es creciente.

Tomemos $h = Q-P, h \in S$ (S es un subespacio de X)

$$=> N(Q-f) - N(P-f) = \phi(Q - \phi(P) = \phi(P+h) - \phi(P) = w(1),$$

pero $w(1) \geq \lim_{t \to 0^+} w(t)$

$$=> w(1) \geq \phi'(P,h) = N'((P-f),h) \geq 0 \quad \text{(Por nuestra hipótesis)}$$

$$=> N(Q-f) - N(P-f) \geq 0 \quad \forall Q \in S$$

$$=> P \in J(f).$$

1.7. **Teorema 3.** Sean $f \neq 0$, $h \in C[a,b]$ con la norma definida :

$$N(f) \equiv \max_{x \in [a,b]} | f(x) |$$

Definimos $E[f] = \{ x \in [a,b] : |f(x)| = ||f|| \}$

Sea $L = \max_{x \in E[f]} [\, signo\ f(x) \,]\ h(x)$ entonces $N'(f,h) = L$

Prueba : tomemos $M = ||f|| > 0$, y $q(x,t) = \dfrac{|f(x) - th(x)| - M}{t}$;
podemos darnos cuenta que $N'(f,h) = \lim_{t \to 0^+} \max_{x \in [a,b]} q(x,t)$; tomamos t tal que $0 < t \leq t_0$ donde $t_0 ||h|| \leq \dfrac{M}{2}$ para este t si $|f(x)| \geq \dfrac{M}{2}$ vemos que:

$$| f(x) + t h(x) | = | f(x) | + t\ [\, signo\ f(x) \,]\ h(x)$$

$$\Rightarrow q(x,t) = [\, signo\ f(x) \,]\ h(x) + \frac{|f(x)| - M}{t}$$

entonces

$$\max_{x \in [a,b]} q(x,t) \geq \max_{x \in E[f]} q(x,t) = L$$

Por otro lado tomando $\epsilon > 0$ formemos

$$A = \{ x \in [a,b] : |f(x)| \geq \frac{M}{2} \text{ y } [\, signo\ f(x) \,]\ h(x) \geq L + \epsilon \}$$

este conjunto es disyunto de $E[f]$ puesto que

$$L = \max_{x \in E[f]} [\, signo\ f(x) \,]\ h(x)$$

tomemos $M' = \max_{x \in A} | f(x) | \Rightarrow M' < M$.

Si $A = \phi$ tomaremos $M' = 0$.

De ahora en adelante escogeremos t tal que $0 < t \leq \min\ (t_o, t_1)$ donde t_1 es lo suficientemente pequeño para que

$$\frac{(M' - M + t_1 \,||b||}{t_1} < L$$

para este t y $x \in A$ tenemos

$$q(x,t) = \frac{|f(x) + t\,b(x)| - M}{t} \leq \frac{|f(x)| + t\,|b(x)| - M}{t} \leq \frac{M' - M + t\,||b||}{t} < L$$

Sin embargo existe $x \in E(f)$ tal que $q(x,t) = L$.

Hagamos $A' \equiv [a,b] \setminus A$ o sea el complemento de A entonces usando (i) vemos que

$$L \leq \max_{x \in [a,b]} q(x,t) = \max_{x \in A'} q(x,t) \leq L + \epsilon$$

haciendo $t \to 0^+$ vemos que :

$$L \leq N'(f,b) \leq L + \epsilon$$

Si hacemos $\epsilon \to 0$ tendremos completa la prueba.

En base a los teoremas 2 y 3 podemos concluir lo siguiente : Dado $P \in S$, $f \in X$.

Sea $e(x) = P(x) - f(x)$ (función error) entonces $P \in J(f)$ si y sólo si $N'(e,b) \geq 0 \ \forall b \in S$, o expresado en otra forma,

$P \in J(f)$ si y sólo si $\max\limits_{x \in E(e)} [\text{signo } e(x)]\, b(x) \geq 0 \quad \forall b \in S$

Veamos cómo podemos aplicar esta teoría en el caso de que deseemos aproximar una función continua en un intervalo por medio de una función polinómica.

Sean : $X = C[a,b]$

$S =$ generado por $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$

Definimos sobre X la norma :

$$N(f) = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad , \; f \in X$$

Sea un elemento $P^* \in S$ diremos que P^* es una aproximación óptima para $f \in X$, o que $P^* \in J(f)$ si :

$$||P^* - f|| = \inf ||P - f|| = d(f, S) \quad (1)$$

tomemos $e(x) = P(x) - f(x)$ (función error)

$$E(e) = \{ x \in [a,b] \; ; \; |e(x)| = ||e|| \} .$$

A partir de este último conjunto formaremos uno nuevo que llamaremos $AE(e)$ el cual estará formado por elementos de $E(e)$ escogidos de la siguiente forma :

$$AE(e) = \{ y_i \} \quad \text{donde} \quad y_1 = \min E(e) = x_1$$

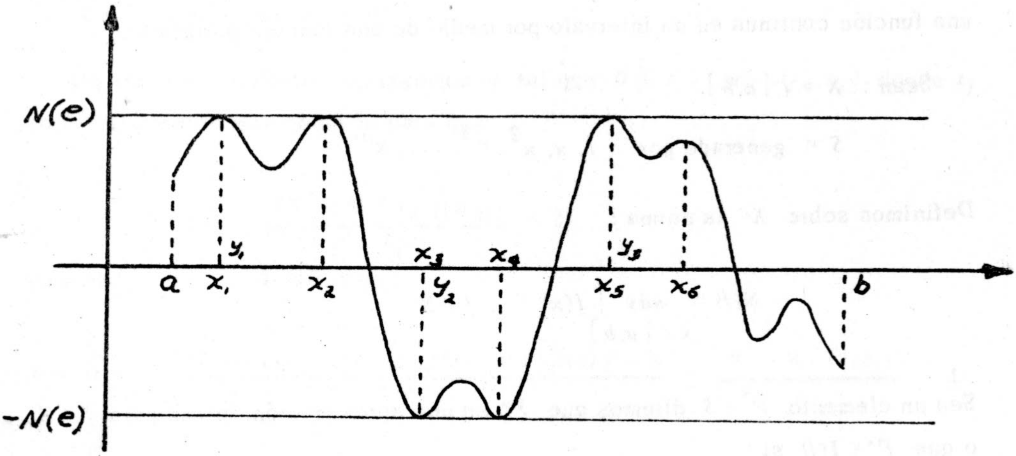
habiendo escogido y_J escogeremos y_{J+1} como el mínimo del conjunto :

$$B_J = \{ x \in E(e) \mid x > y_J, \; signo\,(e(x)) = -\,signo\,(e(y_J)) \}$$

Para aclarar esto dibujemos lo que podría ser una curva típica de la función error $= e(x)$.

---

(1) Encontrar este elemento es el objeto de la teoría de Tchebicheff para la aproximación de funciones.



o sea que $AE(e)$ es el conjunto de los puntos extremos alternos de la función $e(x)$.

Probaremos que :

$$P \in J(f) <=> card\,(AE(e)) \geq n+2 = dim\, S + 1$$

Prueba : (i) Sea $P \in J(f)$ y card $(AE(e)) = r < n+2$

tomemos $AE(e) = \{ y_i \}$, $i=1, \ldots, r$; escojamos $z_i \in (y_i, y_{i+1})$ tal que $| e(x) | < || e ||$; $x \in (z_i, y_{i+1})$ el último de estos puntos pertenecerá a (y_r, b)

Construyamos $h(x) = \pm \prod_{i=1}^{r-1} (x - z_i) => h(x) \in S$.

Escojamos el signo de $h(x)$ de tal manera que :

$$Signo\; h(x_1) = - signo\; e(x_1) = - signo\; e(y_1)$$

por la forma como escogimos los z_i

$$=> \quad signo\;\; h(x) = - signo\; e(x) \;\; \forall\; x \in E(e)$$

luego $\underset{E(e)}{máx} \; [signo\; e(x)] \;\; h(x) < 0$, entonces por lo que habíamos concluido de los teoremas 2 y 3

$\Rightarrow P \notin J(f)$ lo cual contradice la hipótesis . Entonces , si $P \in J(f) \Rightarrow card\,(AE(e)) \geq n+2$

(ii) Para completar la prueba sea $r = card\,(AE(e)) \geq n+2$ tenemos que probar que $P \in J(f)$, para esto basta probar que $\max_{E(e)} (signo\ e(x))\, h(x) \geq 0$ $\forall h \in S$.

Tomemos un $h \in S$ y supongamos lo contrario, es decir, que $\max_{x \in E(e)} [signo\ e(x)]\, h(x) < 0$ pero esto implica que $h(x)$ alterna de signo por lo menos $n+2$ veces ya que $card\,(AE(e)) \geq n+2 \Rightarrow h(x)$ tiene por lo menos $n+1$ raices pero como $h \in S = gen\ \{1, x, \ldots, x^n\} \Rightarrow h(x) \equiv 0$ lo cual es una contradicción.

Por último probaremos que $J(f)$ es unitario.

Sea $P_1, P_2 \in J(f) \Rightarrow ||P_1 - f|| = ||P_2 - f|| = ||e||$; tomemos

$$P_3 = \frac{P_1 + P_2}{2} \Rightarrow ||e|| \leq ||P_3 - f|| = \left|\left| \frac{P_1 + P_2}{2} - f \right|\right|$$

$$= \left|\left| \frac{1}{2}(P_1 - f) + \frac{1}{2}(P_2 - f) \right|\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}||P_1 - f|| + \frac{1}{2}||P_2 - f|| = ||e||$$

$$\Rightarrow P_3 \in J(f)$$

$\Rightarrow P_3 - f$ tiene por lo menos $n+2$ puntos extremos alternos. Sea $AE(P_3 - f) = \{y_i\}$ para uno de esos puntos

$$\Rightarrow ||P_3(y_i) - f(y_i)|| = ||e||$$

$$\Rightarrow \left|\left| \frac{P_1(y_i) + P_2(y_i)}{2} - f(y_i) \right|\right| = ||e||$$

$$\Rightarrow \ || P_1(y_i) - f(y_i) + P_2(y_i) - f(y_i) || = 2 \ || e || .$$

Por otro lado

$$|| P_1(y_i) - f(y_i) + P_2(y_i) - f(y_i) || \leq || P_1(y_i) - f(y_i) || + || P_2(y_i) - f(y_i) ||$$

$$\leq || e || + || e || = 2 \ || e ||$$

$$\Rightarrow \ P_1(y_i) = P_2(y_i) .$$

Ahora si tomamos $D(x) = P_1(x) - P_2(x) \Rightarrow D(x)$ tiene por lo menos $n+2$ raices, pero como $P_1, P_2 \in S \Rightarrow D \in S \Rightarrow D(x) \equiv 0 \Rightarrow P_1(x) = P_2(x)$.

Uno de los algoritmos conocidos para encontrar este elemento de $J(f)$ es el debido a Remes el cual está explicado en [1] .

Bibliografía

[1] Rice John R., 1964, The approximation of functions, Addison Wesley.

1959. On the convergence of an algorithm for best. Tchebycheff aproximation, J. Soc. Indust. Appl. Math. 7, pp.133-142.

1960, The characterization of best nonlinear Tchebycheff approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 79, pp.298-302.

1961 a. Best approximations and interpolating functions . Trans. Amer. Math. Soc. 101, 477-498.

1961 b. Algorithms for Chebychev approximation, J. Soc. Indust. Appl. Math. 9, 571-583.

[2] Cheney, E. W., 1966, Introduction to approximation theory, Mc Graw-Hill ,

[3] Cheney, E. W. and Loeb H. L., On rational Chebyshev approximations, Numer - Math., 4, pp. 124-127.