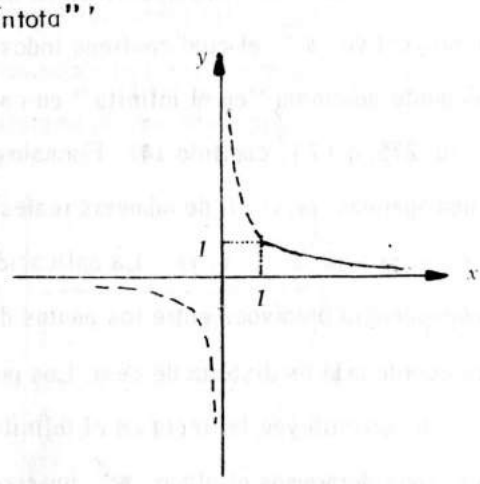
Boletín de Matemáticas

Volumen IX, N° 3, pp. 171-186

¿QUE ES UNA ASINTOTA?(*)

P. J. GIBLIN

1. Consideremos la hipérbola $y = 1/x$. (Es conveniente restringirnos a la parte correspondiente a $x > 1$). Todos estaremos de acuerdo en afirmar que el eje x es una "asíntota"



de esta curva ; sin embargo, personas distintas probablemente darán explicaciones distintas de este hecho. He aquí tres que me parecen buenas :

(*) Versión española de V. S. Albis G., autorizada por los editores del "Mathematical Gazette" ; 56 (1972), 274 - 284 . N. del E.

(1.1) *La curva se acerca al eje x cuando se "aleja hacia el infinito"*

Demostración. La distancia de $1/x$ al eje x tiende a cero cuando $x \to \infty$.

(1.2) La ecuación de la tangente de la curva en el punto (x_1, y_1) está dada por

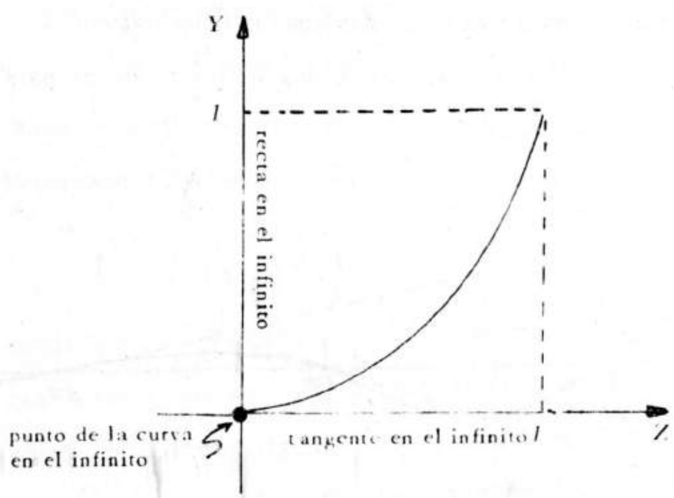
$$y = -x/x_1^2 + 2/x_1$$

Cuando $x_1 \to \infty$, *la posición límite de esta recta tangente es el eje x*

Demostración. Su pendiente tiende a cero y su intersección con el eje y tiende a cero.

(1.3) La tercera razón es más sutil, y trae consigo el comportamiento real en "el infinito". Para investigar este comportamiento es adecuado extender el plano $\mathbb{R}^2$ al plano proyectivo $\mathbb{P}^2$, el cual contiene todos los puntos de $\mathbb{R}^2$, así como también un punto adicional "en el infinito" en cada dirección. (Véase, por ejemplo, [1], pág. 275, ó [2], capítulo 14). Formalmente, los puntos de $\mathbb{P}^2$ son las ternas homogéneas (x, y, z) de números reales, no todos iguales a cero. Si $z \neq 0$, $(x, y, z) = (x/z, y/z, 1)$. La aplicación $(x, y) \to (x, y, 1)$ establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\mathbb{R}^2$ y aquellos de $\mathbb{P}^2$ cuya tercera coordenada es distinta de cero. Los puntos restantes de $\mathbb{P}^2$ (aquellos con $z = 0$) constituyen la *recta en el infinito*. Usando la anterior correspondencia, consideraremos el plano $\mathbb{R}^2$ *inmerso* en $\mathbb{P}^2$, de modo que la curva $y = 1/x$, $x > 1$, será el conjunto de los puntos de la forma $(t, 1/t, 1) = (1, 1/t^2, 1/t)$ cuando $t > 1$. Ahora bien, cuando $t \to \infty$ este punto de $\mathbb{P}^2$ se acerca a la posición límite $(1, 0, 0)$, sobre la recta del infinito, y le llamaremos *el punto de la curva en el infinito*.

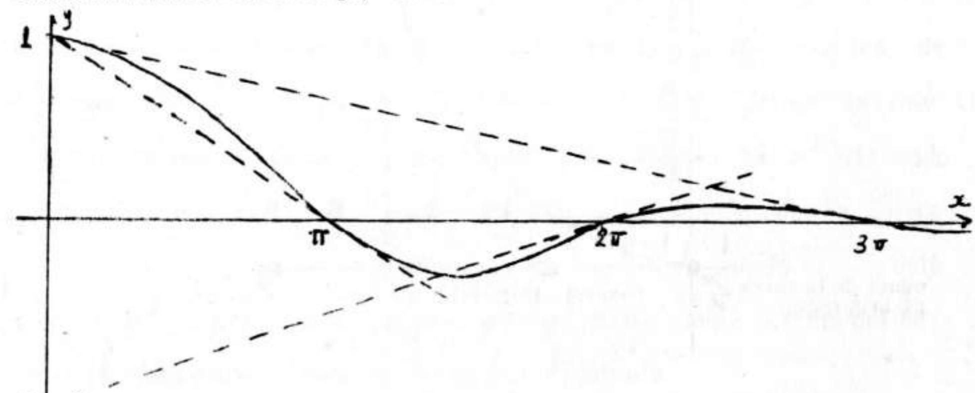
Para estudiar el comportamiento de la curva al acercarse a su punto en el infinito, usaremos otra inmersión de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{P}^2$, bajo la cual el origen de $\mathbb{R}^2$ corresponde al punto $(1, 0, 0)$ de $\mathbb{P}^2$, y la inmersión cobija todos los puntos de $\mathbb{P}^2$ cuyas primeras coordenadas son distintas de cero. De manera que $(x, y, z) = (1, y/z, z/x)$, si $x \neq 0$, y podemos sumergir $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{P}^2$ mediante $(Y, Z) \mapsto (1, Y, Z)$. Estos dos "sistemas coordenados" en $\mathbb{P}^2$, entre ambos, cobijan todos los puntos de $\mathbb{P}^2$ menos el $(0, 1, 0)$, y se superponen en aquellos puntos cuyas segundas y terceras coordenadas son ambas distintas de cero. Obsérvese que la recta ordinaria $Z = 0$ en $\mathbb{R}^2$ se envía por la última inmersión en la recta en el infinito, excepción hecha del punto $(0, 1, 0)$. En este último sistema de coordenadas la curva consiste de todos los puntos $(Y, Z) = (1/t^2, 1/t)$, $t > 1$, es decir, todos los puntos (u^2, u) si $1/t = u$, $0 < u < 1$. El punto en el infinito sobre la curva corresponde al caso límite $u = 0$ y es el origen en el nuevo sistema de coordenadas.



La curva original y su punto en el infinito devienen así la porción de la parábola $Y = Z^2$, $0 \leq Z < 1$. Ahora bien, esta curva posee una tangente lateral (derecha) en el punto $(0,0)$, en el sentido usual de que las cuerdas que unen $(0,0)$ y un punto P de la curva se acercan a una posición límite cuando $P \to (0,0)$ a lo largo de la curva, y esta tangente es el eje $Z = 0$. Podemos, pues, con justicia, llamar la correspondiente recta en el plano (x, y), a saber el eje x, la *tangente de la curva en el infinito*.

La siguiente pregunta es ahora natural : ¿son las tres anteriores razones en verdad la misma ? ¿ o podemos hallar curvas que, digamos, se acercan a una recta pero cuyas tangentes no se acercan a ninguna posición límite ?

Consideremos la curva $y = x^{-1}\, sen\, x\, (x > 0)$. Ciertamente ella se acerca al eje x, puesto que $x^{-1} senx \to 0$ cuando $x \to \infty$. No obstante la tangente en (x_1, y_1) intersecta al eje y en el punto $(0, 2x_1^{-1}\, sen\, x_1 - cos\, x_1)$, y este punto no se acerca a nada cuando $x_1 \to \infty$: más o menos él oscila entre $(0, 1)$ y $(0, -1)$. (En el diagrama las líneas punteadas son las tangentes en $x = \pi$, 2π, 3π : la tangente en $n\pi$ pasa por uno de los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$ para n entero arbitrario. Sin embargo, como



puede comprobarlo el lector, el dominio de la oscilación es un poco más amplio que esto). Deducimos que la tangente no tiene posición límite. Por otra parte, no es difícil mostrar que la curva tiene una tangente en el infinito, a saber el eje x.

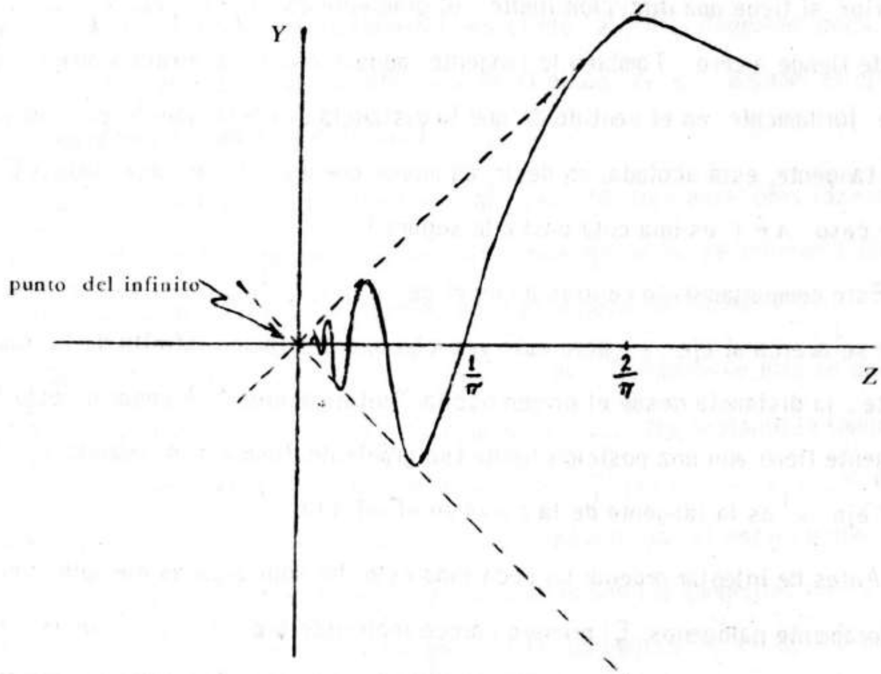
Aunque la tangente en (x_1, y_1) no tiene una posición límite en el ejemplo anterior, sí tiene una *dirección límite* : el gradiente es $x_1^{-2}(x_1 \cos x_1 - \operatorname{sen} x_1)$, y éste tiende a cero. También la tangente, aunque oscila de arriba a abajo, lo hace *finitamente* en el sentido de que la distancia desde, digamos, el origen a la tangente, está acotada, es decir, es menor que un $A > 0$ adecuado. (En este caso $A = 3$ es una cota bastante segura).

Este comportamiento contrasta con el de $y = x^{-1/2} \operatorname{sen} x \ (x > 1)$ que también se acerca al eje x, pero esta vez con una oscilación infinita de la tangente : la distancia desde el origen oscila "infinitamente". A pesar de esto, la tangente tiene aún una posición límite (su gradiente tiende a 0 cuando $x_1 \to \infty$) y el eje x es la tangente de la curva en el infinito.

Antes de intentar ordenar un poco todo esto, he aquí algunos ejemplos verdaderamente patógenos. El primero parece realmente inocuo : $y = \operatorname{sen} x \ (x > 0)$, la cual no posee una asítota en ningún sentido razonable. Sin embargo, en $\mathbb{P}^2$ la curva es el conjunto de puntos

$$(t,\ \operatorname{sen} t,\ 1) = (1,\ \frac{\operatorname{sen} t}{t},\ \frac{1}{t}) = (1,\ u \operatorname{sen}(1/u),\ u)$$

donde $u = 1/t$. Cuando $u \to 0$, el punto se acerca a $(1, 0, 0)$, de modo que la curva tiene de hecho un punto en el infinito. Pasando a otro sistema de coordenadas como en (1.3), la curva tiene como ecuación $Y = Z \operatorname{sen}(1/Z)$ $Z > 0$, completada añadiéndole el punto en el infinito $(0, 0)$. Esta curva no posee una tangente en $(0,0)$. Luego la curva $y = sen\,x$ no la tiene en el infinito. Observemos que cuando $Z \to \infty$, $Z\,sen(1/Z) \to 1$, de manera que la curva en el plano (Y, Z) se acerca a la recta $Y = 1$ para valores grandes de Z. Como la recta $Y = 1$ es, en el otro sistema de coordenadas, la recta $y = x$. esto



corresponde al hecho de que nuestra curva original $y = sen x$ se acerca a la recta $y = x$ cuando $x \to 0$ por la derecha: $y = x$ es la tangente de la curva en el origen.

La curva $y = x^{-1}\,sen(x^2)\ (x > 0)$ se acerca al eje x pero la tangente no tiene una dirección límite pues el gradiente de la tangente en (x_1, y_1) es $2\cos(x_1^2) - x_1^{-2}\,sen(x_1^2)$, el cual oscila más o menos entre 2 y -2.

Finalmente, la curva $y = sen\,log\,x\ (x > 0)$ (una sinusoide bastante estirada) no se acerca a ninguna recta cuando $x \to \infty$, pero su tangente sí tiene entonces una posición límite, paralela al eje x. No tiene tangente en el infinito.

2. Es conveniente en lo que sigue adoptar una noción bastante general de "curva". Sea $\gamma : D \to I\!R^2$ una aplicación cuyo dominio consiste de todos los números reales mayores digamos que d. Escribamos $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ y supongamos que u y v tienen derivadas primeras u' y v' continuas para todo $t > d$, y que u' y v' no se anulan simultáneamente. Así la imagen de γ tiene rectas tangentes, bien definidas en cada punto, y que se mueven de manera continua sobre aquella; la ecuación de la tangente en $\gamma(t)$ es

$$y\,u'(t) - x\,v'(t) = u'(t)\,v(t) - u(t)\,v'(t)\,.$$

Diremos que γ, o su imagen, es una *curva*. Suponemos además que $(u(t))^2 + (v(t))^2 \to \infty$ cuando $t \to \infty$, es decir, que la curva "va al infinito".

En los ejemplos del § 1, $u(t) = t$ y $d = 0$ ó 1: la única razón para tomar $d = 1$ en algunos casos es que en ellos existe la posibilidad de alguna clase de comportamiento asintótico cuando $x \to 0$ así como también cuando $x \to \infty$ y parece conveniente concentrar nuestra atención en una asíntota cada vez. Para investigar, digamos, la curva $y = \frac{1}{x}$ cuando x tiende a cero por la derecha, la parametrizamos mediante $\gamma(t) = (1/t\,,\ t)$ y dejamos que $t \to \infty$. Cuando x tiende a cero por la izquierda, hacemos $\gamma(t) = (-1/t,\ -t)$ y de nuevo dejamos que $t \to \infty$.

Como en (1.3), supondremos a veces que $I\!R^2$ está inmerso en $I\!P^2$ mediante $(x,y) \to (x, y, 1)$. La recta tangente a la curva (i.e. a la imagen de γ), en el punto $\gamma(t)$, se denotará por γ_t. Damos las siguientes definiciones:

(2.1) γ se dice continua *en el infinito* si $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma(t)$ existe como punto

$\mathbb{P}^2$. (En coordenadas polares (r,θ) en $\mathbb{R}^2$ esto equivale a requerir que θ tiende a un límite cuando $t \to \infty$). A este punto límite, cuando existe, le llamamos el *punto en el infinito de la curva*, y lo denotamos por $\gamma(\infty)$.

(2.2) Supongamos que la recta tangente γ_t tiene una dirección límite cuando $t \to \infty$. Entonces decimos que γ tiene una *dirección tangencial límite*. Esto equivale a requerir que u'/v' ó v'/u' tiendan a un límite cuando $t \to \infty$.

(2.3) Supongamos que la distancia perpendicular desde un punto fijo, digamos $(0,0)$ de $\mathbb{R}^2$ a la tangente γ_t se mantenga acotada cuando $t \to \infty$. Decimos entonces que γ satisface una *condición de distancia acotada*.

(2.4) Supongamos que la distancia perpendicular del punto $\gamma(t)$ a una recta fija l en $\mathbb{R}^2$ tiende a cero cuando $t \to \infty$. *Decimos entonces que γ se acerca a la línea l*. (Compárese con (1.1)).

(2.5) Supongamos que γ es continua en el infinito (2.1) y que la recta en $\mathbb{P}^2$ que une $\gamma(\infty)$ con $\gamma(t)$ se acerca a una posición límite l cuando $t \to \infty$. Entonces llamamos a l la *tangente a γ en el infinito*. Es posible que l sea realmente la recta en el infinito (esto sucede con la parábola $\gamma(t) = (t, t^2)$); si por otra parte, l es una recta de $\mathbb{R}^2$, decimos que γ *tiene una recta tangente finita en el infinito*. (Compárese con (1.3)).

(2.6) Supongamos que la recta tangente γ_t se acerca a posición límite finita l cuando $t \to \infty$. Entonces decimos que γ tiene una tangente límite, a saber, l. (Compárese con (1.2)).

La siguiente tabla muestra cómo los ejemplos en el § 1 corresponden con estas definiciones. También muestra que no son muchos los casos en que una curva que satisface una definición tenga que satisfacer automáticamente otra. En todos los ejemplos de la tabla, $\nu(t) = t$ y podemos tomar $d=0$.

$\nu(t)$	Continua en el ∞	Dirección tangencial límite	Condición de distancia acotada	se acerca a una recta	tangente finita en el ∞	tangente finita en el ∞
$sen\, t$	√	X	X	X	X	X
t^2	√	√	X	X	X	X
$sen \log t$	√	√	√	X	X	X
$t^{-1}\, sen(t^2)$	√	X	X	√	√	X
$t^{-\frac{1}{2}}\, sen\, t$	√	√	X	√	√	X
$t^{-1}\, sen\, t$	√	√	√	√	√	X
t^{-1}	√	√	√	√	√	√

Invitamos al lector a encontrar un ejemplo de una aplicación γ que no es ni siquiera continua en el infinito, y (un ejercicio más difícil) una que satisfaga sólo las condiciones de ser continua en el ∞ y de tener una dirección tangencial límite pero que no tenga una tangente en el ∞ (ni siquiera la recta en el infinito como en el caso $\gamma(t) = (t, t^2)$).

3. El siguiente es un diagrama completo de las implicaciones entre las definiciones del § 2.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{tangente límite } l \ (2.6) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{condición de existencia acotada } (2.3) \arrow[d, Leftrightarrow] & & \text{tangente finita en el } \infty \ (2.5) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\text{dirección tangencial límite } (2.2) \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{se acerca a } l \ (2.4) \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{continua en el } \infty \ (2.1) &
\end{tikzcd}$$

Luego, en todo caso, los dos criterios (2.5) y (2.4) son equivalentes ; un criterio más restrictivo es requerir que γ tenga una tangente límite.

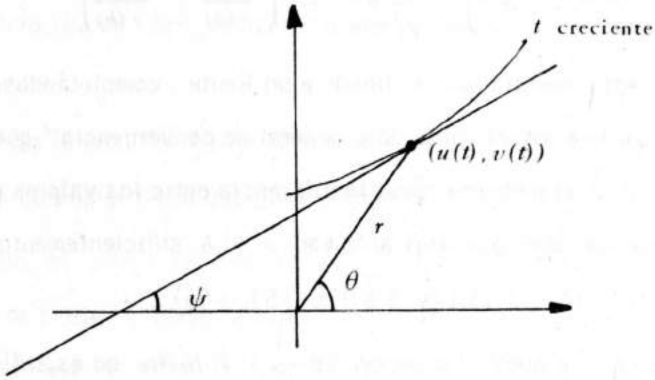
Yo prefiero la definición de tangente límite, en parte porque creo que las asíntotas tienen algo que ver con las tangentes, y en parte porque es más fácil de usar que sus definiciones rivales. La manera más fácil de hallar las tangentes límites, dada γ, es mirar, en primer lugar, al gradiente v'/u' de la curva. Si tiende a un límite, o a $\pm\infty$, entonces al mirar la intersección de la tangente con uno de los ejes podremos determinar si existe la tangente límite y en caso afirmativo decir qué es.

4. La mayoría de las demostraciones de las implicaciones en el § 3 son bastante directas : por ejemplo, el hecho de que una dirección tangencial límite implique continuidad en el infinito, es una aplicación de la regla de L'Hopital (véanse, por ejemplo, [3], pág. 82, [4], págs. 258-61 ó [5], § 154). Una de las menos fáciles es la de que la condición de distancia acotada implica la existencia de una dirección tangencial límite, de modo que haré aquí una demostración completa

(4.1) La condición de distancia acotada implica la existencia de una dirección tangencial límite

La tangente dirigida en el punto $\gamma(t)$ forma un ángulo $\psi(t)$ con el eje x, donde $\cos\psi = u'/s'$, $\operatorname{sen}\psi = v'/s'$ y $s' = \sqrt{u'^2 + v'^2} = \sqrt{r'^2 + (r\theta')^2}$ $(r, \theta$ son las coordenadas polares del punto $\gamma(t)$ y s y ψ son "coordenadas intrínsicas" de la curva - véase por ejemplo [2], capítulo 17) Síguese que $\operatorname{sen}(\theta-\psi) = -r\theta'/s'$ y $\cos(\theta-\psi) = r'/s'$. Supongamos ahora que γ satisface la condición de distancia acotada, donde la distancia de $(0,0)$ a la tangente γ_t es menor que A para todo $t > t_1$, digamos. Esta distancia perpendicular es $r\,|\operatorname{sen}(\theta-\psi)| = |r^2\theta'|/s'$.

calculada en t. Síguese que $|r^2\theta'| < As'$ para todo $t > t_1$, hecho que usaremos abajo, y también que $sen(\theta - \psi) \to 0$ cuando $t \to \infty$.



Escojamos t_2 de modo que $r(t) > A$ para todo $t > t_2$ (recordemos que $r \to \infty$); entonces $r'(t)$ nunca es nulo para $t > t_2$, pues en un punto de la curva en donde $r'(t) = 0$ la distancia del origen a la tangente γ_t sería igual a $r(t)$. Como $r \to \infty$ y r' es continua, dedúcese que $r'(t) > 0$ para $t > t_2$ y, por lo tanto, que $cos(\theta - \psi) > 0$ para un tal t.

Luego $(\theta - \psi) \to 0$ y para demostrar que γ tiene una dirección tangencial límite (i.e., que ψ tiende a un límite) basta probar que γ es continua en el infinito (i.e., que θ tiende a un límite). Ahora bien, $r(t)$ es ciertamente estrictamente positiva si $t > t_2$, de modo que, según un resultado anterior, $|\theta'| < As'/r^2$ si $t > máx(t_1, t_2)$. Integrando esta desigualdad encontramos que, para $b > a > máx(t_1, t_2)$

$$|\theta(b) - \theta(a)| < A \int_a^b \frac{s'}{r^2}\, dt .$$

Sin embargo, $r'/s' \to 1$, de modo que $r'/s' > \frac{1}{2}$ si $t > t_3$, digamos. Luego, para $b > a > máx\,(t_1, t_2, t_3)$,

$$|\theta(b) - \theta(a)| < 2A\int_a^b \frac{r'}{r^2}\,dt = 2A\left(\frac{1}{r(a)} - \frac{1}{r(b)}\right)$$

Como $r \to \infty$, esto muestra que θ tiende a un límite, completándose así la demostración. (Aquí usamos el "principio general de convergencia" que afirma que θ tiende a un límite si podemos hacer la diferencia entre los valores de θ en a y en b tan pequeña como queramos al tomar a y b suficientemente grandes. Véase, por ejemplo, [4], 3.15.1 y 5.6.9 ó [5], § 96).

Vale la pena anotar que la condición $(\theta - \psi) \to límite$ no es suficiente por sí sola (i.e., en la ausencia de la condición de distancia acotada) para concluir que θ, y, por lo tanto, ψ, tienda a un límite. Pues considerando la muy lenta espiral, dada en coordenadas polares, $r(t) = t$, $\theta(t) = \log\log t$, vemos que $(\theta - \psi) \to 0$, pero obviamente θ no tiende a ningún límite. La condición de distancia acotada nos dice algo más que $(\theta - \psi) \to 0$; nos dice que $r\,sen(\theta - \psi)$ está acotado.

5. Vale la pena mirar más de cerca la definición de una tangente límite. Por definición, γ tiene una tangente límite l sí, y sólo si, la tangente γ_t tiende hacia una posición límite l cuando $t \to \infty$, l una recta en $\mathbb{R}^2$. Esto necesita de dos cosas: primero, que γ_t tenga una dirección límite, a saber, la de l, es decir, que γ tenga una dirección tangencial límite, y, en segundo lugar, que el punto de intersección de γ_t con alguna l recta fija en $\mathbb{R}^2$ tienda a una posición límite (finita) P. Empero la anterior "condición de intersección" implica evidentemente que γ satisface la condición de distancia acotada, pues la distancia de P a γ_t tenderá a cero, y, por lo tanto, estará acotada cuando $t \to \infty$.

Como la condición de distancia acotada implica la existencia de una dirección tangencial límite, tenemos el siguiente resultado :

(5.1) γ tiene una tangente límite sí, y sólo si, el punto de intersección de γ_t con alguna recta fija de $\mathbb{R}^2$ se acerca a una posición límite (finita) P cuando $t \to \infty$.

Por supuesto la posición límite P en (5.1) no determina a la tangente límite, que puede ser cualquier recta que pase por P.

Por ejemplo, si $\gamma(t) = (t, 1/t)\ (t > 1)$, podemos escoger cualquier recta que no sea paralela al eje x como la línea fija. P es entonces la intersección de esa recta con el eje x.

6. Las dos definiciones rivales de asíntota (tangente límite y acercarse a una recta, la última equivalente a la existencia de una tangente finita en el infinito), son, en general, distintas. Sin embargo, hay muchos tipos de funciones para los cuales son equivalentes. Concluiré este trabajo enunciando algunos de estos casos, con algunas indicaciones para probarlos.

(6.1) Supóngase que $u = U^{\alpha}$, $v = V^{\beta}$, donde U y V son funciones racionales de t (i.e., cocientes de polinomios) y α, β son números reales distintos de cero, los cuales podemos suponer positivos. Entonces la curva γ tiene tangente límite l cuando $t \to \infty$, sí, y sólo si, se acerca a l. (Nótese que en este caso d puede tomarse como el mayor número real que aparece entre las raíces de los denominadores de U y V).

Indicaciones para la demostración. Supongamos que γ se acerca a l. Rotemos, en primer lugar, los ejes de modo que l sea el eje x, observando que esto no afecta las hipótesis hechas sobre u y v. Queremos que el intercepto de

γ_t en el eje y tienda a cero ; este intercepto está dado por $v - uv'/u'$. calculado en t , de modo que queremos que $uv'/v' \to 0$. Escribamos enseguida $U = p/q$, $V = r/s$, donde p, q, r, s son polinomios y grado de $p >$ grado de q , grado de $r <$ grado de s (¿ por qué ?) .

(6.2) Supóngase que $u(t) = t$, *de modo que la imagen de* γ *sea el gráfico de la función* $y = v(x)$. *Supóngase que* v y v' *sean ambas monótonas con límite cero (de modo que estamos suponiendo que* γ *se acerca al eje* x *). Entonces el eje* x *es la tangente límite de* γ .

Indicaciones para la demostración. Esto en verdad tiene mucho de truco, y depende de la observación de que el intercepto $v(t) - tv'(t)$ de la tangente γ_t en el eje y tiende a 0 cuando $t \to \infty$, un resultado bastante delicado obtenible usando juiciosamente el teorema del valor medio (véase, por ejemplo , [3], pág. 80,[4], pág. 245 ó [5] , § 126). Cuán delicado es el resultado puede juzgarse del hecho de que si omitimos la hipótesis sobre la monotonía de v' . la conclusión es falsa. Dado ya que el intercepto tiende a cero, y que la curva se acerca al eje x , es claro que el eje x es una tangente límite.

(6.3) Supóngase de nuevo que $u(t) = t$ y *que* $v''(t)$ *exista y sea distinta de cero para todos los* t *suficientemente grandes. Entonces* γ *se acerca al eje* x *si, y sólo si, el eje* x *es la tangente límite de* γ .

Indicaciones para la demostración. Esto resulta fácilmente de (6.2). La hipótesis $v''(t) \neq 0$ para todos los t suficientemente grandes implica que v'' tiene signo constante para tales t ; éste es la "propiedad del valor intermedio de las derivadas" : si v'' fuere algunas veces positiva y otras negativa, algunas veces debiera anularse. (Véase [3] , § 5.12 ; [4] , pág. 247 , Ex. 4 ; [5], § 129).

Si el signo constante de v'' es positivo entonces v' es monótona creciente ; si negativo, entonces v' es monótona decreciente (Otra argumentación posible es la siguiente. Si v' no fuese monótona entonces, siendo continua, debiera tomar el mismo valor dos veces, y por el teorema de Rolle, v'' sería cero en alguna parte). Si suponemos que y se acerca al eje x, entonces $v \to 0$ cuando $t \to \infty$, y no es difícil deducir que $v' \to 0$ y que v es monótona.

De hecho es posible usar (6.3) para dar otra demostración de (6.1) y de otros resultados más generales Por ejemplo, si $y(t) = (u(t), v(t))$ donde u y v son funciones "algebraicas", entonces la curva se acerca a una recta l si, y sólo si, l es la tangente límite. Una función algebraica es una que se obtiene mediante una sucesión finita de operaciones en que intervienen la adición, la multiplicación, la sustracción, la división y la extracción de raíces. Así una función racional es algebraica pero la función seno no lo es. Las propiedades de las funciones algebraicas que se necesitan aquí son las que (exceptuando la función idénticamente nula) poseen sólo un número finito de ceros y que la derivada de una función algebraica es algebraica. El lector puede interesarse en investigar las relaciones entre las definiciones (2.1), (2.6) cuando u y v son algebraicas – o, más fácil, cuando son funciones racionales de t. Por ejemplo, ¿es siempre una tal y continua en el infinito ?

Referencias

1. G. Birkhoff and S. MacLane, *A survey of Modern Algebra*. MacMillan (3rd edition, 1965).
2. H. S. M. Coxeter, *An introduction to Geometry*, Wiley (2nd edition, 1969).
3. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill (1953).
4. D.B. Scott and S. R. Tims, *Mathematical Analysis*, Cambridge (1966).

5. G. H. Hardy, *A course of Pure Mathematics*, Cambridge (10 th edition, 1952)

Department of Pure Mathematics
Liverpool University, Inglaterra