Boletín de Matemáticas
Vol. IX, Nº 3 (1975), págs. 129 - 170

EL DOMINIO DE CONVERGENCIA DE LA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{|x - x_n|}$$

YU TAKEUCHI

§ 1. Introducción.

Sea D un conjunto contable y denso en $[0,1]$, y $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números positivos que tiende a cero. Sea

$$D = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \} \tag{1}$$

un ordenamiento de los puntos del conjunto D, en el presente trabajo se van a estudiar los dos conjuntos (ver Apéndice).

$$A_1 = \lim_{j \to \infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} N(x_n, \frac{\alpha_n}{j}) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{n=1}^{\infty} N(x_n, \frac{\alpha_n}{j}) \} . \tag{2}$$

$$A_2 = \lim_{n \to \infty} N(x_n, \alpha_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_n, \alpha_k) \} , \tag{3}$$

donde $N(x_k, \alpha_k) = (x_k - \alpha_k, x_k + \alpha_k)$ es la vecindad del punto x_k con radio α_k. Nótese que los dos conjuntos A_1 y A_2 dependen del ordenamiento de los puntos del conjunto D.

Las siguientes propiedades de A_1 y de A_2 son bien conocidas.

(i) A_1 y A_2 son densos en $[0,1]$. ([2])

(ii) A_1 y A_2 son conjuntos no-contables. ([6].[3])

(iii) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces :

$$m(A_1) = 0 \quad , \quad m(A_2) = 0 \ . \qquad ([2])$$

(iv) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, la medida de A_2 depende del ordenamiento de D. Existe un ordenamiento especial de D para el cual $m(A_2) = 1$. ([2]).

En el parágrafo 3, generalizando la propiedad (iv) se demuestra que dado un número $c \ (0 \leq c \leq 1)$ existe un ordenamiento del conjunto D que satisface :

1) $\qquad m(A_1) = c \qquad$ (ó $m(A_2) = c$)

2) El complemento de A_1 (ó de A_2) es denso en $[0, 1]$.

En el parágrafo 2 estudiaremos algunas propiedades preliminares para facilitar el desarrollo del parágrafo 3. En el parágrafo 4 se observa que el dominio de divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} \qquad \text{con} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty \ . \tag{4}$$

o sea, el conjunto :

$$\left\{ x \ \middle| \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} = +\infty \right\} \tag{5}$$

está estrechamente relacionado con conjuntos del tipo A_1 ó del tipo A_2 e investigamos bajo qué condiciones la serie (4) converge para casi todo x. En el último parágrafo veremos algunas aplicaciones del parágrafo 4.

§ 2. *Algunas relaciones preliminares.*

Lema 1. *Sean* $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ *sucesiones decrecientes de conjuntos :*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \qquad ; \qquad B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \tag{1}$$

entonces :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] = [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] \cup [\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n] . \tag{2}$$

Demostración. Se tiene evidentemente que :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] \supset [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] \cup [\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n] \tag{3}$$

puesto que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] \quad , \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] .$$

Vamos a demostrar la inclusión en el sentido contrario. Sea

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n]$$

entonces $x \in A_n \cup B_n$ para todo n. Evidentemente uno de los siguientes dos conjuntos es infinito :

$$\{ n \mid x \in A_n \} \qquad , \qquad \{ n \mid x \in B_n \} \qquad ; \tag{4}$$

supongamos que el primero es infinito. Sea

$$\{ n \mid x \in A_n \} = \{ s(k) \mid k \in \mathbb{N} \} \quad , \quad s(1) < s(2) < s(3) < \dots .$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $s(k)$ tal que $s(k) > n$, luego :

$$x \in A_{s(k)} \subset A_n .$$

esto es :

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

De la misma forma, si el segundo conjunto en (4) es infinito se tiene que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n .$$

Por lo tanto, en cualquier caso obtenemos que

$$x \in [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] \cup [\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n] ,$$

y así

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] \subset [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] \cup [\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n] . \qquad (5)$$

De (3) y (5) se tiene la igualdad (2) ∎

Nota : Las condiciones en (1) son indispensables para obtener la igualdad (2) . Por ejemplo, si

$$A_n = (0 , \frac{1}{n}) , \qquad B_n = [\frac{1}{n} , 1]$$

entonces :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [A_n \cup B_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0 , 1] = (0, 1] ,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi , \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{1\} , [\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] \cup [\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n] = \{1\} . \quad ∎$$

Lema 2. *Sea* B *un conjunto denso en* $[a,b]$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *una serie divergente de términos positivos; entonces existen*

$$y_1, y_2, \ldots, y_M \in B$$

tales que

$$\bigcup_{k=1}^{M} N(y_k, \alpha_k) \supset [a,b] .$$

Demostración. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ existe M tal que

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k \geq b-a .$$

Consideremos los siguientes puntos (ver Fig. 1) :

$$x_o = a \quad , \quad x_M = b \quad ,$$

$$x_k = a + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, M-1) .$$

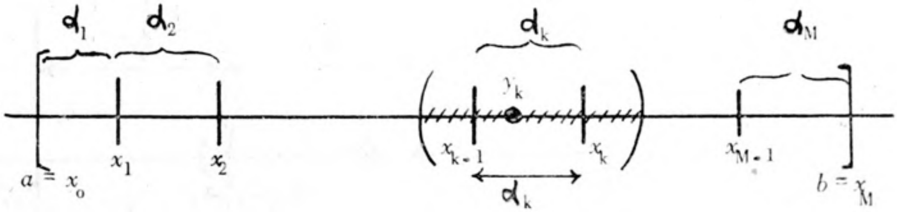

Fig. 1

El intervalo (x_{k-1}, x_k) contiene por lo menos un punto de B, digamos $y_k \in B$. Entonces

$$N(y_k, \alpha_k) \supset [x_{k-1}, x_k] .$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^{M} N(y_k, \alpha_k) \supset \bigcup_{k=1}^{M} [x_{k-1}, x_k] = [a, b] \quad . \qquad \blacksquare$$

Lema 3. *Sean $\{y_n\}$ una sucesión convergente y $\{\alpha_n\} \to 0$. Entonces los siguientes conjuntos son de medida nula :*

$$(i) \qquad \lim_{n\to\infty} N(y_n, \alpha_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \} \tag{6}$$

$$(ii) \qquad \lim_{j\to\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} N(y_k, \tfrac{1}{j}\alpha_k) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(y_k, \tfrac{1}{j}\alpha_k) \} \tag{7}$$

Demostración. Supongamos que $\{y_n\} \to y_o$; dado $\varepsilon > 0$ existe K tal que

$$\left. \begin{array}{l} |y_k - y_o| < \frac{1}{4}\varepsilon \\ 0 < \alpha_k < \frac{1}{4}\varepsilon \end{array} \right\} \quad \text{para todo } k > K . \tag{8}$$

(i) Tenemos :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \quad \text{(para todo } n) \tag{9}$$

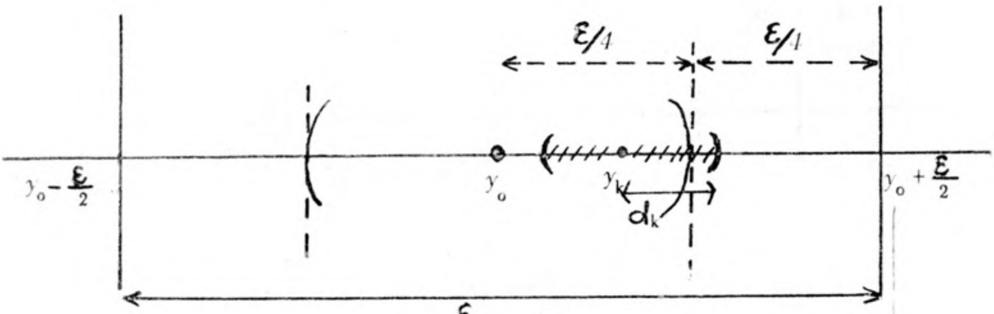

Fig. 2

De (8) tenemos :

$$N(y_k, \alpha_k) \subset N(y_o, \tfrac{1}{2}\varepsilon) \quad \text{para todo} \quad k > K .$$

luego :

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k) \subset N(y_o, \tfrac{1}{2}\varepsilon) \qquad \text{si} \qquad n > K . \tag{10}$$

De (9) y (10) se tiene que :

$$m\,[\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\bigcup_{k=n}^{\infty} N(y_k, \alpha_k)\}] < \varepsilon \tag{11}$$

Como ε es cualquiera, se tiene que el conjunto (6) es de medida cero.

(ii) De (10) :

$$\bigcup_{k=K+1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j}\alpha_k) \subset N(y_o, \tfrac{1}{2}\varepsilon) \tag{12}$$

puesto que $\frac{1}{j}\alpha_k \leq \alpha_k$ para todo j. Si

$$j > \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)}{\varepsilon} \tag{13}$$

entonces

$$m\,[\bigcup_{k=1}^{K} N(y_k, \frac{1}{j}\alpha_k)] \leq \frac{2}{j}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) < \varepsilon . \tag{14}$$

De (12) y (14) se tiene que :

$$m\,[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j}\alpha_k)] \leq m\,[\bigcup_{k=1}^{K} N(y_k, \frac{1}{j}\alpha_k)] + m\,[\bigcup_{k=K+1}^{\infty} N(y_k, \frac{1}{j}\alpha_k)] < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon , \tag{15}$$

esto es, el conjunto (7) tiene la medida nula. ■

Teorema 1. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *una serie convergente de términos positivos y*

$D = \{ x_n / n \in \mathbb{N} \}$ *un conjunto contable denso en* $[0,1]$, *entonces la siguiente función de la variable real* t.

$$f(t) = m [\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \} \cap [0,1]] \tag{16}$$

es creciente y continua.

Demostración. (i) Si $t' > t$ entonces :

$$N(x_k, \alpha_k t') \supset N(x_k, \alpha_k t) \qquad \text{para todo} \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) ,$$

y por lo tanto :

$$f(t') = m [\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') \} \cap [0,1]] \geq m[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \} \cap [0,1]] = f(t) \tag{17}$$

(ii) Si $t' > t$ entonces tenemos :

$$\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') - \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ N(x_k, \alpha_k t') - N(x_k, \alpha_k t) \} . \tag{18}$$

Tenemos también

$$m[N(x_k, \alpha_k t') - N(x_k, \alpha_k t)] = 2 t' \alpha_k - 2t \alpha_k = 2 (t' - t) \alpha_k .$$

por lo tanto se tiene que :

$$0 \leq f(t') - f(t) = m [\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t') - \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) \} \cap [0,1]]$$

$$\leq m[\bigcup_{k=1}^{\infty} \{N(x_k, \alpha_k t') - N(x_k, \alpha_k t)\} \cap [0,1]]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2(t'-t)\, \alpha_k = 2(t'-t) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tag{19}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < +\infty$ se tiene que :

$$\lim_{t' \to t} f(t') = f(t) ,$$

o sea que f es continua en cualquier punto . ■

Corolario . *Dado un número real $c\ (0 < c < 1)$ existe un conjunto abierto y denso en $[0,1]$ cuya medida es igual a c* [4] .

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ una serie convergente de términos positivos y sea

$$A = \lim_{t \to o} \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t) .$$

Entonces sabemos que

$$m(A) = 0$$

ya que

$$m(A) \leq m[\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k t)] \leq 2t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \to 0 \quad (t \to 0) .$$

Por la continuidad de la medida se tiene que

$$\lim_{t \to o} f(t) = 0 \tag{20}$$

Además :

$$f(\frac{1}{\alpha_1}) = m[\{\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{\alpha_k}{\alpha_1})\} \cap [0,1]] \geq m[N(x_1, 1) \cap [0,1]] = m([0,1]) = 1 .$$

o sea :

$$f(\frac{1}{\alpha_1}) = 1 . \qquad (21)$$

De (20) y (21) , dado c $(0 < c < 1)$ existe t_o tal que

$$f(t_o) = c \qquad \text{(Teorema del valor intermedio)} , \qquad (22)$$

o sea que

$$m [\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k , \alpha_k t_o)] = c . \qquad \blacksquare$$

§ 3. *Ordenaciones especiales del conjunto D .*

Lema 4. *Sean $\{ \alpha_k \}$ una sucesión de términos positivos tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = + \infty \quad , \qquad \alpha_k \to 0 \qquad (k \to \infty) \quad . \qquad (1)$$

y $\{ \beta_j \}$ una sucesión de términos positivos. Dado un conjunto D contable y denso en $[a,b]$, existe un ordenamiento de los puntos de D , $D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$, tal que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k , \beta_j \alpha_k) \} \supset [a,b] \qquad (2)$$

Demostración. Sea $\{ \alpha_{s(k)} \}$ una subsucesión de $\{ \alpha_k \}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{s(k)} < + \infty \quad ; \qquad (3)$$

entonces $\mathbb{N} - \{ s(k) \mid k \in \mathbb{N} \}$ es contablemente infinito. Sea

$$\mathbb{N} - \{ s(k) \mid k \in \mathbb{N} \} = \{ t(k) \mid k \in \mathbb{N} \} .$$

entonces, por (1), se debe tener que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{t(k)} = +\infty . \tag{4}$$

Sea D_1 un subconjunto de D contablemente infinito cuyo complemento $D_o = D - D_1$ sea denso en $[a,b]$. Escogemos

$$\tilde{x}_1 , \tilde{x}_2 , \ldots , \tilde{x}_{p_1} \in D_o$$

tales que

$$\bigcup_{k=1}^{p_1} N(\tilde{x}_k , \beta_1 \alpha_{t(k)}) \supset [a,b] \quad \text{(por el Lema 2)} . \tag{5}$$

Como $\sum_{k=p_1+1}^{\infty} \beta_2 \cdot \alpha_{t(k)} = +\infty$, podemos escoger :

$$\tilde{x}_{p_1+1} , \tilde{x}_{p_1+2} , \ldots , \tilde{x}_{p_2} \in D_o$$

tales que

$$\bigcup_{k=p_1+1}^{p_2} N(\tilde{x}_k , \beta_2 \alpha_{t(k)}) \supset [a,b] \quad \text{(Lema 2)} \tag{6}$$

y así sucesivamente. En general, para $j = 1, 2, 3, \ldots$, escogemos :

$$\tilde{x}_{p_j+1} , \tilde{x}_{p_j+2} , \ldots , \tilde{x}_{p_{j+1}} \in D_o$$

tales que

$$\bigcup_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} N(\tilde{x}_k , \beta_j \alpha_{t(k)}) \supset [a,b] . \tag{7}$$

$D - \{ \tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ es contablemente infinito ya que

$$D - \{ \tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \} \supset D_1 \quad .$$

Sea

$$D - \{ \tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \} = \{ \tilde{\tilde{x}}_k \mid k \in \mathbb{N} \} \; .$$

Vamos a demostrar que el siguiente ordenamiento de los puntos de D satisface la relación (2) :

$$D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x_{t(k)} = \tilde{x}_k \\ \\ x_{s(k)} = \tilde{\tilde{x}}_k \end{cases} \quad . \tag{8}$$

De (7) , para todo j , tenemos :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k , \beta_j \, \alpha_{t(k)}) \supset \bigcup_{k=p_j+1}^{p_{j+1}} N(\tilde{x}_k , \beta_j \, \alpha_{t(k)}) \supset [a,b] \tag{9}$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k , \beta_j \, \alpha_k) \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k , \beta_j \, \alpha_{t(k)}) \supset [a,b] \; , \qquad (\text{para todo } j) \; . \tag{10}$$

Por lo tanto se obtiene la relación (2) . ■

Corolario 1. *Sea $\{ \alpha_k \}$ una sucesión de términos positivos tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = + \infty \quad , \qquad \alpha_k \to 0 \qquad\qquad (k \to \infty) \; .$$

Dado un conjunto D contable y denso en $[a,b]$, existe un ordenamiento de D , $D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$, tal que

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k , \frac{1}{j} \alpha_k) \} = [a,b] . \tag{11}$$

Demostración. En el lema 4, tomando :

$$\beta_j = \frac{1}{j} ,$$

se tiene que

$$A_1 \supset [a,b] . \tag{12}$$

Sea

$$\alpha_o = \text{máximo de } \{ \alpha_k \mid k \in \mathbb{N} \} ,$$

entonces

$$N(x_k , \frac{1}{j} \alpha_k) \subset N(x_k , \frac{1}{j} \alpha_o) \subset (a - \frac{1}{j} \alpha_o , b + \frac{1}{j} \alpha_o) \text{ (para todo } k \text{ y todo } j \text{) .}$$

luego :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k , \frac{1}{j} \alpha_k) \subset (a - \frac{1}{j} \alpha_o , b + \frac{1}{j} \alpha_o) .$$

y así :

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k , \frac{1}{j} \alpha_k) \} \subset \bigcap_{j=1}^{\infty} (a - \frac{1}{j} \alpha_o , b + \frac{1}{j} \alpha_o) = [a,b] . \tag{13}$$

De (12) y (13) se deduce la igualdad (11) . ■

Corolario 2. *Bajo la misma hipótesis del Corolario 1, existe un ordenamiento de* D , $D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ *tal que*

$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k , \alpha_k) \} = [a,b] . \tag{14}$$

Demostración. En el lema 4, tomamos $\beta_j = 1$ para todo j. Dado n cualquiera, de (7) se tiene que :

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \supset \bigcup_{k=p_j+1}^{\infty} N(\tilde{x}_k, \alpha_{t(k)}) \supset [a,b] \quad , \tag{15}$$

donde la primera inclusión se cumple para algún p_j suficientemente grande. De (15), tomando la intersección para todo $n=1,2,3,\ \ldots,$ obtenemos :

$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \} \supset [a,b] . \tag{16}$$

Como $\alpha_k \to 0 \quad (k \to \infty)$, dado $\varepsilon > 0$ existe n tal que

$$\alpha_k < \varepsilon \qquad \text{para todo} \quad k \geq n .$$

Luego :

$$N(x_k, \alpha_k) \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon) \qquad \text{para todo} \quad k \geq n .$$

Por lo tanto obtenemos la siguiente inclusión, para ε cualquiera :

$$A_2 \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon) . \tag{17}$$

De (16) y (17) se tiene la igualdad (14) . ∎

Lema 5. *Sea* $\{\alpha_k\}$ *una sucesión de términos positivos tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty \quad , \quad \alpha_k \to 0 \qquad (k \to \infty) .$$

Sean D *y* B *conjuntos contables densos en* $[a,b]$ *con* $D \cap B = \phi$.

(i) *Existe un ordenamiento de los puntos de* D, $D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$, *tal que*

$$[a,b] - A_1 \supset B\,, \quad m(A_1) = b - a \tag{18}$$

donde

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \tfrac{1}{j}\alpha_k) \} \,.$$

(ii) *Existe un ordenamiento de los puntos de* D, $D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ *tal que*

$$[a,b] - A_2 \supset B\,, \quad m(A_2) = b - a\,. \tag{19}$$

donde

$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \} \,.$$

Nota : Nótese que $A_1 \subset [a,b]$, $A_2 \subset [a,b]$. De (18) (ó 19)) :

El complemento de $A_i = [a,b] - A_i$ es denso en $[a,b]$.

Demostración . Daremos solamente una demostración de (ii) ; se puede demostrar (i) en forma prácticamente idéntica.

Sean $B = \{ \lambda_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ y $D = \{ y_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ y sea d_k = la distancia mínima entre los puntos $\{ a, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, y_k, b \}$; entonces se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} d_k = 0 \tag{20}$$

puesto que B es denso en $[a,b]$.

Como $\alpha_k \to 0 \quad (k \to \infty)$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_k < \tfrac{1}{2} d_1 \quad \text{para todo } k > p_1 \,. \tag{21}$$

Sean $\{ x_1, x_2, \dots, x_{p_1} \}$, p_1 puntos cualesquiera del conjunto D. El

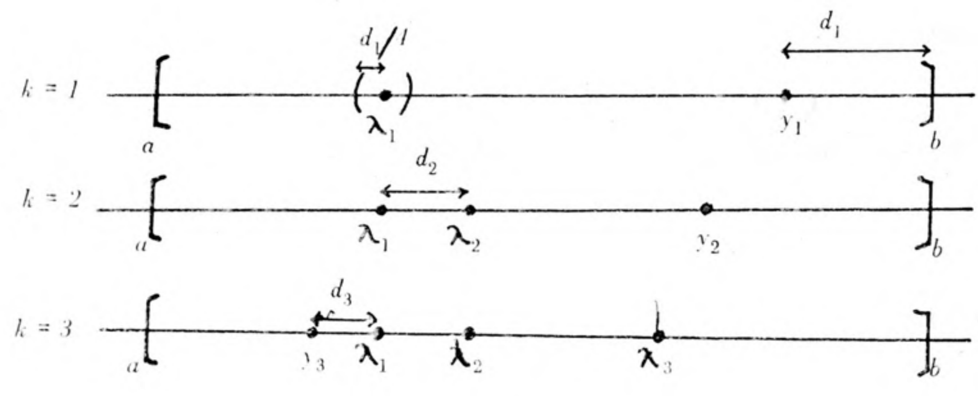

Fig. 3

conjunto $[a,b] - N(\lambda_1, \frac{1}{4} d_1)$ es la unión de dos intervalos cerrados de longitud mayor que $\frac{3}{4} d_1$ (ver Fig. 3, $k = 1$), luego es posible cubrirlo con un número finito de vecindades de puntos de D con radio α_k $(k > p_1)$; así podemos escoger (ver Fig. 4, $k = 1$) :

$$x_{p_1+1}, x_{p_1+2}, \ldots, x_{p_2} \in D .$$

tales que :

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \bigcup\limits_{j=p_1+1}^{p_2} N(x_j, \alpha_j) \supset [a,b] - N(\lambda_1, \tfrac{1}{4} d_1) \\[2ex] \lambda_1 \notin B_1 \quad , \quad y_1 \in \{x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}, \ldots, x_{p_2}\} \\[2ex] \alpha_k < \tfrac{1}{2} d_2 \quad \text{para todo} \quad k > p_2 . \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Ahora, escogemos (ver Fig. 4, $k = 2$) :

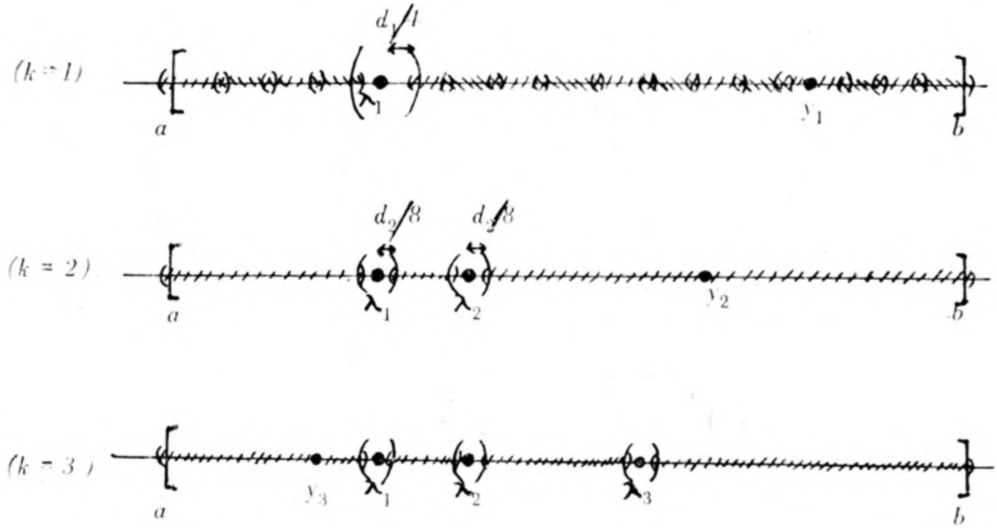

Fig. 4

$$x_{p_2+1},\ x_{p_2+2},\ \dots,\ x_{p_3} \in D$$

tales que :

$$B_2 = \bigcup_{j=p_2+1}^{p_3} N(x_j, \alpha_j) \supset [a,b] - \bigcup_{i=1}^{2} N(\lambda_i, \tfrac{1}{8} d_2)$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \notin B_2 \quad , \quad y_2 \in \{x_1, x_2, \dots, x_{p_3}\} \qquad (23)$$

$\alpha_k < \frac{1}{2} d_3$ para todo $k > p_3$.

Y así sucesivamente. En general, escogemos :

$$x_{p_n+1},\ x_{p_n+2},\ \dots,\ x_{p_{n+1}} \in D$$

tales que

$$\text{(I)} \qquad B_n = \bigcup_{j=p_n+1}^{p_{n+1}} N(x_j, \alpha_j) \supset [a,b] - \bigcup_{i=1}^{n} N(\lambda_i, \frac{1}{4n} d_n)$$

$$\text{(II)} \qquad y_n \in \{ x_1, x_2, \ldots, x_{p_{n+1}} \}$$

$$\text{(III)} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \notin B_n \tag{24}$$

$$\text{(IV)} \qquad \alpha_k < \tfrac{1}{2} d_{n+1} \quad \text{para todo} \quad k > p_{n+1}$$

Por la condición (II) se tiene que :

$$D = \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \} . \tag{25}$$

Tenemos también que :

$$A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=p_n+1}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \} . \tag{26}$$

Por (III) se tiene que $\lambda_n \notin B_k$ para todo $k \geq n$; luego :

$$\lambda_n \in A_2 \qquad \text{(para todo } n \text{)},$$

esto es :

$$[a,b] - A_2 \supset \{ \lambda_n \mid n \in \mathbb{N} \} = B . \tag{27}$$

Por (I) tenemos :

$$m(B_k) \geq (b-a) - k \frac{2}{4k} d_k = (b-a) - \tfrac{1}{2} d_k .$$

luego

$$m\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right] \geq b-a \qquad \text{(para todo } n\text{).}$$

y así ,

$$m(A_2) = m\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\right\}\right] = b-a \tag{28}$$

puesto que $A_2 \subset [a,b]$. ■

Teorema 2. *Sea* $\{\alpha_n\}$ *una sucesión de términos positivos tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty \quad , \qquad \alpha_k \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Dado un conjunto D *denso y contable en* $[0,1]$, *y dado un número* c $(0 \leq c \leq 1)$,

[I] *existe un ordenamiento de* D, $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *tal que*

(i) $m(A_1) = c$ *donde* $A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j}\alpha_k)\right\}$.

(ii) $[0,1] - A_1$ *y* A_1 *son densos en* $[0,1]$.

[II] *Existe un ordenamiento de* D, $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *tal que*

(i) $m(A_2) = c$ *donde* $A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k)\right\}$.

(ii) $[0,1] - A_2$ *y* A_2 *son densos en* $[0,1]$.

Demostración. Vamos a dar la demostración de [I] y dejaremos [II] a los lectores ya que su demostración es prácticamente idéntica a la de [I].

Supongamos que $c \neq 1$ ya que, cuando $c = 1$, el teorema es un caso particular del Lema 5.

Como $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$, existe una subsucesión de $\{\alpha_n\}$, digamos $\{\alpha_{s(k)}\}$, tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{s(k)} < +\infty \quad ; \tag{29}$$

Sea

$$\{ t(k) \mid k \in \mathbb{N} \} = \mathbb{N} - \{ s(k) \mid k \in \mathbb{N} \} .$$

Entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{t(k)} = +\infty . \tag{30}$$

Primer caso : $c \neq 0$.

Sean $D_0 = \{ x \in D \mid 0 \leq x \leq c \}$ y $D_1 = D - D_0$.

Entonces D_1 es un conjunto contablemente infinito, digamos

$$D_1 = \{ \tilde{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \} .$$

Por el Lema 5, existe un ordenamiento de los puntos del conjunto D_0, $D_0 = \{ \tilde{\tilde{x}}_k \mid k \in \mathbb{N} \}$, tal que

(i) $\tilde{\tilde{A}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{\tilde{x}}_k, \frac{1}{j} \alpha_{t(k)}) \}$ es un conjunto de medida c.

(ii) $\tilde{\tilde{A}} \subset [0, c]$

(iii) $[0, c] - \tilde{\tilde{A}}$ es denso en $[0, c]$.

Por otra parte, si

$$\tilde{\tilde{A}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k \,.\, \frac{1}{j} \, \gamma_{s(k)}) \}$$

entonces :

(i) $m(\tilde{\tilde{A}}) = 0$ (por (29)).

(ii) $\tilde{\tilde{A}} \subset [\, c, 1\,]$.

(iii) $[\, c, 1\,] - \tilde{\tilde{A}}$ es denso en $[\, c, 1\,]$ puesto que $m(\tilde{\tilde{A}}) = 0$.

Sea $\{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ el ordenamiento del conjunto D definido por :

$$x_{t(k)} = \tilde{x}_k \quad , \qquad x_{s(k)} = \tilde{\tilde{x}}_k \quad . \tag{31}$$

entonces tenemos (Lema 1) :

$$A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k \,.\, \frac{1}{j} \, \alpha_k) \}$$

$$= \bigcap_{j=1}^{\infty} [\, \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k \,.\, \frac{1}{j} \, \alpha_{t(k)}) \} \cup \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{\tilde{x}}_k \,.\, \frac{1}{j} \, \alpha_{s(k)}) \} \,]$$

$$= [\, \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{x}_k \,, \frac{1}{j} \, \alpha_{t(k)}) \}] \cup [\, \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\tilde{\tilde{x}}_k \,.\, \frac{1}{j} \, \alpha_{s(k)}) \} \,]$$

$$= \tilde{A} \cup \tilde{\tilde{A}} \quad . \tag{32}$$

Por lo tanto, A_1 satisface todas las condiciones exigidas.

Segundo caso : $c = 0$.

Sea $\{ \tilde{x}_k \}$ una sucesión convergente de puntos de D ; entonces

$D - \{ x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ es contablemente infinito. Sea

$$D - \{ \check{x}_k \mid k \in \mathbb{N} \} = \{ \tilde{\tilde{x}}_k \mid k \in \mathbb{N} \} .$$

Entonces el ordenamiento definido por (31) cumple la condición del teorema puesto que

$m(\check{A}) = 0$ (por el Lema 3)

$m(\tilde{\tilde{A}}) = 0$ (por (29)) , y

$m(A_1) \leq m(\check{A}) + m(\tilde{\tilde{A}}) = 0$ (por (32)) . ■

§ 4. ***Dominio de la convergencia*** . Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \tag{1}$$

una *serie convergente* de términos positivos. Dado un conjunto $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, contable y denso en $[0, 1]$, vamos a estudiar para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ converge la siguiente serie ([1]) :

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{| x - x_n |} . \tag{2}$$

(i) *Si* $x \notin [0, 1]$ *la serie* (2) *converge* .

En realidad, si

$$r = \textit{mínimo} \ \{ | x - 0 | , | x - 1 | \}$$

---

(1) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ diverge, entonces la serie (2) diverge para todo x real .

entonces $|x - x_n| \geq r$ para todo n, puesto que $x_n \in [0, 1]$ para todo n y por lo tanto se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{r} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty .$$

(ii) *Sea*

$$B = \{ x \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} = +\infty \} , \tag{3}$$

entonces B *es no contable y medible -Lebesgue.*

Demostración. Sean $B_{k,j} = \{ x \mid \sum_{n=1}^{k} \frac{C_n}{|x - x_n|} > j \}$ (4)

entonces $B_{k,j}$ es abierto para todo j y para todo k. Tenemos :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k,j} = \{ x \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} > j \} ,$$

luego

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{k,j} \} .$$

Como B es intersección contable de conjuntos abiertos, entonces se tiene que B es no-contable y medible-Lebesgue. ■

(iii) *Sea*

$$B_o = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k , C_k) \} \cup D \tag{5}$$

entonces

$$D \subset B_o \subset B . \tag{6}$$

Demostración. Sea $x \in B_o$, entonces

$$x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k \, , \, C_k) \qquad \text{para todo} \quad n \, .$$

esto es, existe un conjunto *infinito* $\{ k(j) \mid j \in \mathbb{N} \}$ tal que

$$x \in N(x_{k(j)} \, , \, C_{k(j)}) \, ,$$

o sea

$$|x - x_{k(j)}| < C_{k(j)} \tag{7}$$

Entonces tenemos :

$$\frac{C_{k(j)}}{|x - x_{k(j)}|} > 1 \qquad \text{(para todo} \quad j \,) \tag{8}$$

luego :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{|x - x_n|} > \infty \, ,$$

así que la serie (2) diverge.

(iv) *Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{C_n} < \infty \tag{9}$$

entonces B es de medida nula, o sea que la serie (2) converge en casi todo x real.

Demostración. Sea

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k \, , \, \sqrt{C_k}) \} \cup D \tag{10}$$

entonces A es de medida nula (por (9)). Si $x \notin A$, entonces

$$x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k \, , \sqrt{C_k}) \, , \qquad \text{para algún} \quad n \, .$$

esto es ,

$$x \notin N(x_k, \sqrt{C_k}) \quad , \quad \text{para todo} \quad k \geq n .$$

luego :

$$| x - x_k | \geq \sqrt{C_k} \quad , \qquad \text{para todo} \quad k \geq n . \tag{11}$$

Tenemos entonces que :

$$\frac{\sqrt{C_k}}{| x - x_k|} \leq 1 \quad , \text{para todo} \quad k \geq n ,$$

luego :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k}{| x - x_k|} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sqrt{C_k}\ \sqrt{C_k}}{| x - x_k |} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sqrt{C_k} < +\infty ,$$

o sea que la serie (2) converge para todo $x \notin A$. ∎

(v) Si
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{C_n} = +\infty \tag{12}$$

entonces existe una reordenación de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longrightarrow g(n) \end{aligned} \qquad (g \text{ es uno a no y sobre })$$

tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{| x - x_{g(n)}|} \tag{13}$$

converge para casi todo x *real* , [1] .

---

(1) En lugar de la serie (13) se puede utilizar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{g^{-1}(n)}}{| x - x_n|} \tag{13'}$$

Demostración. Como la serie (1) converge, existe una sucesión de términos positivos $\{ \beta_n \}$ tal que [2] :

$$\{ \beta_n \} \to 0 \qquad (n \to \infty) \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\beta_n} < +\infty . \tag{14}$$

Por el Teorema 2, existe un ordenamiento del conjunto D, digamos $D = \{ x_n^* \mid n \in \mathbb{N} \}$ tal que el conjunto

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k^* , \beta_k) \} \tag{15}$$

tiene la medida cero .

Si $x \notin A$ entonces

$$x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k^* , \beta_k) \qquad \text{para algún } n ,$$

esto es :

$$x \notin N(x_k^* , \beta_k) \qquad \text{para todo } k \geq n ,$$

luego :

$$| x - x_k^* | \geq \beta_k \qquad \text{para todo } k \geq n . \tag{16}$$

Tenemos entonces que :

$$\frac{\beta_k}{| x - x_k^* |} \leq 1 \qquad \text{para todo } k \geq n ,$$

luego :

---

(2) Basta tomar :

$$\beta_n = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} C_k}$$

(ver [5] , Sucesiones y Series, Tomo I, pág. 156).

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k^*|} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\beta_k}{|x - x_k^*|} \frac{C_k}{\beta_k} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{C_k}{\beta_k} < +\infty ,$$

o sea que la serie (13) converge si

$$x_{g(n)} = x_n^* \qquad n \in \mathbb{N} .$$

(vi) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{C_n} = +\infty$ *entonces* B *(el dominio de divergencia de la serie (2)) no siempre tiene la medida nula.*

Ejemplo. Sean

$$x_1 = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad x_2 = \tfrac{1}{4} \quad , \quad x_3 = \frac{3}{4}$$

$$x_4 = \frac{1}{8} \quad , \quad x_5 = \frac{3}{8} \quad , \quad x_6 = \frac{5}{8} \quad , \quad x_7 = \frac{7}{8}$$

En general, si

$$2^{n-1} \leq j < 2^n \quad \text{entonces} \quad x_j = \frac{j}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} - 1 .$$

Sean

$$C_1 = \frac{1}{2^1 \, 1^{\alpha}} \quad , \qquad C_2 = C_3 = \frac{1}{2^2 \, 2^{\alpha}}$$

$$C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = \frac{1}{2^3 \, 3^{\alpha}} .$$

En general,

$$C_j = \frac{1}{2^n \, n^{\alpha}} \qquad \text{si} \qquad 2^{n-1} \leq j < 2^n$$

donde $1 < \alpha < 2$.

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n - 1} C_j = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{2^n \, n^{\alpha}} = \tfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < +\infty \quad , \qquad (17)$$

puesto que $\alpha > 1$.

Sea $x < \frac{1}{2}$. Supongamos que

$$x_j \leq x < x_{j+1} \qquad \text{con} \qquad 2^{n-1} \leq j < 2^n .$$

Entonces se tiene :

$$| x - x_{j+i} | < i \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, (2^n - 1 - j) .$$

luego

$$\frac{1}{| x - x_{j+i}|} > \frac{2^{n-1}}{i} \qquad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, (2^n - 1 - j) .$$

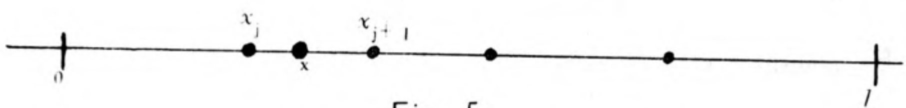

Fig. 5

Así :

$$\sum_{i=1}^{2^n-1-j} \frac{1}{| x - x_{j+i}|} \geq \sum_{i=1}^{2^n-1-j} \frac{2^{n-1}}{i} \geq \sum_{i=1}^{2^{n-2}} \frac{2^{n-1}}{i} \geq 2^{n-1} . \log(2^{n-2}) = 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} (n-2) (\log 2)$$

ya que

$$j \leq 2^{n-1} + \frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-1} + 2^{n-2} ,$$

$$2^n - 1 - j \geq 2^{n-2} - 1 .$$

Por lo tanto tenemos que

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \frac{C_i}{| x - x_i|} \geq \frac{1}{2^n n^\alpha} 2^{n-1} \cdot (n-2) \cdot (\log 2) = \frac{(n-2) \cdot (\log 2)}{2 \cdot n^\alpha} .$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n - 1} \frac{C_i}{|x - x_i|} \Big\} > \frac{(\log 2)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^{\alpha}} = +\infty \quad (18)$$

puesto que $\alpha < 2$.

De la misma forma se puede demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} = +\infty \quad , \tag{19}$$

para todo $x > \frac{1}{2}$.

Así, para todo $x \in [0, 1]$ la serie (19) diverge, o sea que

$$B = \{ x \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|} = +\infty \} = [0, 1] . \quad ■$$

§ 5. *Aplicación.* Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ (1)

una serie de términos positivos tal que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{C_n} = \rho < 1 . \tag{2}$$

Dado un natural cualquiera l tenemos :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{(C_n)^{1/l}} = \rho^{1/l} < 1 . \tag{3}$$

así que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n)^{1/l} \quad \text{converge .} \tag{4}$$

Sea

$$A^{(l)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, (C_k)^{\frac{1}{l+1}}) \} \cup D \tag{5}$$

entonces

$$m(A^{(l)}) = 0 \qquad \text{para todo} \qquad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Por un método similar al utilizado en § 4, (iv), podemos demostrar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|^l} \tag{7}$$

converge si $x \notin A^{(l)}$. Sea

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} A^{(l)} \quad , \tag{8}$$

entonces se tiene que $m(A) = 0$ y que la serie (7) converge para todo $x \notin A$; cualquiera sea l. Se definen las siguientes funciones para $x \notin A$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)} \tag{9}$$

$$f_n(x) = (-1)^n n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(i) f y f_n *no son acotadas en ningún intervalo.*

Demostración. Supongamos que f sea acotada en un intervalo (a,b) y sea M una cota de f en $(a,b) - A$.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \right| \leq M \qquad \text{para todo} \qquad x \in (a,b) - A . \tag{10}$$

Por el criterio de Dirichlet ([3], [5]) la serie

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{C_k}{x - x_k} \tag{11}$$

converge *uniformemente* en $(a, b) - A$, o sea que dado $\varepsilon > 0$ existe N_o tal que

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{C_k}{x - x_k} \right| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > N_o \text{ y para todo } x \in (a,b) - A \} \tag{12}$$

Como $\frac{1}{k} \frac{C_k}{x - x_k}$ es continua en $(a,b) - A$ (para todo k) entonces la función h definida por la serie (11) es *continua* en $(a,b) - A$. Sea $x_o \in (a,b) - A$; existe una sucesión de puntos de D, $\{ x_{u(j)} \}$, que tiende a x_o:

$$\{ x_{u(j)} \} \to x_o, \qquad x_{u(j)} \in D. \tag{13}$$

De (11) tenemos :

$$h(x) = \frac{1}{u(j)} \frac{C_{u(j)}}{x - x_{u(j)}} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq u(j))}}^{n-1} \frac{\frac{1}{k} C_k}{x - x_k} + \sum_{k \geq n} \frac{\frac{1}{k} C_k}{x - x_k} \tag{14}$$

donde n es un número natural fijo mayor que N_o. La tercera suma en (14) es menor que ε para todo $x \in (a,b) - A$ y la segunda suma es acotada cuando x se acerca a $x_{u(j)}$. Así :

$$h(x) \to \pm \infty \quad \text{cuando} \quad x \to x_{u(j)}, \quad x \in (a,b) - A. \tag{15}$$

Como $m(A) = 0$ se tiene que $(a,b) - A$ es denso en (a,b), luego existen puntos de $(a,b) - A$ en cualquier vecindad de $x_{u(j)}$. Por (13) y (15) se tiene que h no es acotada en ninguna vecindad de $x_0 \in (a,b) - A$ y esto es *imposible* puesto que h es continua en $x_0 \in (a,b) - A$.

En la misma forma, f_n no es acotada en ningún intervalo. ■

(ii) *f y f_n son discontinuas en cualquier punto de $[0,1] - A$.*

Demostración. Si f fuera continua en algún punto $x \in [0,1] - A$, entonces f sería acotada en alguna vecindad de x (absurdo por (i)).

(iii) *Se tiene que:*

$$\left(\frac{C_k}{x - x_k}\right)' = -\frac{C_k}{(x - x_k)^2}$$

sin embargo, f_1 no es la derivada de f ya que f no es derivable en ningún punto. La función f no es la integral de f_1 ya que f_1 no es integrable en ningún intervalo. ■

(iv) *Si extendemos f y f_n al plano complejo:*

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z - x_k} \\ f_n(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n\, n!\, \frac{C_k}{(z - x_k)^{n+1}} \end{aligned}\right\} \quad (z \text{ complejo}) \qquad (16)$$

entonces f y f_n son analíticas en el complemento del intervalo real $[0,1]$ (ver Fig. 6).

Demostración. Sea $z_0 \notin [0,1]$ y sea δ la distancia del punto z_0 al intervalo real $[0,1]$ (ver Fig. 6), entonces $\delta > 0$. Consideremos la vecin-

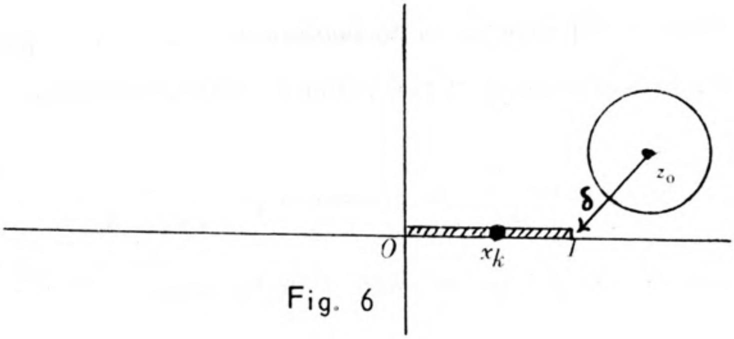

Fig. 6

dad $N(z_0, \frac{1}{2}\delta)$; entonces se tiene que

$$|z - x_k| \geq \tfrac{1}{2}\delta \qquad \text{para todo} \qquad z \in N(z_0, \tfrac{1}{2}\delta) .$$

Luego :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{C_k}{x - x_k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{\frac{1}{2}\delta} = \frac{2}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} C_k < +\infty .$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{C_k}{(z - x_k)^{n+1}} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(\frac{1}{2}\delta)^{n+1}} = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k < +\infty .$$

Por el criterio M de Weierstrass, las series en (16) convergen uniformenente en $N(z_0, \frac{1}{2}\delta)$, luego f y f_n son analíticas en z_0 .

(v) *f y f_n son analíticas en ∞. Más precisamente, ∞ es un cero de grado 1 de la función f, un cero de grado $n+1$ de la función f_n respectivamente.*

Demostración. Tenemos que

$$z\, f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{z - x_k}\, C_k \quad . \tag{17}$$

La serie en (17) converge uniformemente en $|z| \geq R$, para $R > 1$ (similar a la demostración de (iv)). Por lo tanto se tiene que :

$$\lim_{z \to \infty} z\, f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{z \to \infty} \frac{z}{z - x_k}\, C_k = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \ , \tag{18}$$

esto es : ∞ es un cero de grado 1 de la función f.

De la misma forma se muestra que ∞ es un cero de grado $n+1$ de la función f_n.

(vi) *En el complemento del intervalo real* $[0,1]$ *se tiene :*

$$f_1(z) = f'(z) \quad , \quad f_n(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = f^{(n)}(z) \ . \tag{19}$$

Demostración. Utilizando un método similar al usado en (iv) se puede demostrar que las series en (16) convergen uniformemente en cualquier conjunto compacto contenido en el complemento del intervalo real $[0,1]$; por lo tanto se puede derivar término a término las series en (16), o sea que se tienen las igualdades (19) . ∎

(viii) *Sea* $x \notin A$ *entonces :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(x + i\,\varepsilon) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \quad . \tag{20}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f^{(n)}(x + i\,\varepsilon) = f_n(x) = (-1)^n\, n\,! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^{n+1}} \tag{21}$$

Demostración. Tenemos que

$$\frac{1}{(x + i\varepsilon) - x_k} = \frac{(x - x_k) - i\varepsilon}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2}$$

Si $x \notin A$ entonces :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{-i\varepsilon C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} \right| = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2}$$

$$\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2} = \varepsilon f_1(x) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0) \tag{22}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - x_k) C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varepsilon^2}{(x - x_k)\{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2\}} C_k \right|$$

$$\leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k| \, |(x - x_k)^2 + \varepsilon^2|} \leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|^3} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0) \tag{23}$$

puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{|x - x_k|^3} \quad \text{converge si} \quad x \notin A .$$

De (22) y (23) se obtiene :

$$f(x + i\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x + i\varepsilon) - x_k} \xrightarrow[(\varepsilon \to 0)]{} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x - x_k} \qquad \text{si} \quad x \notin A.$$

Dejamos al lector la demostración de (21) . ■

(viii) Si $x \notin A$ *entonces*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \tfrac{1}{2} [f(x + i\varepsilon) + f(x - i\varepsilon)] = f(x) . \tag{24}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2i\varepsilon} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] = f_1(x) . \tag{25}$$

Demostración. De (23) se obtiene inmediatamente (24) .

Tenemos que :

$$\frac{1}{2i\varepsilon} [f(x + i\varepsilon) - f(x - i\varepsilon)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} .$$

Pero

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2 + \varepsilon^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^2} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\varepsilon^2 C_k}{(x - x_k)^2 \{ (x - x_k)^2 + \varepsilon^2 \}} \right|$$

$$\leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{(x - x_k)^4} = \varepsilon^2 f_3(x) \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0) ,$$

y por lo tanto se tiene (25) . ∎

§ 6. *Una función derivable en casi toda parte con derivada no integrable .*

Sea $\{ C_n \}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{C_k} < +\infty . \tag{1}$$

Dado un conjunto $\{ D = x_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ contable y denso en $[0,1]$, sea

$$g_k(x) = (x - x_k) \; sen \; \frac{1}{x - x_k} \quad \text{si} \quad x \neq x_k \qquad , (k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2)$$

entonces g_k es continua para todo $x \notin D$. Definamos una función f por:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \; g_k(x) \qquad (3)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} C_k \, (x - x_k) \; sen \; \frac{1}{x - x_k} \qquad (4)$$

Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} | C_k \, g_k(x) | = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \, | g_k(x) | \leq \sum_{k=1}^{\infty} C_k < + \infty \; ,$$

y por el criterio M de Weierstrass se tiene que la serie (3) converge uni - formemente en $[0,1] - D$. Por lo tanto la función f es continua en $[0,1] - D$.

Si
$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k , \frac{1}{j} \sqrt{C_k}) \} \qquad (5)$$

entonces :

$$m(A) = 0 \qquad , \qquad D \subset A \; .$$

y la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{| x - x_k |} \qquad (6)$$

converge en $[0,1] - A$. Para $x, a \notin A$, $x \neq a$, tenemos :

$$\frac{g_k(c) - g_k(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a} | (x - x_k) \; sen \; \frac{1}{x - x_k} - (a - x_k) \; sen \; \frac{1}{a - x_k} |$$

$$= \frac{1}{x - a} [(x - x_k) \; sen \; \frac{1}{x - x_k} - (x - x_k) \; sen \; \frac{1}{a - x_k} + (x - x_k) \; sen \frac{1}{a - x_k}$$
$$- (a - x_k) \; sen \frac{1}{a - x_k}]$$

$$= \frac{x-x_k}{x-a}\left[sen\, \frac{1}{x-x_k} - sen\, \frac{1}{a-x_k} \right] + sen\, \frac{1}{a-x_k}$$

$$= \frac{x-x_k}{x-a} \cdot 2 \cdot sen\, \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{1}{x-x_k} - \frac{1}{a-x_k} \right\} \cdot cos\, \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{1}{x-x_k} + \frac{1}{a-x_k} \right\} + sen\, \frac{1}{a-x_k}$$

$$= -2\, \frac{x-x_k}{x-a}\, sen\, \frac{x-a}{2(x-x_k)(a-x_k)} \cdot cos\, \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{1}{x-x_k} + \frac{1}{a-x_k} \right\} + sen\, \frac{1}{a-x_k} \quad . \qquad (7)$$

Sea

$$\left.\begin{aligned} h_k(x) &= \frac{g_k(x) - g_k(a)}{x-a} \qquad \text{si} \qquad x \neq a \\ h_k(a) &= g_k'(a) = -\frac{1}{a-x_k} \cdot cos\, \frac{1}{a-x_k} + sen\, \frac{1}{a-x_k} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Entonces h_k es continua para todo $x \neq A$. De (7) y (8) :

$$| h_k(x) | \leq 2\, \frac{| x-x_k |}{| x-a |} \frac{| x-a |}{2\, | x-x_k |\, | a-x_k |} + \left| sen\, \frac{1}{a-x_k} \right| \leq \frac{1}{| a-x_k |} + 1$$

Como $a \neq A$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left\{ \frac{1}{| a-x_k |} + 1 \right\}$$

converge y por el criterio M de Weierstrass se ve que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot h_k(x) \qquad (9)$$

converge uniformemente en $[0,1] - A$. Por lo tanto se tiene que :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \notin A}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k\, h_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot h_k(a)$$

o sea :

$$\lim_{x \to a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{g_k(x) - g_k(a)}{x - a} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot g_k'(a).$$

Esto es, la función f es derivable en $[0,1] - A$ y, para $x \in [0,1] - A$ se obtiene :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \operatorname{sen} \frac{1}{x-x_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{x-x_k} \cdot \cos \frac{1}{x-x_k}. \tag{10}$$

La primera suma en (10) representa una función continua en $[0,1] - A$ mientras que la segunda suma es discontinua para cualquier $x \in [0,1] - A$ (por demostración similar a la de (i) y (ii) del § 5) ; por lo tanto f' es discontinua para todo $x \in [0,1] - A$. Así que la función f definida por (4) es *derivable* en casi toda parte, y f' *no es integrable-Riemann* en ningún intervalo.

Apéndice

Se tiene la siguiente relación entre los dos conjuntos A_1 y A_2 ((2) y (3) del § 1) :

$$A_1 \subset A_2 \cup D. \tag{1}$$

Demostración : Sea $x \notin A_2 \cup D$; entonces existe n tal que

$$x \notin \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k),$$

o sea :

$$|x - x_k| \geq \alpha_k \quad \text{para todo} \quad k \geq n. \tag{2}$$

Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$j \geq \text{máximo} \left\{ \frac{\alpha_1}{|x - x_1|}, \frac{\alpha_2}{|x - x_2|}, \ldots, \frac{\alpha_{n-1}}{|x - x_{n-1}|} \right\}.$$

Entonces

$$|x - x_k| \geq \frac{\alpha_k}{j} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1. \tag{3}$$

De (2) y (3) tenemos que :

$$|x - x_k| \geq \frac{\alpha_k}{j} \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N},$$

esto es :

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \frac{1}{j}\alpha_k).$$

Luego :

$$x \notin A_1.$$

Por lo tanto se tiene la inclusión (1) . ■

Nota 1 *: No siempre se cumple la relación :* $A_1 \subset A_2$.

En [2] se da un ejemplo (Ejemplo 16) en el cual

$$A_2 \cap D = \phi.$$

Como $D \subset A_1$ se tiene, para este ejemplo, que $A_1 \not\subset A_2$.

Nota 2 *: Hay casos en los cuales* $A_1 = A_2 \cup D$.

Para el caso del Corolario 1, Lema 4 del § 3 se tiene que $A_1 = [0, 1]$ (tomando $a = 0$, $b = 1$), luego :

$$A_1 = A_2 \cup D = [0, 1].$$

Nota 3 *: Hay casos en los cuales* $A_1 \neq A_2 \cup D$.

Ejemplo : Sea $D = \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ un ordenamiento del conjunto D y x un punto de $[0,1]$, $x \notin D$. Como D es denso en $[0,1]$ existe una sucesión de puntos de D que tiende a x, digamos :

$$\{ x_{t(j)} \} \longrightarrow x .$$

Sea $\{ s(j) \mid j \in \mathbb{N} \} = \mathbb{N} - \{ t(j) \mid j \in \mathbb{N} \}$; determinamos la sucesión $\{ \alpha_n \}$ como sigue :

$$\tfrac{1}{2} \alpha_{t(j)} = | x_{t(j)} - x | , \quad \alpha_{s(j)} < | x_{s(j)} - x | .$$

Como $\qquad x \in N(x_{t(j)}, \alpha_{t(j)}) \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$

entonces

$$x \in A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=n}^{\infty} N(x_k, \alpha_k) \} .$$

Por la definición de la sucesión $\{ \alpha_n \}$ se tiene que

$$| x - x_k | \geq \tfrac{1}{2} \alpha_k \qquad \text{para todo } k .$$

o sea que

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \tfrac{1}{2} \alpha_k) ,$$

luego :

$$x \notin A_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^{\infty} N(x_k, \tfrac{1}{j} \alpha_k) \} .$$

Referencias

1. Takeuchi, Y. "Una serie relacionada con el conjunto de números racionales", Revista de Matemáticas Elementales, Vol. 7 Fasc. 2 (1965) pp. 46-48 .

2. Takeuchi Y. "Reordenación de números racionales", Boletín de Matemáticas, Vol. VI No. 5, pp. 1-20.

3. Apostol T.M. *Mathematical Analysis*, Addison Wesley, Reading, 1957

4. Rudin W. *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1966.

5. Takeuchi Y., *Sucesiones y Series*, *Tomo I*, Universidad Nal. de Colombia, 1971.

6. Takeuchi Y. *Análisis Matemático*, Universidad Nacional de Colombia, 1974.

* * *