Boletín de Matemáticas
Vol. IX , N° 2 págs. 91-128

LAS NOCIONES MATEMATICAS, VI

ALONSO TAKAHASHI

7. NICOLAS BOURBAKI

(Las Estructuras)

El personaje. Nicolás Bourbaki apareció en la escena matemática a mediados de los años treinta. Desde un principio fue protagonista de anécdotas divertidas , muchas veces imaginarias, en las cuales se vislumbraba una identidad enigmática pero, sobre todo, se constituyó en foco de controversias debido a sus puntos de vista técnicos y a sus acciones concretas sobre la Matemática. Aunque con mucho desparpajo se presentaba a sí mismo, en marzo de 1950, como "el profesor N. Bourbaki, antiguo miembro de la Real Academia de Poldavia, actualmente residenciado en Nancy, Francia y autor de un compendio de matemáticas", se trata en realidad de una fraternidad muy peculiar de matemáticos organizada en 1935 y cuyo propósito es la redacción de un tratado que presente en forma axiomática el cuerpo esencial de la matemática contemporánea. Su enfoque global lo acerca espiritualmente a la antigua secta pitagórica cuyo aritmetismo pretendía unificar la Matemática de su tiempo con base en un solo concepto, el de *número*. Por otra parte, la obra a realizar recuerda el famoso "Formulario" en cuya redacción colaboraron Peano y sus discípulos con pretensiones similares a las de Bourbaki.

El nombre de este curioso personaje es de origen griego y el profesor Henri Cartan, uno de los miembros fundadores, ha presentado impávidamente una intrincada genealogía : durante la invasión turca a Creta, en el siglo XVII, los hermanos Emmanuel y Nicoláus Skordylis se distinguieron por su valor recibiendo de los turcos el sobrenombre de *Vourbachi*, que significa algo así como caudillo exterminador, y que los hermanos transmitieron a sus descendientes modificándolo a *Bourbaki*. Mucho tiempo después, durante la campaña napoleónica en Egipto, los servicios de un navegante, de nombre Sauter Bourbaki, biznieto de Emmanuel, merecieron el reconocimiento del emperador quien se interesó por la educación de sus tres hijos, uno de los cuales fue más tarde oficial del ejército francés y tuvo a su vez un hijo que fue el general Charles Bourbaki quien intervino en la guerra franco-alemana entre 1870 y 1871. Una hermana de este general se casó con un descendiente directo de Nicolaus "Vourbachi" y, concluye Cartan, "de esta unión de dos ramas de la familia Bourbaki nació Nicolás Bourbaki, el matemático, actual miembro de la Real Academia de Poldavia".

En realidad sí existió un coronel francés de origen griego, llamado Bourbaki, quien perdió la vida en la guerra de independencia de Grecia y cuyo hijo, nacido en 1816, fue el general Charles Denis Sauter Bourbaki, cuya biografía es mucho menos compleja. Este oficial, graduado en la escuela militar de Saint Cyr se distinguió en la guerra de Crimea. Más tarde aspiró sin éxito al trono de Grecia; sirvió bajo Napoleón III y en 1870, al mando de la guardia imperial, logró algunos éxitos iniciales contra los alemanes pero al final estuvo al borde de una derrota total logrando a duras penas conducir sus diezmadas fuerzas a Suiza. Desengañado intenta suicidarse sin éxito y luego es vencido dos veces al tratar de ingresar al parlamento. Muere fracasado y olvidado en 1897 a la edad de 81 años.

Fue este oscuro personaje el escogido cuando un grupo de brillantes matemáticos franceses, reunidos en el café el Príncipe del Boulevard Saint Germain, resolvieron usar un seudónimo para evitar una larga lista de autores en la portada de sus obras conjuntas. Una estatua del general Bourbaki en Nancy es quizá la única conexión entre ellos ya que muchos de los miembros de Bourbaki han estado asociados en una u otra ocasión con la universidad de esa ciudad. Varios han estado también vinculados a la Universidad de Chicago y así nació el mito complementario del *Instituto de Matemática de la Universidad de Nancago* (Nancy + Chicago), situado en *Villa Nancago*, residencia académica del "profesor Bourbaki". Sobre la vinculación de este nombre con la comunidad universitaria de la Escuela Normal Superior, centro de formación de los grandes matemáticos franceses, circulan varias anécdotas. Se cuenta, por ejemplo, que un alumno que no había oído bien una referencia hecha por el profesor acerca de un teorema preguntó a su compañero "¿ Teorema de quién ?" y este, que tampoco había entendido, le contestó "De Bourbaki". También se menciona una broma de "bienvenida" a los alumnos nuevos iniciada por algunos bourbakistas y que consistía en someterlos a una conferencia ofrecida por un supuesto eminente profesor extranjero, cuyo nombre era naturalmente Nicolás Bourbaki, y quien era en realidad un estudiante de algún curso superior o algún vagabundo disfrazado con barba patriarcal y cuya disertación era una obra maestra compuesta de enunciados equívocos y plagada de teoremas que llevaban nombres de generales famosos y los cuales eran todos falsos pero de manera nada trivial.

Algunas versiones indican que a raíz de una conversación entre André Weil y Jean Delsarte acerca de la enseñanza del cálculo se conformó un grupo de unos diez matemáticos jóvenes quienes, en un intento de rescatar la legendaria "claridad francesa", se propusieron redactar una obra sistemática que abarcara toda la matemática moderna. Francia padecía entonces la carencia de una generación intermedia de científicos a causa de la juventud aniquilada en la Primera Guerra. En esta situación los jóvenes matemáticos franceses, bajo la tutela de los grandes maestros que aún vivían, como Jacques Hadamard y Gaston Julia, mantenían un seminario en el cual se esforzaban por asimilar las grandes ideas matemáticas que continuamente llegaban de Alemania y de otras partes. De allí surgió, a fines de 1934, el proyecto de escribir, no las meras actas del seminario, sino un libro o tratado que abarcara las ideas centrales de la matemática actual. En un principio se trataba únicamente de redactar un texto de Análisis Matemático que sustituyera al Cours d'Analyse de Goursat y el Traité d'Analyse de Picard, obras excelentes aunque no a tono con los desarrollos recientes. Pero una vez iniciados los estudios preliminares los objetivos fueron rápidamente modificados proponiéndose abarcar la totalidad de la matemática moderna.

Poco tiempo después de conformado el grupo de trabajo empezaron a publicarse artículos firmados por "Nicolás Bourbaki" en las Comptes Rendus de la Academia Francesa de Ciencias y en 1939 se inició la publicación del tratado propiamente dicho, *Elementos de Matemáticas*, Primera Parte : *Las estructuras fundamentales del Análisis*, obra cuya publicación continúa en la actualidad.

En 1948 se publica el libro *Les grands courants de la pensée mathématique* (Las grandes corrientes del pensamiento matemático) que incluye un artículo de N. Bourbaki, "La Arquitectura de las Matemáticas", en el cual se explica brillantemente el uso sistemático del método axiomático en la exposición e investigación matemáticas y el enfoque estructural preconizado por el autor.

El Journal of Symbolic Logic publica en 1949 el texto de la conferencia "Foundations of Mathematics for the working Mathematician" pronunciada por "el profesor N. Bourbaki" con motivo de la 11a. reunión de la Association for Symbolic Logic en Columbus, Ohio, el último día del año 1948 y que constituye un manifiesto muy claro de la posición bourbakista ante el problema de los fundamentos de la Matemática.

El medio matemático reaccionó a su vez ante la aparición de Bourbaki produciéndose reseñas técnicas de sus libros, comentarios acerca de sus opiniones de fondo y su concepción de la matemática, sin faltar críticas acerbas y defensas apasionadas, todo mezclado con no pocos toques jocosos usualmente relacionados con su singular personalidad.

En los Estados Unidos, en 1953, Emil Artin comentaba : "Nuestro tiempo está presenciando la creación de un trabajo monumental : una exposición de la totalidad de la matemática de hoy. Más aún, esta exposición se lleva a cabo de tal manera que los nexos comunes entre las varias ramas de la Matemática se hacen claramente visibles y que la armazón que sostiene toda la estructura no está condenada a tornarse anticuada en poco tiempo pues puede fácilmente absorver nuevas ideas ... ". En mayo de 1957 apareció en Scientific American un divertido artículo de Paul R. Halmos titulado "Nicolás Bourbaki" ilustrado con algunas caricaturas, donde se reunen varias anécdotas y leyendas y se describe la obra de este matemático "sin el cual la matemática del siglo XX sería, para bien o para mal, muy diferente de lo que es ". En este mismo año de 1957 el presidente de la Asociación Matemática de Inglaterra declaraba : "... parece probable que todo nuestro enfoque del álgebra, el análisis y la topología sea transformado por la pasmosa serie de monografías de ese grupo de matemáticos franceses que escriben bajo el sinónimo (sic) colectivo de *Bourbaki*" El año siguiente , en Febrero de 1958, Henri Cartan pronunció en Düsseldorff una conferencia muy esclarecedora sobre "Nicolás Bourbaki y la matemática de hoy" cuyo texto se publicó en 1959.

Sobre Bourbaki han inclusive aparecido artículos periodísticos como el de John Kobler en The Saturday Evening Post en 1966 titulado *Who is Bourbaki ?* (¿ Quién es Bourbaki?), destinado a presentar este excéntrico personaje y su obra ante el gran público, artículo que fue luego reproducido en otros periódicos del mundo.

Más recientemente, en Octubre de 1968, el profesor Jean Dieudonné, miembro fundador y principal vocero de Bourbaki por muchos años, presentó en Bucarest una exposición sobre el origen y los objetivos de la secta. En Febrero de 1970 The American Mathematical Monthly publicó una traducción de esta conferencia bajo el título *The Work of Nicholas Bourbaki* (La obra Nicolás Bourbaki). En este mismo año apareció un tomo dedicado enteramente a Bourbaki dentro de la serie *Towardas a Philosophy of Modern Mathematics* (Hacia una filosofía de la Matemática Moderna) en el cual el autor J. Fang, además de reunir un nutrido anecdotario sobre su héroe, lleva a cabo una aduladora defensa de su obra y sus proyecciones intentando también formular un prospecto de filosofía de la matemática desde el punto de vista del matemático activo.

Pero no todo lo que se dice y escribe acerca de Bourbaki le es favorable. Las críticas de sus antagonistas hablan de excesiva generalidad y abstracción ; del orden lógico inflexible y de la selección estricta que sitúan temas necesarios y familiares en capítulos muy avanzados del tratado o los excluyen completamente. Sobre todo se discute la incidencia de tales principios cuando son adoptados precipitadamente en la enseñanza a niveles elementales imponiendo un énfasis desmesurado en los aspectos algebraicos a expensas del análisis y de la geometría.

Hay incluso discrepancias internas. Acerca del excesivo énfasis en la axiomática el geómetra René Thom, miembro de Bourbaki, ha observado que si bien la axiomatización, como método de sistematización, es ciertamente efectiva, en cuanto a descubrimiento, el asunto es más dudoso; que es característico que del inmenso esfuerzo de sistematización de Nicolás Bourbaki no ha salido ningún teorema nuevo de alguna importancia y que "La vieja esperanza de Bourbaki de ver las estructuras matemáticas surgir naturalmente de una jerarquía de conjuntos, subconjuntos y sus combinaciones es, sin duda, sólo una ilusión".

Entre los miembros fundadores de la corporación se cuentan : *André Weil* , principal animador y conductor del proyecto, *Henri Cartan*, *Jean Delsarte*, *Claude Chevalley* y su más célebre representante y redactor en jefe, *Jean Dieudonné* . En un principio se trataba de una empresa exclusivamente francesa, lo cual es casi forzoso ya que para participar en sus debates es preciso hablar y entender francés a velocidades increibles dominando tanto la jerga de los estudiantes como el estilo pulido y muchas veces brillante que Bourbaki usa en sus escritos académicos. Sin embargo, con el tiempo se han presentado excepciones siendo admitidos miembros no franceses como Samuel Eilenberg, llamado por sus colegas $S^2 P^2$ (= el Sagaz Samuelito , Prodigio Polaco) quien se dice que fue aceptado por hablar francés como un francés y saber más topología algebraica que cualquier francés ; resulta pertinente señalar que el padre espiritual de Bourbaki es, paradójicamente, un alemán, David Hilbert, en quien se inspira su programa de unificación de la Matemática basado en el método axiomático y el formalismo.

Otros miembros del grupo Bourbaki son : J. Dixmer, R. de Possel, M. Brelot, J. Tate, G. de Rham, R. Godement, S. Lang, A. Grothendieck, A. Lichnerowicz , R. Thom, J. L. Koszul, P. Samuel, C. Chabauty, J. P. Serre, L. Schwartz y C. Ehresmann, mentes privilegiadas y matemáticos de primera línea, muy productivos en sus respectivos campos de especialización. Pero todos los miembros, y en especial los fundadores, han debido estar dispuestos a posponer a menudo sus intereses particulares inmediatos para dedicarse a estudios básicos y discusiones en conjunto sobre temas de importancia global, lo cual no ha sido obstáculo y por el contrario, posiblemente ha contribuido, para que muchos de ellos hayan hecho, bajo su propio nombre, enormes aportes a la matemática.

Como caso curioso, basado en la doble personalidad de los integrantes de Bourbaki, se recuerda que Dieudonné, después de intervenir en la redacción de un artículo que apareció bajo el nombre de Nicolás Bourbaki, y en el cual había algún detalle incorrecto, escribió posteriormente otro artículo titulado *Acerca de un error del Sr. Bourbaki*, firmado esta vez por Jean Dieudonné y en el cual se corregía la falla original. Estas actitudes no son insólitas en Bourbaki pues, contrastando con la eminencia y seriedad científica de sus miembros, abundan los incidentes divertidos que hacen más pintoresca la personalidad de este matemático policéfalo, pero que no siempre tienen eco en la comunidad matemática .

A los directivos de la Sociedad Americana de Matemáticas por ejemplo, no les pareció muy gracioso recibir una solicitud de ingreso de "Mister" Nicolás Bourbaki puesto que una corporación no debería quedar cobijada por las cuotas, mucho más reducidas, correspondientes a una persona natural. Y es que Bourbaki reclama obstinadamente esta calidad. En la conferencia de Düsseldorff, en 1958, Cartan hablaba a sus oyentes, con la mayor seriedad, de la dificultad para obtener información acerca del "señor Bourbaki", ya que, según él, sólo unos pocos lo conocían personalmente, lo cual, decía, crea confusión entre los interesados quienes, incluso, podían llegar a ¡dudar de su existencia!. En la misma charla y después de endilgarle a su audiencia su versión sobre el increible origen de Bourbaki a partir de los hermanos Skordylis, el profesor Cartan lamentaba que, a pesar de esta "aclaración", muchos seguirían convencidos de que Bourbaki no existía y que sólo se trataba de un seudónimo. Y relataba que, de tan atrevida opinión era Mr. Boas, editor del *Mathematical Reviews*, quien paladinamente así lo afirmó hace varios años en un artículo para la *Enciclopedia Británica*. Los editores de la enciclopedia pronto se hallaron totalmente confundidos al recibir una airada carta firmada por *Nicolás Bourbaki* donde éste juraba que nunca permitiría que alguien dudase de su existencia. Y para vengarse Bourbaki utilizó sus medios para propagar el rumor de que B. O. A. S. era meramente la sigla de los editores del Mathematical Reviews y que jamás había existido un matemático de apellido Boas. Se explica entonces la inquietud que Halmos expresaba en su artículo por lo que a él pudiera sucederle por atreverse a describir a Bourbaki como una "corporación informal" o "sociedad anónima".

Aún después de varios años muchas personas han continuado pasando por la vieja broma de iniciación planteada por la personalidad del autor del más célebre tratado moderno de matemáticas. Se decía incluso que si algún visitante se dirigía a la editorial Hermann & Co., encargada de la lucrativa publicación del tratado, y solicitaba indicaciones para encontrar al ilustre matemático podía ser informado de que éste se hallaba encerrado trabajando intensamente en su último libro o que estaba en una gira dictando conferencia. ¡ Y probablemente ambas cosas estaban sucediendo simultáneamente ! Quizás haya obedecido a uno de esos intentos de reafirmar la existencia de su alter ego la decisión de A. Weil de dar a una hija suya el nombre de Nicolette en honor de Nicolás Bourbaki.

El espíritu bromista de Bourbaki evoca la juventud que tan ligada está a la profesión del matemático donde, de acuerdo con Weil, la actividad individual tiene máxima importancia y el talento se manifiesta usualmente en época temprana: "Hay ejemplos de ancianos que han hecho en matemáticas una obra útil y hasta genial ; pero son raros y siempre nos llenan de asombro y admiración ". Después de los 30 es muy difícil para un matemático continuar adaptándose a las nuevas ideas ; puede mantener una actividad extremadamente productiva pero usualmente carecerá de una comprensión cabal de la matemática que está siendo creada por colegas de quienes lo separan tres o más décadas. Y cuando se enfrente a un cambio radical que implique el abandono de sus enfoques y jerarquías, seguramente se aferrará a los cánones de su juventud.

Ante la necesidad de mantenerse siempre en la saludable disposición de reconstruir las partes esenciales de su ciencia de acuerdo con los rumbos señalados por su propio desarrollo, Bourbaki ideó una fórmula de eterna juventud. En realidad se trata de la única regla de la corporación y tiene por objeto fijar una edad máxima de 50 años para todos sus miembros.

Fuera de la regla de retiro a los 50 Bourbaki carece de reglas. No existen rangos ni cargos explícitos, ni hay un número fijo de socios ; la "N" de su nombre, interpretada luego como inicial de "Nicolás", indica ese *número indeterminado* . El mismo procedimiento de afiliación de nuevos miembros es informal : Si en el ejercicio de sus funciones docentes algún miembro de Bourbaki detecta en algún joven estudiante el talento y la disposición que se consideran necesarios, este es invitado a las sesiones ordinarias. Allí el "conejillo de indias" es sondeado en forma implacable; la pasividad es sinónimo de fracaso : se espera que exhiba su clase en la comprensión de los problemas y sus bríos en la discusión. Además, y como los viejos fundadores, debe mostrar capacidad para interesarse en todos los temas en discusión. Esta cualidad es imprescindible y puede excluir a matemáticos de gran talla pero con intereses muy especializados.

Los jóvenes que pasan la prueba tendrán luego amplias oportunidades para desquitarse "sacudiéndole la palmera" a sus mayores. Esta expresión hace referencia a una supuesta costumbre de ciertas tribus polinesias que obligan a quien muestra signos de senilidad a subir una palmera que luego es fuertemente sacudida por sus compañeros : si el hombre logra sostenerse puede continuar en la tribu hasta la próxima prueba. Hay que imaginarse la versión bourbakista de esta ruda pero beneficiosa práctica.

Así es Nicolás Bourbaki, el matemático más célebre y peculiar de este siglo. Para un historiador del futuro los testimonios acerca de este personaje serán sin duda desconcertantes : no hay fecha de nacimiento pues nunca nació realmente ; apareció súbitamente a principios del 2° tercio del siglo iniciando casi inmediatamente la publicación de su monumental tratado, permaneciendo siempre joven y animoso. Aunque de origen griego y nacionalidad francesa, reconocía como padre a un alemán. Pero, en verdad, el señor Nicolás Bourbaki jamás existió.

La obra. La empresa que se ha propuesto Bourbaki es tan colosal que solamente un ser extraordinario como él puede intentarla : lograr, basándose en el método axiomático, una exposición completa de la matemática moderna llevando a cabo un desarrollo lógico independiente de sus ordenaciones tradicionales y su desenvolvimiento histórico. Desde un principio era claro que no se trataba de una obra de referencia simplemente bibliográfica como la *Enzyklopadie der Mathematischen Wissenschaften* (Enciclopedia de las Ciencias Matemáticas) iniciada por los alemanes a fines del siglo pasado; esta gigantesca colección de contribuciones de especialistas diversos iba haciéndose anticuada antes de finalizar y los cambios de rumbo acordes con los nuevos desarrollos hacían que, como a la autobiografía de Tristam Shandy, el paso del tiempo la alejará cada vez más de su culminación.

La obra de Bourbaki debía ser, en cambio, una totalidad orgánicamente concentrada alrededor de las ideas matemáticas básicas que se irradian hacia la periferia, una unidad acorde con las tendencias esenciales de la investigación. Debía ser, también a diferencia de la Enciclopedia, una exposición sistemática y equilibrada, incluyendo demostraciones completas, de teorías coherentes con sus consecuentes procedimientos universalmente aplicables. Sobre todo, tenía que ser un *instrumento* dispuesto racionalmente y fácilmente aplicable en las más diversas áreas. Estos objetivos imponían naturalmente una estricta selección : todo lo que no fuese esencial, lo que no condujese a concepciones fundamentales, lo que no tuviese amplias aplicaciones tenía que ser drásticamente amputado. Vastos campos activos, constituidos por resultados dispersos, llenos de ideas audaces y artimañas ingeniosas tenían que ser necesariamente excluidas. Sólo podían quedar entonces las armazones esenciales de aquellas teorías estabilizadas, que por muchos años no han sido escena de descubrimientos sustanciales, teorías a veces muy viejas y que han alcanzado una conformación enteramente racional, cuyos fundamentos se pueden considerar agotados, pero que están localizadas en el centro conceptual de la Matemática y constituyen herramientas eficaces para la investigación. Dieudonné lo ha resumido así : "... si un teorema aparece en Bourbaki debe haber sido demostrado hace 2, 20 ó 200 años". "Bourbaki puede permitirse escribir sólamente sobre teorías muertas" ... "muertas en el momento de escribirlas". El tratado no pretende ser un generador directo de investigación en áreas activas de la matemática aunque es indudablemente un enorme apoyo y una referencia a menudo indispensable para el matemático.

No deseando meramente reunir una colección de monografías especializadas sino integrar un todo orgánico y que mostrase, por así decir, una personalidad bien definida, cada parte tenía que ser discutida colectivamente hasta en sus más mínimos detalles. Con este fin se adoptó un "método" de trabajo que contempla dos o tres reuniones o "congresos" por año. En estas reuniones toda decisión debe tomarse por unanimidad. Allí se seleccionan los temas sobre los que versarán futuros libros. En cada caso se esboza un plan que pasa a manos de un voluntario quien redactará, por su cuenta y riesgo, un primer borrador. El penoso proceso que acaba de iniciarse ha sido relatado por el mismo Bourbaki con palabras de Dieudonné : "Después de uno o dos años, cuando este trabajo ha sido realizado, se presenta ante el Congreso de Bourbaki, donde es leido en voz alta y sin omitir una sola página. Cada demostración es examinada punto por punto y criticada sin piedad. Hay que estar en un Congreso de Bourbaki para darse cuenta de la virulencia de esta crítica y cómo esta sobrepasa con mucha ventaja cualquier ataque exterior. El vocabulario usado no puede repetirse aquí. La cuestión de edad no cuenta para nada. Las edades de los miembros de Bourbaki varían considerablemente" ... "pero, aunque entre dos individuos haya 20 años de diferencia, esto no impide al más joven zarandear al más viejo, quien, en su concepto, no ha entendido nada del asunto. Hay que saber cómo tomarlo, con una sonrisa. En todo caso, la réplica no tarda en llegar, no pudiendo nadie alardear de infalible ante miembros de Bourbaki, y al final todo sale bien a pesar de las muy prolongadas y extremadamente agitadas controversias.

Ciertos extranjeros, invitados como espectadores a sesiones de Bourbaki, salen siempre con la impresión de haber estado en una reunión de locos. No pueden imaginar cómo esta gente, gritando - a veces tres o cuatro al mismo tiempo - acerca de matemáticas pueden alguna vez salir con algo inteligible. Es quizás un misterio pero todo se calma al final. Una vez que la primera versión ha sido hecha pedazos - reducida a la nada - tomamos un segundo colaborador para comenzar todo de nuevo. Este pobre hombre sabe lo que le espera porque, aunque se lance siguiendo las nuevas instrucciones, mientras tanto las ideas del Congreso cambiarán y el año entrante *su* versión será vuelta trizas. Un tercer hombre empezará y así esto seguirá adelante. Podría pensarse que es un proceso sin fin, una recurrencia continua, pero de hecho nos detenemos por razones puramente humanas. Cuando hemos visto el mismo capítulo retornar, seis, siete, ocho o diez veces, todo el mundo está tan hastiado de él que hay una votación unánime para enviarlo a imprenta. Esto no quiere decir que sea perfecto y muy a menudo nos hemos dado cuenta de haber estado equivocados, a pesar de todas las precausiones preliminares, al seguir tal o cual rumbo. De tal modo que resultamos con ideas diferentes en ediciones sucesivas. Pero en verdad la mayor dificultad está en sacar la primera edición.

Es necesario un promedio de 8 a 12 años desde el primer momento en que nos ponemos a trabajar en un capítulo y el momento en que aparece en las librerías. Los que estaban saliendo en 1968 eran los que fueron discutidos por primera vez en 1955."

En estas versiones finales naturalmente se ha perdido todo vestigio individual y resulta prácticamente imposible discernir las contribuciones particulares pudiendo decirse que únicamente muestran la *personalidad* y el *estilo* de Nicolás Bourbaki.

El tratado se llama *Elements de Mathématique* y se divide sucesivamente en partes, libros, capítulos, parágrafos y numerales. La *Primera Parte* se tituló originalmente *Les Structures Fondamentales de l'Analyse*, lo cual recuerda el propósito original de escribir un libro de Análisis. En ediciones posteriores este subtítulo ha sido eliminado no destacándose ya el Análisis frente al Algebra cuyos métodos han invadido exitosamente la matemática contemporánea.

La Primera Parte consta de seis libros, a saber :

Libro I : Teoría de Conjuntos (4 capítulos y un fascículo de resultados).

Libro II : Algebra (9 capítulos).

Libro III : Topología General (10 capítulos y un fascículo de resultados).

Libro IV : Funciones de una variable real (7 capítulos incluyendo un diccionario).

Libro V : Espacios vectoriales Topológicos (5 capítulos incluyendo un diccionario y un fascículo de resultados).

Libro VI : Integración (9 capítulos).

En la *Segunda Parte* los libros aún no están numerados pero han empezado a publicarse los siguientes :

Grupos y Algebras de Lie

Algebra Conmutativa

Teorías Espectrales

Variedades Diferenciales y Analíticas

En total se han publicado unos 36 volúmenes. El primero en aparecer fue el Fascículo de Resultados de la Teoría de Conjuntos (1939), seguido por los Capítulos 1 y 2 del Libro III, Estructuras Topológicas y Estructuras Uniformes, respectivamente (1940).

Acompaña a cada volumen un manual titulado *Manera de usar este tratado*, cuyo párrafo inicial debe tomarse con cierta reserva ; dice así :

"El tratado toma las matemáticas desde su iniciación y trae demostraciones completas. Así pues, su lectura no supone, en principio, ningún conocimiento matemático particular, sino solamente un cierto hábito de razonamiento matemático y una cierta capacidad de abstracción".

Esta afirmación se refiere a los requisitos mínimos considerando únicamente la naturaleza de los enunciados y su escueto encadenamiento lógico, pero en realidad de verdad, para el estudio provechoso de Bourbaki es prácticamente indispensable tener buenas aptitudes para el manejo de relaciones abstractas y una sólida formación matemática.

En el resto del anexo se describen el plan de la obra y algunos detalles técnicos ; mencionemos algunos apartes :

"El modo de exposición es axiomático y abstracto ; se procede más a menudo de lo general a lo particular. La adopción de este método la impone el objetivo principal del tratado que consiste en dar unos fundamentos sólidos a todo el conjunto de las matemáticas modernas. Para esto es indispensable adquirir de entrada un número bastante grande de nociones y de principios generales ".

"La armazón lógica de cada capítulo está constituida por las *definiciones* , los *axiomas* y los *teoremas* de dicho capítulo ; es esto lo que principalmente debe ser retenido con miras a lo que debe venir después. Los resultados menos importantes que pueden ser fácilmente recobrados a partir de los teoremas, figuran con el nombre de "proposiciones", "lemas", "corolarios", "observaciones", etc. ; los que pueden omitirse en una primera lectura aparecen en caracteres pequeños. Bajo el nombre de "escolio" se encontrará algunas veces un comentario sobre un teorema particularmente importante".

"Ciertos pasajes están destinados a prevenir al lector contra errores graves, en los cuales puede incurrir ; estos pasajes están señalados al margen con el signo

" curva peligrosa "

"La terminología adoptada en este tratado ha sido objeto de atención particular. *Se ha hecho un esfuerzo para no apartarse nunca de la terminología usual, salvo por muy serias razones*".

En realidad Bourbaki encontró el lenguaje matemático lleno de ambiguedades y duplicaciones y se propuso racionalizar y simplificar el vocabulario y la notación llegando a sentar un patrón de precisión, claridad y consistencia en la literatura matemática. La verdad es que no ha vacilado en introducir cambios drásticos sin miramiento alguno por venerables tradiciones ; en sus innovaciones recurre en forma erudita a raices griegas, latinas y árabes y también a palabras sugerentes del lenguaje ordinario : morfismo, epimorfismo, entorno, vecindad, multimódulo, monoide, etc. Este esmero por el lenguaje ha dado como resultado un estilo lúcido y preciso, aunque ligeramente seco, que culmina la tradición iniciada por Euclides (*Elementos*) y recogida y perfeccionada por Peano (*Formulario*), Hilbert (*Fundamentos de Geometría*), Landau, (*Fundamentos del Análisis*) y van der Waerden (*Algebra Moderna*).

Con su conocida mordacidad Dieudonné afirma que el estilo de Bourbaki es "un lenguaje reconocible y no una jerga salpicada de abreviaciones, como la de textos anglosajones donde se le habla a uno del C. F. T. C. que está relacionado con un A. L. V. a menos que sea un B. S. F. o un Z. D., etc. Creemos que la tinta es suficientemente barata para escribir todo con un vocabulario bien escogido". Parece, no obstante, que Bourbaki no resistió completamente el contagio, pues en su última edición introduce abreviaturas para sus libros : TG para la Topología General, EVT para los Espacios Vectoriales Topológicos, etc.

Los libros de Bourbaki han sido ampliamente comentados en las publicaciones especializadas como *Mathematical Reviews* donde las primeras reseñas estuvieron a cargo de S. Eilenberg y posteriormente de S. Mc Lane , L. Nachbin, S. Lang, P. R. Halmos y otros. En ciertos casos los juicios no son completamente favorables. Se habla, por ejemplo, de su abstracción "despiadada" y de una "brutal" supresión de todo lo que no es esencial. Sin embargo, en general, se considera que la obra representa un considerable aporte a la matemática contemporánea. En varios casos los libros de Bourbaki han tenido como virtud primordial su misma existencia al presentar por primera vez en forma coherente una teoría antes dispersa y hasta inaccesible ; es el caso de la teoría axiomática de conjuntos, el álgebra multilineal y la topología general.

La selección y ordenación de los temas sorprende a veces. Por ejemplo : para llegar a la definición del número 1 hay que esperar más de 150 páginas del libro I ; la teoría de números ordinales está propuesta en varios ejercicios del mismo libro ; los números reales se estudian después de nueve volúmenes del tratado, aplicando los resultados de Teoría de Conjuntos, Algebra y Topología General (Estructuras Topológicas, Estructuras Uniformes y Grupos Topológicos); las funciones trigonométricas aparecen en capítulo VIII del libro sobre Topología General.

Los ejercicios que siguen a cada capítulo son muy bien escogidos y muchas veces provienen de obras de otros autores, los cuales nunca son citados. Algunos son curiosos como el que plantea una "refutación" del *Ultimo Teorema de Fermat* (Libro I, Cap. II, § 3); otros son bastante difíciles y aparecen señalados con el signo ¶ .

Vale la pena anotar que, en general, no se recomienda usar los libros de Bourbaki como textos para cursos regulares, afirmándose que ni el mismo Bourbaki lo hace.

El tratado incluye algunas *Notas Históricas* las cuales han sido reunidas y publicadas en un volumen titulado *Eléments d'histoire des Mathématiques* escrito, según los editores, por "el más grande matemático contemporaneo". Allí se presenta una visión retrospectiva del desarrollo de la matemática a través de la concepción bourbakista de la matemática moderna. El estilo de estas notas es menos rígido pero, según el mismo Godement, su lectura es "bastante difícil pues el autor no se limita a escribir en francés básico".

También se publican periódicamente las notas del *Seminario Boubarki* el cual se reune dos veces al año, independientemente del *Congreso Bourbaki* y está dedicado a discutir temas avanzados de investigación.

Los fundamentos. Ya en 1948 Bourbaki se pronuncia sobre el problema de los fundamentos de la Matemática en su disertación ante la Association for Symbolic Logic, cuyas palabras introductorias vale la pena reproducir.

"Agradezco mucho a la Asociación de Lógica Simbólica su invitación a pronunciar esta conferencia, honor este que soy consciente de haber hecho muy poco para merecer. Mis esfuerzos durante los últimos años (secundados por los de varios colaboradores jóvenes, cuya devota ayuda ha significado para mí más de lo que puedo expresar) han estado dirigidos totalmente hacia una exposición unificada de todas las ramas básicas de la Matemática basada sobre fundamentos tan sólidos como puede esperarse. He estado trabajando en esto como un matemático práctico ; debo confesar que, en lo relativo a la lógica pura, soy autodidacta, sufriendo las desventajas que esto implica. Y, si hoy, después de mucho cavilar, estoy hablando aquí, lo estoy haciendo para gozar del beneficio de su consejo y crítica profesional . . ."

Menciona enseguida los aspectos metafísicos y sicológicos relacionados con la función de la lógica en el pensamiento matemático y lo indispensable de ella en el establecimiento de los cimientos de la Matemática. La unión de Lógica y Matemática es indisoluble pudiendo observarse que en cualquier desarrollo reducible a términos lógicos un análisis más detenido encuentra siempre un esquema matemático. Muchos de estos desarrollos se aplican, como en la física, a diversos aspectos de la realidad, observándose frecuentemente una estrecha conexión entre el mundo experimental y las estructuras matemáticas.

Tanto en esta ocasión como en su artículo sobre la arquitectura de las Matemáticas Bourbaki se pregunta "¿ poe qué una cierta dosis de razonamiento lógico es ocasionalmente útil en la vida práctica ? ¿por qué algunas de las más intrincadas teorías matemáticas han llegado a ser herramientas indispensables para el físico moderno, para el ingeniero y para el constructor de bombas atómicas?" Estas preguntas pueden precisarse : ¿Por qué los desarrollos teóricos de los griegos sobre las secciones cónicas fueron los que 1500 años después necesitarían Kepler y Galileo para formular las leyes del movimiento de planetas y proyectiles ? ¿Por qué las inquietudes sobre el estatus lógico del postulado de las paralelas y el subsecuente desarrollo de geometrías no euclideas debía proporcionar el marco adecuado para la teoría de la gravitación de Eistein ? ¿Por qué la teoría de grupos surgida en el mismo seno de la Matemática pura del siglo XIX encajaría luego en el análisis de la simetría de la naturaleza en el ámbito de las partículas elementales ?¿Por qué el análisis tensorial resultó más tarde ser el lenguaje natural de la teoría de la relatividad ?¿Por qué los espacios de Hilbert proporcionaron el contexto apropiado para representar entidades esenciales de la mecánica cuántica ? El análisis profundo del mundo real ha desembocado en aplicaciones de ramas de la matemática no concebidas en modo alguno con esas miras, insinuando insistentemente la existencia de lazos recónditos cuyas razones ignoramos y, según Bourbaki, "quizás ignoremos siempre". Ante esta problemática la actitud de Bourbaki es explícita : "No trataremos de examinar las relaciones de las Matemáticas con lo real o con las grandes categorías del pensamiento. Es en el interior de la Matemática donde permaneceremos y buscaremos mediante el análisis de su actividad propia, una respuesta al problema que nos hemos planteado ".

La conferencia ante la Asociación de Lógica Simbólica en 1948 constituyó un anticipo de la *Descripción de la Matemática Formal,* Capítulo 1 del Libro I (50 páginas), que junto con el Capítulo 2, *Teoría de conjuntos,* fue el 17º tomo publicado y apareció en 1954. En la Descripción el tema de los fundamentos se abre con una declaración escueta : "Desde los griegos, quien dice Matemática dice demostración". Aunque la matemática no se reduce a las demostraciones , resulta inaudito pretender que se hace Matemática si nó se hacen demostraciones. Para Bourbaki, "la lógica, hasta donde nos importa a nosotros los matemáticos, no es ni más, ni menos, que la gramática del lenguaje que usamos, un lenguaje que debe existir antes de que pueda constituirse aquella" de la misma manera que "el arte del bien hablar antecede a la gramática ".

En la historia de la matemática puede observarse una evolución que tiene como base un cuerpo inicial de desarrollos matemáticos, vale decir, textos demostrativos. El análisis de estos textos desde el punto de vista del vocabulario y de la sintaxis muestra la posibilidad de efectuar la redacción en un lenguaje técnico que solo incluya unos pocos términos fijos y unas reglas explícitas e invariables a semejanza de lo que sucede, por ejemplo, en el juego de ajedrez con la notación usual. Un texto así redactado se llama un texto "formalizado" y en él, la legitimidad de una deducción significa aplicación correcta de las reglas. Sin embargo, la escritura explícita de un texto formalizado es, en general, imposible debido a la enorme longitud de las fórmulas, resultando por lo tanto necesario detenerse en un punto donde se vislumbre claramente la posibilidad de una formalización total, donde el olfato del matemático le indique que la obtención de la versión formalizada es solo una labor de rutina. Esta *técnica de redactar desarrollos formalizables* no es otra cosa que el *Método Axiomático*, practicado mucho tiempo antes de la introducción de los lenguajes formales. Siguiendo este método, dice Bourbaki "y conservando siempre presente, como una especie de horizonte, la posibilidad de una formalización total, nuestro Tratado se orienta hacia un rigor perfecto".

Para lograr una explicación sistemática del método axiomático hay que estudiar los principios generales que rigen los lenguajes formales. Teniendo en cuenta que toda la matemática actual, con algunas excepciones recientes como ciertos desarrollos de la Teoría de Categorías, puede formularse dentro de la teoría de conjuntos, Bourbaki se propone, en el capítulo inaugural de su obra, describir un lenguaje formal adecuado para redactar esa teoría.

Los signos empleados en esta descripción son de tres tipos :

1) los *signos lógicos* $\square$ τ, $\vee$, $\neg$

2) las *letras* y

3) los *signos específicos* $=$, $\in$.

Una *fórmula* es sencillamente una disposición lineal de signos ; hay reglas de formación que permiten reconocer ciertas fórmulas como *términos* (son las que, intuitivamente, representan los objetos, es decir, los conjuntos) y otras como *relaciones* (afirmaciones acerca de los objetos). Se introduce con precisión la noción relación *verdadera* o *teorema* y se describen los métodos de demostración basados en los axiomas lógicos. Posteriormente se introducen los cuantificadores, la igualdad y se inicia el desarrollo de la Teoría de Conjuntos con base en cuatro axiomas explícitos, a saber : *de extensión, del conjunto con dos elementos, del conjunto de partes de un conjunto* y *del infinito*, además de un esquema *(de selección y reunión)*, esto es, un "molde" que permite escribir un tipo determinado de relaciones, todas las cuales se toman como axiomas.

Si $R\{x\}$ es una relación para la cual *existe* un conjunto A formado precisamente por aquellos objetos x que satisfacen la condición expresada por R, se dice que R es *colectivizante* en x. Puede comprobarse que en esta teoría de conjuntos la paradoja de Russell no puede plantearse pues la relación $x \notin x$ *no* es colectivizante en x ; análogamente se evitan las paradojas relacionadas con esta.

Para dar una idea aproximada de la apariencia de los textos formalizados mencionemos que, por ejemplo, la afirmación (relación): *En la colección* C *hay por* *lo menos un conjunto no vacío* " o, en forma simbólica abreviada :

$$(\exists X \in C)(X \neq \phi).$$

tiene la siguiente escritura explícita :

$$\neg \vee \neg \in \tau \neg \vee \neg \in \square \quad C = \square\, \tau \neg \neg \neg \in \tau \neg \neg \in \square \square \square\, C$$

$$= \tau \neg \vee \neg \in \square \quad C = \square\, \tau \neg \neg \neg \in \tau \neg \neg \in \square \square \square$$

$$\tau \neg \neg \neg \in \tau \neg \neg \in \square \square \square$$

En particular, ϕ , el conjunto vacío, es el término

$$\tau \neg \neg \neg \in \tau \neg \neg \in \square \square \square$$

el cual se abrevia en la forma $\tau_X ((\forall x)(x \notin X))$. Intuitivamente : un objeto X que no contiene elemento alguno.

Por último, el número 1 , definido como el cardinal de $\{\phi\}$, es el término abreviado por la fórmula

$$\tau_Z (E_q (\{\phi\}, Z)).$$

(intuitivamente : un conjunto "privilegiado" entre todos aquellos que son equipotentes con $\{\phi\}$). Si se eliminan algunas de las abreviaciones resulta la fórmula

$$\tau_Z((\exists u)(\exists U)(u = (U, \{\emptyset\}, Z) \text{ et } U \in \{\emptyset\} \times Z \text{ et}$$

$$(\forall x)((x \in \{\emptyset\}) \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in U \text{ et}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall y')(((x, y) \in U \text{ et } (x, y') \in U \Rightarrow (y = y') \text{ et}$$

$$(\forall y)((y \in Z) \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in U))))).$$

y si se deseara finalmente formalizar completamente esta escritura usando únicamente los signos τ, $\vee$, $\neg$, $\square$, $=$ y $\in$ sería necesario escribirlos varias decenas de miles de veces.

Estos ejemplos indican la enorme longitud que tendrían aún las más sencillas demostraciones formalizadas, lo cual obliga a introducir muchos *signos abreviadores* y enunciar reglas adicionales llamadas *criterios deductivos*. Aparece así una suprateoría, la Metamatemática, que considera como objeto de estudio las mismas palabras o frases de los textos formalizados haciendo abstracción completa de todo posible significado atribuible a esos textos, mirando únicamente la disposición relativa de signos bien determinados y en número finito. Se logra entonces una una visión de la Matemática formal como un juego de ajedrez cuyas piezas son signos gráficos y donde los "razonamientos" se desarrollan sin necesidad de comprender ni una sola palabra de lo que se dice siguiendo sólo las reglas del juego. "Hemos aprendido", dice A. Weil "a fundar toda nuestra ciencia en una fuente única, compuesta solamente de algunos signos y de algunas reglas para el manejo de estos signos ; reducto inexpugnable en el cual no podemos encerrarnos sin padecer hambre, pero al cual siempre podremos replegarnos en caso de incertidumbre o peligro exterior ". Bourbaki da cuenta así del problema de los fundamentos de la Matemática, sin apelar a "más nociones e hipótesis metafísicas que el ajedrez, por ejemplo", y aseverando en forma que no por ser autorizada deja de parecer jactanciosa que "sobre estos fundamentos puedo edificar la totalidad de la Matemática de hoy día ; y, si hay algo original en mi procedimiento, ello radica únicamente en el hecho de que en lugar de contentarme con tal afirmación, yo procedo a demostrarla en la misma forma en que Diógenes demostraba la existencia del movimiento ; y mi comprobación se hará más y más completa a medida que mi tratado crece".

Es conveniente señalar que, aunque empleó varios años redactando cuidadosamente el primer capítulo de su obra, Bourbaki reconoce que su lectura no facilita especialmente la comprensión y no es modo necesario para el estudio del resto del tratado, pues su propósito es únicamente proporcionar una fundamentación lógica de la Matemática existente y, en particular, una justificación de los procedimientos deductivos usados ordinariamente por los matemáticos. El análisis de la estructura de estos procedimientos reposa sobre un volumen significativo de desarrollos matemáticos previos y no puede esperarse que su contemplación habilite para el trabajo matemático si no se cuenta con una vasta experiencia en situaciones matemáticas específicas o con una intuición muy desarrollada en estos campos.

. En medio de los esfuerzos de fundamentación y, en particular, en el origen de los lenguajes formalizados se encuentra *la cuestión de no contradicción.* Condición indispensable si se quiere distinguir entre *verdadero* y *falso* pero que no es en modo alguno una especie de don de Dios concedido de una vez por todas a la Matemática. A través del tiempo han, efectivamente, aparecido contradicciones como las paradojas griegas sobre las magnitudes inconmensurables, las confusas nociones en los orígenes del cálculo infinitesimal, las antinomias de la teoría de conjuntos. La ausencia de contradicción se perfila no como un principio metafísico sino más bien como una meta por alcanzar y como un hecho empírico que se afianza progresivamente con el mismo desarrollo de las teorías. El método axiomático y la formalización al señalar claramente la procedencia de cada proposición, formulando explícitamente las definiciones y las reglas de procedimiento deductivo, permiten aislar una contradicción eventual para luego rastrearla lasta sus mismas fuentes donde pueda ser eliminada con los métodos menos traumáticos para las otras secciones de la matemática.

Aunque los penetrantes estudios de los lógicos y matemáticos modernos como Gödel y Cohen hacen cada vez menos plausible la existencia de gérmenes de contradicción en el seno de la Matemática actual, es siempre posible que estos subsistan. Por esta razón Bourbaki no pretende "legislar para toda la eternidad" admitiendo la posibilidad de adoptar en un futuro las modificaciones necesarias no solo para preservar el cuerpo actual de la Matemática sino para abarcar nociones y formas de inferencia no formalizables en el actual lenguaje. Pero esto "es al porvenir a quien le corresponde decidirlo".

Antes de cerrar su lúcida introducción al primer libro de su tratado Bourbaki consideró necesario hacer una verdadera profesión de fé : " . . . creemos", dice, "que la Matemática está destinada a sobrevivir y que jamás se verán las partes esenciales de este majestuoso edificio hundirse a causa de una contradicción surgida de repente ; pero no pretendemos que esta opinión repose sobre algo diferente a la experiencia. Es poco, dirán algunos. Más he aquí que desde hace 25 siglos los matemáticos se han habituado a corregir sus errores y a ver su ciencia enriquecida, no empobrecida ; esto les concede el derecho de contemplar el porvenir con serenidad ''.

Los matemáticos, las personas que hacen matemáticas, sienten en general que su actividad es significativa y que no está seriamente amenazada por las dificultades encontradas al tratar de formalizarla.

En este sentido Dieudonné ha declarado que : '' ... creemos en la realidad de la matemática pero, por supuesto, cuando los filósofos nos acosan con sus paradojas corremos a ampararnos tras el formalismo y decimos : << La matemática no es más que una combinación de símbolos carentes de significado >>, y esgrimimos entonces los Capítulos 1 y 2 de la Teoría de Conjuntos. Finalmente se nos deja en paz para volver a nuestras matemáticas y proceder, como siempre lo hemos hecho, con la impresión, que tiene todo matemático, de estar trabajando con real. Esta sensación es posiblemente ilusoria pero es muy conveniente. Esa es la actitud de Bourbaki hacia los fundamentos ''.

Las estructuras. Ante la proliferación exhuberante que amenaza convertir la Matemática en un sinnúmero de agrupaciones cada vez más dispersas de eruditos agobiados por el estudio de una cantidad asfixiante de desarrollos particulares, Bourbaki plantea una vez más la pregunta sobre la unidad de la Matemática; ''¿ Hay hoy una matemática o varias matemáticas ? ''. La supervivencia de esta ciencia requiere mantener su cohesión e impone por lo tanto la búsqueda de principios unificadores ; se ha pretendido hallar un tal principio característico en el empleo del *razonamiento deductivo*. Este punto de vista fija la atención en un solo aspecto, a saber, el lenguaje, en cuanto medio de comunicación empleado por las matemáticas ; equivale, según Bourbaki, a tratar de, por ejemplo, "reunir en una ciencia única la Física y la Biología bajo el pretexto de que ambas aplican el método experimental ". En contraposición Bourbaki opina que si hay principios unificadores es preciso buscarlos mediante un análisis sistemático de las relaciones existentes entre las diversas teorías centrales de la Matemática conocida.

Ya Hilbert observaba muy perspicazmente que en Matemática los progresos significativos se basan en grandes ideas simplificadoras cuyas trascendencia resulta proporcional a la extensión de las áreas que tornan inservibles,cuya importancia se mide por la cantidad de desarrollos anteriores que esas ideas condenan inexorablemente a la desaparición. Pero desde Peano y Dedekind, y el mismo Hilbert, se sabe que el Método Axiomático permite desarrollar de una sola vez grandes sectores de la Matemática en forma lógica y comprensible partiendo de un pequeño número de hipótesis bien escogidas. Se buscan los rasgos comunes ocultos bajo el aparato exterior propio de las teorías matemáticas particulares disociando en cada demostración los principales resortes del razonamiento para determinar las propiedades de los objetos absolutamente necesarias para llevar a cabo los encadenamientos lógicos del caso. Estos ingredientes se estudian luego aisladamente erigiéndolos en principios abstractos y analizando sus consecuencias lógicas para luego recombinar los caracteres esenciales que permiten realizar las demostraciones deseadas

De esta manera no es necesario especificar la *naturaleza* de los entes sometidos a consideración sino únicamente las *relaciones* existentes entre ellos y las *propiedades* requeridas para desarrollar la teoría y que constituyen las *axiomas* o puntos de partida de las deducciones. Una vez desarrollada la teoría, sus resultados serán aplicables a *cualquier sistema* de entes que, con las definiciones adecuadas, satisfaga los axiomas. Se hace así innecesario repetir los razonamientos en los diversos contextos particulares lográndose una efectiva "economía de pensamiento".

Este salto que permite pasar de múltiples teorías individuales a una sola teoría unificadora conlleva forzosamente un incremento en el nivel de abstracción con el esfuerzo mental concomitante ; según los bourbakistas, estas no son sin embargo dificultades que se sumen progresivamente hasta exeder la capacidad humana pues en realidad la distinción entre concreto y abstracto, lejos de ser absoluta, depende de los individuos y de las épocas. La naturaleza de los sistemas numéricos y las manipulaciones algebraicas corrientes, por ejemplo, entrañan un considerable grado de abstracción pero en estos tiempos y en determinado nivel de instrucción matemática, constituyen nociones usuales a los cuales se recurre cuando se desea mostrar ejemplos "concretos" de entidades más generales. Un matemático llamará "abstractas" aquellas ideas que le son nuevas y que no hacen aún parte del ámbito ordinario de su pensamiento ; entes con los cuales no está familiarizada su intuición y que le intimidan al no poder ver su posible comportamiento. Pero estas mismas situaciones serán sin duda lugares comunes para las generaciones subsiguientes.

En esta búsqueda de grandes principios unificadores que diesen un sentido a los abundantes desarrollos logrados entre 1920 y 1940, las ideas de Cantor y de Hilbert trajeron una nueva concepción del pensamiento matemático señalando como meta la axiomatización sistemática de toda la ciencia matemática. En el seno de esta nueva concepción fué surgiendo en forma natural la noción de *estructura matemática*.

Bourbaki dedica su artículo "La arquitectura de las Matemáticas" publicado en 1948, a describir en forma particularmente lúcida la idea de *estructura* y su importancia en el desarrollo de la Matemática. De acuerdo con esta exposición, una estructura se define sobre conjuntos abstractos, esto es, conjuntos de elementos de naturaleza no especificada, postulando la existencia de una o varias relaciones que satisfacen ciertas condiciones. Estas condiciones son las *axiomas de la estructura*. Aunque, lógicamente hablando, la selección de las relaciones y los axiomas es arbitraria, hay en realidad factores adicionales que limitan dicha libertad. Se desea desarrollar teorías de importancia dentro de la Matemática y no entidades patológicas desprovistas de contenido y resultantes de una explotación exagerada del método axiomático. Aunque las estructuras no están dadas de una vez por todas y no existen reglas que determinen su constitución y su número, es claro que la selección de sistemas axiomáticos sustanciales sólo puede provenir de una "profunda comprensión de las teorías existentes o de una súbita e inesperada intuición".

Las "estructuras madres" o grandes tipos de estructuras matemáticas delineadas por Bourbaki parecen confirmar la penetrante máxima aristotélica según la cual *el análisis adopta un orden inverso al de la génesis*. Recientes investigaciones encabezadas por Jean Piaget y sus colaboradores en el campo de la sicología de la inteligencia y la epistemología genética parecen confirmar una asombrosa coincidencia entre las grandes familias de estructuras de los Bourbaki y las coordinaciones generales presentes en la conformación de la inteligencia desde sus estados iniciales. Efectivamente, las funciones lógico-matemáticas del niño permiten distinguir tres categorías : 1º) las coordinaciones referentes a acciones u operaciones concretas que involucran reversibilidad, sucesión de dos o más acciones y captación de invariantes ; 2º) las referentes a seriaciones, registros sucesivos y correspondencias seriales, y 3º) las referentes a continuidad y separación, interioridad y exterioridad, continuidad y discontinuidad. Se trata aquí de intuiciones concretas y particulares que, aunque rudimentarias, conservan un marcado parentezco con las estructuras abstractas y generales analizadas por Bourbaki. En efecto, la clasificación bourbakista distingue los siguientes tres tipos de estructuras :

1º) Las *estructuras algebraicas* en donde las relaciones son *operaciones* o *leyes de composición* que a uno, dos o más elementos de un conjunto le hacen corresponder otro elemento bien determinado. Las axiomas expresan en este caso propiedades de las operaciones como asociatividad y conmutatividad. Un prototipo de estructura algebraica simple es la estructura de *grupo*, determinada por una sola operación asociativa, y con respecto a la cual cada elemento del conjunto tiene un inverso.

2º) Las *estructuras ordinales o estructuras de orden* definidas por medio de relaciones transitivas. Un ejemplo básico lo constituyen los conjuntos *parcialmente ordenados* cuya estructura está determinada por relaciones transitivas, reflexivas y antisimétricas.

3º) Las *estructuras topológicas* en las cuales las relaciones introducen sistemas de vecindades, entornos y métricas que permiten discutir nociones de proximidad, límite y continuidad La estructura fundamental es en este caso la de *espacio topológico*

En cada una de estas grandes categorías de estructuras los especimenes más simples definidos con el menor número de axiomas irradian toda una jerarquía de estructuras progresivamente más complejas y particulares obtenidas agregando axiomas suplementarios que llevan consigo sus respectivas consecuencias lógicas. Aparecen así los grupos abelianos, los espacios vectoriales de dimensión finita, los conjuntos bien ordenados, los espacios topológicos compactos, etc. Hay también también procedimientos canónicos para generar estructuras análogas a partir de otras dadas apareciendo *subestructuras*, *estructuras producto* y *cocientes* de estructuras.

Por otra parte, estructuras diversas pueden coexistir armoniosamente sobre bases comunes dando origen a *estructuras múltiples* que se obtienen definiendo sobre un mismo conjunto una o más estructuras simples ligadas por axiomas de compatibilidad como los anillos, los cuerpos ordenados y los grupos topológicos. También es posible que la teoría de una estructura acuda en apoyo de la teoría de otra diferente mediante la definición de *estructuras subordinadas*. Es el caso de los grupos asociados a los espacios topológicos en la topología algebraica y las topologías sobre conjuntos de ideales usadas para representar ciertos anillos.

La identificación de esta jerarquía de estructuras omnipresentes en la Matemática fue la labor que abocó Bourbaki desde un principio. Ello implicaba la selec-

ción de algunos temas y por lo tanto el rechazo de otros, además de su reordenación según cánones enteramente racionales que, naturalmente, no siempre coincidían con el orden existente. Bajo la concepción axiomática, según Dieudonné, "
"las antiguas divisiones en Algebra, Aritmética, Geometría, Análisis resultaban anticuadas ; no las respetamos, abandonándolas desde un comienzo, para indignación de muchos. Por ejemplo, es bien sabido que la Geometría Euclidea es un caso particular de la teoría de los operadores hermitianos en espacios de Hilbert. Yo comparo las viejas divisiones de la Matemática con las divisiones de los antiguos zoólogos quienes, viendo que un delfín y un tiburón o un atún eran animales similares, decían : estos son peces pues todos ellos viven en el mar y tienen apariencia semejante. Les tomó mucho tiempo darse cuenta de que las estructuras de estos animales no eran análogas en modo alguno. . . Algebra, Aritmética Geometría y todos esos disparates se comparan fácilmente con esto "

La idea de Bourbaki es que las estructuras se constituyan en herramientas para el matemático : si al analizar un sistema matemático particular se vislumbran de repente los perfiles característicos de una determinada estructura, o combinación orgánica de varias, todo un panorama caótico puede despejarse volviendose más coherente y accesible. Procediendo a separar los diversos aspectos específicos para reagruparlos alrededor de un pequeño número de nociones esenciales, esto es, clasificando los diversos constituyentes de acuerdo con las estructuras a que pertenecen, puede aplicarse toda la potencia de la maquinaria almacenada en el estudio de los grandes tipos de estructuras ; es, puede decirse, el principio Tayloriano de racionalización del trabajo aplicado a las Matemáticas. Este simil no indica sin embargo que el trabajo matemático tienda a desechar la creatividad tornándose rutinario y estéril : la intuición del matemático debe entrar a operar en estos nuevos mundos abstractos y continuará brillando en la génesis de los descubrimientos más importantes.

El advenimiento del estudio de las estructuras no marca en modo alguno la culminación de la evolución de la matemática. Su misma tendencia hacia la síntesis ha conducido a construcciones muy cargadas de significado en multitud de campos, cuya comprensión y manejo empieza a presentar dificultades. Las ideas simplificadoras parecen provenir esta vez de la Teoría de Categorías introducida en 1940 porEilenberg y Mc. Lane y en donde, con un nuevo paso hacia la abstracción, se consideran clases completas de conjuntos provistos de estructuras homólogas junto con las funciones compatibles correspondientes. Se estudian las propiedades algebraicas de estos supersistemas entre los cuales pueden definirse a su vez funciones compatibles o *functores* , liberando los desarrollos de consideraciones sobre la constitución interna de los conjuntos y logrando precisar nociones antes vagas como la de *transformación natural y el principio de dualidad*. En años recientes esta teoría ha adquirido gran autonomía dejando sentir su influencia en sectores centrales de la Matemática incluyendo la obra de Bourbaki quien ya estudia detenidamente la incorporación de los aspectos más útiles presentes en este nuevo enfoque. Por lo pronto será necesario modificar la teoría de conjuntos para dar lugar a la consideración de entidades como la categoría de todos los grupos o de todos los espacios topológicos. Esto puede lograrse substituyendo el axioma del infinito por uno más fuerte que garantice la existencia de "universos" (conjuntos estables bajo las operaciones elementales entre conjuntos) arbitrariamente grandes. De acuerdo con la actitud de Bourbaki, será necesario vigilar esta modificación estando siempre en disposición de abandonarla en el momento que se descubra que conduce a alguna contradicción.

Una palabra sobre la repercusión de estos enfoques en la enseñanza y cultivo de la matemática: ante los nuevos rumbos que progresivamente toma esta ciencia y sus consecuentes reorganizaciones internas es conveniente observar que si bien todo docente debe poseer una visión global de su disciplina y tener ideas acertadas acerca de sus tendencias y problemas actuales, no debe entenderse que las ordenaciones estrictamente lógicas señalen el mejor camino a seguir en la enseñanza. Y en cuanto a la actividad matemática cotidiana, esta continua siendo, en la gran mayoría de los casos, un paciente avance a través de una maraña de conocimientos técnicos y corazonadas, razonamientos y analogías, en busca siempre de hechos y relaciones significativas que finalmente aparecen bajo la forma de definiciones, teoremas y demostraciones. Tanto el aprendizaje como el trabajo matemático involucran entonces otros aspectos que no pueden ser eliminados sin riesgo de causar daños irreparables en el desarrollo de la matemática.

Volviendo a Bourbaki, digamos que con su labor de sistematización y unificación y su concepción total de la Matemática, plasmadas en el tratado cuya redacción prosigue sin descuidar las revisiones y los ajustes señalados por las corrientes que poco a poco se van estabilizando, ha establecido directrices globales en las normas de construcción de la Matemática que parecen destinadas a regir durante bastante tiempo. Se trata en realidad de una nueva "arquitectura" de las Matemáticas repensada por Bourbaki y según la cual la vida interna de esta ciencia semeja la de una ciudad "cuyos suburbios no cesan de desarrollarse en forma un poco caótica, sobre el terreno circundante, mientras el centro se reconstruye periódicamente, siguiendo un plan cada vez más claro y una disposición cada vez más majestuosa derribando los barrios viejos y sus laberintos de callejuelas para lanzar, hacia la periferia avenidas cada vez más directas amplias y cómodas''

* * *