Boletín de Matemáticas
Vol. IX, Nº 2, págs. 65-89

¿ SON LA LOGICA Y LA MATEMATICA IDENTICAS ? (*)

LEON HENKIN

Hace ya 24 años que, como estudiante nuevo, entré a la Universidad de Columbia y descubrí el campo de la lógica. Recuerdo bien la circunstancia particular que me condujo a este descubrimiento.

Un día estaba hojeando libros en la biblioteca y me topé con un pequeño volumen de Bertrand Russell titulado *Misticismo y Lógica*. En esa época, con escasamente 16 años, me consideraba a mi mismo como una especie de místico. Como muchos jóvenes de esa edad estaba lleno de nuevas emociones fuertemente sentidas. Era natural que ellas ocuparan considerablemente cualquier atención reflexiva y que estas preocupaciones comunicaran cierto matiz y mordacidad a la experiencia, hallando un reflejo afín en los escritos de autores con inclinaciones místicas.

Habiendo oido decir que Russell era un lógico inferí del título de esa obra que su propósito era contrastar el misticismo con la lógica con el objeto de realzar la última a expensas del primero, y yo estaba decidido a leer el ensayo con la intención de refutarlo. Pero descubrí algo bastante diferente de lo que había

(*) Esta es una traducción del artículo "Are Logic and Mathematics identical? " el cual es una adaptación de la conferencia dictada por el autor en el 5º Congreso Canadiense de Matemáticas en Septiembre de 1961. Dicho artículo se publicó originalmente en la revista "Science" vol. 138, Nº 3541 pág. 788 a 794. Copyright 1962. N. del E.

imaginado. En efecto, si bien Russell delineaba aspectos contrastantes del misticismo y la lógica, su tesis era que cada uno tenía un papel propio y muy importante en la totalidad de la experiencia humana y su interés consistía en definirlos y mostrar su interdependencia en lugar de optar por uno como superior al otro. Me encontré desarmado y encantado con el estilo brillante y persuasivo de Russell y empecé a leer ávidamente sus otros trabajos y pronto capté los conceptos lógicos que han continuado ocupando desde entonces mi atención, por lo menos en parte.

Bertrand Russell era un excelente divulgador de ideas tanto abstractas como concretas. Gran número de personas han logrado una introducción a la lógica matemática a través de sus escritos y algunos han llegado incluso al punto de asomarse a los formidables *Principia Mathematica* escritos en colaboración con Alfred Whitehead alrededor de 1910. Se recordará, por lo tanto, la pasmosa aseveración que escandalizó al mundo matemático de ese tiempo, a saber, que toda la matemática no era otra cosa que lógica. Los matemáticos en general quedaron perplejos con esta tesis radical. En realidad, muy pocos entendían del todo lo que Russell quería decir. Sinembargo se oponían vehementemente a la idea.

Esto se comprende fácilmente si se recuerda que una tesis compañera de la de Russell afirmaba que la lógica es puramente tautológica y que, en realidad, carece de contenido alguno. Los matemáticos, adictos a sumar 2 y 2, rápidamente infirieron que lo que Russell quería decir era que todas las proposiciones matemáticas están completamente desprovistas de contenido; y desde este punto era algo simple pasar a suponer que se estaba afirmando que toda la matemática carecía enteramente de valor. ¡Aux armes, citoyens du monde mathématique! (¡A las armas, ciudadanos del mundo matemático!).

Ha pasado medio siglo desde esta desgraciada interpretación de la irritante afirmación de Russell(*) Estos 50 años han presenciado un aumento en intensidad y amplitud en la investigación en lógica Por eso me parece apropiado buscar una revaluación de la tesis de Russell a la luz de los desarrollos ulteriores

Definiciones y demostraciones.

Con el fin de explicar cómo llegó Russell a la visión según la cual toda la matemática es sólo lógica, es necesario retroceder y discutir dos complejos de ideas que se habían desarrollado durante décadas antes de que Russell arribara a este campo. El primero era la reducción sistemática de todos los conceptos matemáticos a sólo un pequeño número de ellos. Este proceso de reducción había en realidad estado adelantándose por mucho tiempo Tan temprano como en los días de Descartes , por ejemplo, puede notarse por lo menos una reducción imperfecta de las nociones geométricas a las algebraicas. Posteriormente, con el desarrollo de la teoría de conjuntos iniciada por Cantor, la reducción del sistema de los números reales al de los números naturales marcó un gran paso en este proceso Pero quizás el más osado de estos esfuerzos, el punto culminante, fue el intento del matemático alemán Gotlob Frege para analizar aún más la noción de número natural reduciéndola a un concepto considerado por él como de naturaleza puramente lógica

La obra de Frege pasó casi enteramente desapercibida en su tiempo (las tres últimas décadas del siglo XIX) pero cuando Bertrand Russell se enteró de los trabajos de Frege captó su gran significación dando a estas ideas amplia circulación a través de su propio y brillante estilo de exposición. Los postreros elemen-

(*) Esta conferencia fue dictada en Septiembre de 1961 . N. del E.

tos en cuyos términos la noción de número natural fue analizada por Frege y Russell eran entidades que ellos llamaron "funciones proposicionales". Hasta nuestros días persisten controversias entre filósofos en cuanto a qué son realmente estos objetos los cuales, en todo caso, están ligados con ciertas expresiones lingüísticas que parecen proposiciones con la diferencia de que contienen variables. Así como, por ejemplo, hay una cierta *proposición* asociada con (o expresada por) la frase " U Thant es un astronauta", también hay una *función proposicional* asociada con la expresión "x es un astronauta". Debido a que las proposiciones habían sido reconocidas desde tiempo atrás como constituyentes de una de las mas basicas porciones del dominio de investigación de los lógicos y como las funciones proposicionales estaban estrechamente relacionadas con las proposiciones era natural considerar que estas también eran una parte natural del dominio de la lógica. Es en este sentido que parecía posible para Frege, partiendo de nociones puramente lógicas, llegar, a través de una serie de definiciones, a la noción de número, así como a otras nociones objeto de estudio en varios sectores de las matemáticas.

La segunda linea importante de desarrollo que precedió a Russell, y de la cual extrajo sus ideas, fue el estudio sistematico, por medios matemáticos, de las leyes lógicas que intervienen en las demostraciones matemáticas. Estos desarrollos fueron iniciados por George Boole, en Inglaterra a mediados del siglo XIX, quien descubrió que ciertas leyes bien conocidas de la lógica podían formularse con ayuda de símbolos algebraicos como el signo *más*, el signo *por*, el signo *igual* y de variables. Boole usó, por ejemplo, la ecuación corriente $P \cdot Q = Q \cdot P$ para expresar el hecho de que frases de la forma "P y Q" y "Q y P" deben ser ambas verdaderas o ambas falsas (cualesquiera sean las frases P y Q), mientras que la ecuación $-(P \cdot Q) = (-P) + (-Q)$, poco familiar en general, indica que la afirmación " Es falso que P y Q sean (ambas) ciertas" tiene el mismo valor de verdad que " O bien P es falsa o bien Q es falsa". Boole demostró que por medio del uso de tal notación algebraica puede lograrse un gran ahorro del esfuerzo necesario para confrontar y aplicar leyes básicas de la lógica. Más tarde sus trabajos fueron ampliados y ahondados por el norteamericano C. S Pierce y por el matemático aleman E. Schroder. El mismo Russell, trabajando en esta línea, encontró en ella una base conveniente para un desarrollo sistemático de toda la matemática a partir de la lógica. Combinando la formulación simbólica de leyes lógicas con la reducción de conceptos matemáticos a un núcleo lógico, llegó a concebir un desarrollo unificado como el pretendido en los *Principia Mathematica*.

De Russell a Gödel

¿Cómo eran los *Principia*? De hecho, el trabajo aún no está completo (solamente han aparecido tres de los cuatro volúmenes proyectados), y como en los últimos tiempos Bertrand Russell parece ocuparse de los efectos políticos de ciertas investigaciones físicas la obra ¡quizás no sea completada nunca! (*) Sin embargo es posible ver claramente el alcance que se intentó dar a ese trabajo el cual recuerda sorprendentemente la actual empresa masiva del grupo de Bourbaki en Francia. Porque, aunque los *Principia* y Bourbaki son muy disímiles en muchos aspectos, ambos se proponen presentar una relación enciclopédica de la investigación matemática contemporánea unificada desde un punto de vista coherente.

(*) Bertrand Russell murió en 1970. La obra no fue completada. N. del E.

En los *Principia* se parte de ciertos axiomas expresados en forma simbólica los cuales se suponía expresaban leyes básicas de la lógica (eran axiomas que únicamente contenían lo que Russell concebía como nociones lógicas); luego la obra procede sistemáticamente a derivar las otras leyes de la lógica, introducir, por medio de definiciones, nociones tales como el concepto de número y el espacio geométrico y, finalmente, exponer los principales teoremas concernientes a estos conceptos dentro de un desarrollo sistemático y uniforme.

Mirando retrospectivamente el lógico contemporáneo se pasma ante la anuencia de Russell y Whitehead a basar su caso en lo que, para un matemático, debe considerarse como una evidencia muy endeble. Es claro que el mundo de la ciencia empírica aspira a lograr la certeza con base en la evidencia empírica, pero la quinta esencia en el enfoque del matemático, y en especial del lógico matemático, es la demanda constante de una *demostración* antes de aceptar una tesis. Sin embargo, se ve que, aunque Russell estaba interesado en sentar que, en cierto sentido, toda la matemática podía obtenerse a partir de sus axiomas y conceptos lógicos, ¡ nunca se propuso dar una demostración de este hecho ! Todo lo que hizo fue juntar las ideas básicas que de manera informal y no sistemática habían sido desarrolladas antes de él por los matemáticos para luego decir : "Ustedes ven que he logrado colocar toda esta labor desordenada dentro de los precisos marcos de mi sistema formal. Y ¿no es claro que tengo todas las herramientas disponibles para formalizar el trabajo ulterior que los matematicos están en disposición de hacer ?"

En este aspecto se evoca el enfoque del primer gran axiomatista y geómetra, Euclides. Euclides consideraba también que todas las proposiciones de la geometría - es decir, todos los enunciados verdaderos acerca de triángulos, círculos y las otras figuras en las cuales estaba interesado- podían derivarse a partir de la sencilla lista de conceptos y axiomas que daba. Pero tampoco en este caso hubo nunca un intento de demostrar este hecho pues sólo se llevó a cabo el proceso empírico de obtener, a partir de los axiomas, un número considerable de proposiciones geométricas para luego apelar, por así decir, a la buena voluntad de la audiencia. " Bien ", podemos imaginarnoslo diciendo, "miren qué tanto he logrado deducir de mis axiomas. ¿ No están ustedes bastante convencidos de que *todos* los hechos geométricos se derivan de ellos ?"

Por supuesto, hubo matemáticos y lógicos que *no* estaban convencidos. Y así se erigió la demanda de demostración.

En realidad, la formulación apropiada del problema de si un sistema de axiomas es adecuado para establecer *todos* los enunciados verdaderos en cierto dominio de investigación requiere una formulación matemática precisa de la noción de " proposición verdadera" , y no fue sino hasta 1935 que Alfred Tarski, en un gran esfuerzo precursor, puso en plena evidencia la forma en que deben analizarse las nociones semánticas para lenguajes matemáticos. Es trivial por supuesto, dar condiciones bajo las cuales una proposición *particular* cualquiera es verdadera. Por ejemplo, en la teoría de la geometría euclideana, la proposición "todo triángulo tiene dos ángulos iguales" es cierta si, y sólo si, todo triángulo tiene dos angulos iguales. Sinembargo Tarski mostró claramente que no hay manera de utilizar esta simple técnica para describir (en un número finito de palabras) condiciones para la verdad de todas las infinitas proposiciones de un lenguaje ; para este fin se necesita una forma muy diferente de definición, estructural y de carácter recursivo.

Ya en 1919, aún antes de las consideraciones de Tarski sobre la semántica, encontramos la primera demostración de lo que, en lógica, llamamos "completez". El matematico Emil Post (en su disertación doctoral publicada ese año), limitando su atención a un fragmento muy pequeño del sistema creado por Whitehead y Russell, logró mostrar que para cualquier enunciado, en dicho fragmento, que fuera "verdadero según la sobreentendida interpretación de los símbolos", podía efectivamente obtenerse una demostración por medio de los axiomas y las reglas de inferencia adoptadas por el sistema. Más tarde se llevaron a cabo esfuerzos ulteriores para extender el tipo de demostración de completez iniciada por Post con la esperanza de que al final el sistema entero de los *Principia* pudiese cobijarse dentro del alcance de las demostraciones de esta clase.

En 1930, Kurt Gödel contribuyó enormemente a este desarrollo y a esa esperanza logrando demostrar la completez de un sistema deductivo basado en una porción del lenguaje matemático mucho mayor que la considerada por Post. La demostración de Gödel considera el llamado "cálculo de predicados de primer orden" el cual se refiere a los enunciados matemáticos que contienen variables de un solo tipo. Cuando un tal enunciado se interpreta con referencia a algún modelo matemático, sus variables se consideran variando sobre los elementos del modelo; en particular, no hay variables que varíen sobre conjuntos de elementos del modelo o sobre los enteros (a menos que éstos sean los elementos del modelo en cuestión). Ahora bien, Gödel demuestra que en cualquier sistema axiomático de esta clase, si un enunciado es verdadero en cada uno de los modelos que satisfacen los axiomas entonces debe haber una demostración de longitud finita que conduce de los axiomas hasta ese enunciado y en donde cada linea se deriva de las lineas precedentes de acuerdo con reglas lógicas explícitamente enumeradas. Este resultado de Gödel está entre los teoremas más básicos y útiles en el cuerpo total de la lógica matemática.

Pero justamente el año siguiente, en 1931, la esperanza de ulteriores extensiones de este tipo de demostración de completez fue desechada definitivamente por el mismo Gödel en lo que sin duda es el más profundo y más famoso trabajo de la lógica matemática. Gödel logró demostrar que el sistema de los *Principia Mathematica*, tomado en su totalidad, era *incompleto*. Esto es, mostró explícitamente cómo construir un cierto enunciado, acerca de los números naturales, el cual era matemáticamente admitido como verdadero según la interpretación presupuesta del simbolismo usado pero que no podía ser demostrado a partir de los axiomas aplicando las reglas de inferencia que hacían parte del sistema.

Por supuesto, si Gödel no hubiese hecho más que ésto, podría concluirse simplemente que Russell y Whitehead habían sido algo negligentes al formular sus axiomas pues habían dejado fuera de ellos a este enunciado cierto pero no susceptible de demostración y podría entonces esperarse que, agregándolo como un nuevo axioma, se lograría obtener un sistema más fuerte el cual sería completo. Mas la demostración de Gödel prueba que también este sistema así reforzado contendría un enunciado verdadero pero no susceptible de demostración y también que si este sistema fuera de nuevo reforzado agregando como axioma este nuevo enunciado cierto pero no demostrable, el sistema resultante sería de nuevo incompleto. Y en verdad, si por medio de aplicaciones sucesivas del método de Gödel se obtuviese toda una secuencia infinita de enunciados los cuales fuesen agregados simultáneamente a los axiomas originales de los *Principia*, el mismo proceso podría aún aplicarse para obtener *otro* enunciado verdadero pero también indemostrable.

En realidad Gödel describió una clase muy amplia de sistemas deductivos formales a los cuales se aplicaba su método. Y la mayoría de los estudiosos de este tema han llegado a convencerse de que cualquier sistema formal de axiomas y reglas de inferencia que fuese razonable considerar como base para el desarrollo de la matemática caería en dicha clase, padeciendo por lo tanto de incompletez. Desde este punto de vista parece que uno de los elementos básicos sobre los que Russell apoyaba su tesis de que toda la matemática podía reducirse a la lógica debe ser retirado y reconsiderado.

Problemas de consistencia y de decisión.

He venido hablando de completez lo cual tiene que ver con la aptitud de un sistema formal de axiomas y reglas de inferencia para demostrar enunciados verdaderos. Pero debo mencionar también un segundo propósito de los *Principia* de Russell y Whitehead el cual tampoco fue logrado en los desarrollos subsecuentes de la lógica matemática. Russell y Whitehead se preocuparon mucho de la *consistencia*. Mientras aspiraban a obtener un sistema completo en el cual se contara con demostraciones para todos los enunciados correctos, también se cuidaban de que su sistema *no* contuviese demostraciones de enunciados incorrectos. En particular, en un sistema consistente, como el buscado por ellos, no debería ser posible demostrar un enunciado y también su negación.

cia es necesario recordar el rudo despertar sufrido por los matematicos en 1897 en relación con la teoría cantoriana de los números transfinitos. Durante siglos antes de Cantor los matemáticos asumieron simplemente que cualquier persona adecuadamente entrenada en el ramo podria distinguir una demostración correcta de una incorrecta. Aquellos que encontraban difícil apreciar esta diferencia eran sencillamente "barridos" en el curso de su fomación y desviados de las matematicas hacia campos de estudio menores. Y nadie encaró seriamente la cuestión de establecer exactamente, en términos explícitos y matemáticos, lo que se entendía por una demostración correcta.

Cuando Cantor inició su desarrollo de la teoría de conjuntos consideró tanto números cardinales como números ordinales de tipo transfinito. (Estos números pueden usarse en relación con los conjuntos infinitos en forma muy similar a los números ordinarios en el caso de contar y ordenar conjuntos finitos) Muchas de las propiedades de los números transfinitos son idénticas a las de los números ordinarios y, en particular, Cantor mostró que dado un número ordinal b podemos obtener un número ordinal mayor, $b + 1$. Sinembargo, en 1897 un matemático italiano, C. Burali-Forti, considerando el conjunto de todos los números ordinales en su orden natural, demostró que debe existir un número ordinal *máximo*. Los matemáticos no pudieron hallar, ni en el argumento de Cantor ni en el de Burali - Forti, falla alguna que les hiciera presentir que alguno de ellos se basaba en un razonamiento incorrecto. Gradualmente fue reconociéndose que los matemáticos tenían entre manos una paradoja genuina y que estos tendrían que lidiar por fin con la cuestión de qué se quiere decir cuando se habla de una demostración correcta. Más tarde, el mismo Russell encontró una paradoja aún más simple en la teoría intuitiva de conjuntos, basada en el conjunto de todos aquellos conjuntos que no son elementos de sí mismos.

Este esbozo retrospectivo aclarará por qué Russell y Whitehead se preocuparon porque dentro de su propio sistema ninguna paradoja fuera demostrable. Sinembargo, ¡nunca procuraron lograr una *demostración* de que su sistema era consistente! La única evidencia que aducían era que se habían obtenido, dentro de su sistema, un número considerable de teoremas sin haber encontrado paradojas y que todos los intentos para reproducir, dentro del sistema de los *Principia Matemática*, la paradoja de Burali - Forti y tántas otras, habían fallado.

Como en el asunto de la completez, los matemáticos no se contentaban con una respuesta de esta clase y demandaban que se diera una demostración real de la consistencia del sistema de los *Principia* (así como de otros sistemas considerados entonces). El nombre, grande e ilustre, de David Hilbert estaba asociado a estos esfuerzos para obtener demostraciones de consistencia para varias porciones de la matemática y bajo su estímulo y dirección se llevaron a cabo importantes avances hacia esta meta, tanto por él mismo como por sus estudiantes. Pero como con los esfuerzos para demostrar la completez, el programa de Hilbert zozobró ante las brillantes ideas de Kurt Gödel.

En efecto, en el mismo artículo de 1931 al cual me he referido, Gödel logró demostrar que la consistencia y la completez estaban íntimamente ligadas una con la otra. Logró demostrar que *si* un sistema como el de los *Principia* era verdaderamente consistente entonces, de hecho, ¡no era posible producir una prueba sólida de este hecho! Ahora bien, este mismo resultado suena paradójico. Sinembargo, expresado con el aparato técnico desarrollado por Gödel este es en verdad un resultado matemático, lleno de sentido y establecido con precisión, el cual ha persuadido a la mayoría de los lógicos, aunque en verdad no a todos, de que la búsqueda de Hilbert de una demostración de consistencia debe permanecer insatisfecha.

Me gustaría, finalmente, mencionar un tercer aspecto en el cual el propósito original de los lógicos matemáticos quedó frustrado. Los asuntos de consistencia y completez claramente concernían a los autores de *Principia Mathematica*, más las cuestiones acerca de procedimientos de decisión parecen no haber sido tratadas con extensión sería por Russell y Whitehead. Sin embargo, esta es un área de estudio que ha interesado a los lógicos desde épocas tan tempranas como los tiempos de Leibniz. En efecto, el mismo Leibniz tenía un gran sueño : soñaba que podría ser posible ingeniarse un procedimiento sistemático para responder preguntas y no únicamente preguntas matemáticas sino aún preguntas de la ciencia empírica. Un tal procedimiento estaría destinado a obviar la necesidad de inspiración reemplazándola por la realización automática de un procedimiento rutinario. Si Leibnitz hubiese podido familiarizarse con las máquinas calculadoras de alta velocidad actuales habría formulado su idea aseverando la posibilidad de escribir un programa de tal amplitud y alcance que absolutamente cualquier pregunta científica pudiese ser puesta en la cinta y una vez que la máquina la hubiese considerado durante un cierto período finito de tiempo, apareciese una respuesta definitiva.

La lógica después de 1936.

La idea de Leibnitz permaneció adormecida por mucho tiempo pero resultaba natural resucitarla en conexión con los sistemas deductivos formales que los lógicos matemáticos desarrollaron en la primera parte de este siglo. Debido a que estos lógicos estaban interesados en formular ideas matemáticas en el seno de un cálculo simbólico para luego manipular los símbolos de acuerdo con reglas prefijadas con el objeto de obtener información adicional acerca de esos conceptos matemáticos, resultaba natural preguntarse si no era posible ingeniarse reglas de computación completamente automaticas que permitiesen decidir la verdad o falsedad de cualquier enunciado del cálculo. Y aunque el campo de la ciencia empírica no caía en absoluto dentro de las consideraciones de los lógicos del siglo XX que buscaban tales procesos de decisión, no estaba quizás fuera de las pretensiones de algunos esperar que un sistema tan amplio como el de los *Principia* pudiese algún día ser incluido en el alcance de un tal procedimiento.

Hubo muchos esfuerzos vigorosos para hallar procedimientos de decisión para varios fragmentos de los *Principia*. La disertación doctoral de Post, por ejemplo, incluía algunos intentos en esta dirección y en los siguientes 15 años los lógicos de muchos países produjeron trabajos adicionales. Luego, en 1936, Alonzo Church, haciendo uso de la noción de función recursiva recientemente desarrollada, logró demostrar que para un cierto fragmento del lenguaje matematico, de hecho para la misma lógica de predicados de primer orden cuya completez había demostrado Godel en 1930, no era posible la existencia de un procedimiento de decisión. Y así, tanto con los procedimientos de decisión como con las demostraciones de completez y de consistencia, los esfuerzos para establecer vínculos estrechos entre la lógica y las matemáticas tuvieron en mal final.

Bien, los he conducido a ustedes hasta el año 1936. Probablemente la mayoría de los matemáticos han oido por lo menos algo acerca de los desarrollos que he esbozado aquí. Pero por alguna razón la formación en lógica de la mayoría de los matemáticos parece finalizar más o menos en este punto. Está bastante difundida la impresión de que con los descubrimientos de Gődel y Church el ambicioso programa de los lógicos matemáticos llegó de hecho a un estancamiento y que desde entonces los trabajos adicionales en lógica han sido una especie de tambaleos indefensos de personas que, no queriendo aceptar las crueles realidades de la vida, esperan aún reforzar las progresivas fronteras de la investigación matemática buscando una demostración de consistencia inexistente.

Sinembargo, esta imagen está en realidad muy alejada de la realidad. Porque en 1936, precisamente en la época en la cual muchos suponen se había consumado el deceso de la lógica, se fundó una sociedad académica internacional conocida como la Association for Symbolic Logic, empezándose la publicación del *Journal of Symbolic Logic*. En los últimos 25 años esta publicación se ha ensanchado considerablemente para dar cabida al creciente volumen de investigación. Y en la actualidad hay cuatro revistas dedicadas exclusivamente a la publicación de material relacionado con la lógica matemática y en una gran variedad de revistas matemáticas de naturaleza menos especializada aparecen corrientemente muchos artículos sobre lógica.

En el espacio restante deseo mencionar, muy brevemente, algunos de los desarrollos en lógica matemática desde 1936.

Conjuntos y métodos de decisión

Creo conveniente para esta exposición dividir la investigación en lógica matemática en siete áreas principales. Y en primer lugar mencionaré el área relacionada con los fundamentos de la teoría de conjuntos.

Para explicar la conexión entre este campo y la lógica debe indicarse que aquellos objetos que Russell y Whitehead llamaron "funciones proposicionales" son, en realidad, muy poco distinguibles de los que ahora los matemáticos denominan "conjuntos" y "relaciones". Desde el punto de vista filosófico quizás haya aún lugar para distinguir estos conceptos unos de otros. Pero como, en realidad, el tratamiento de las funciones proposicionales en *Principia Mathematica* es extensional (de tal modo que dos funciones proposicionales que son ciertas para exactamente los mismos objetos no pueden nunca distinguirse), este sistema resulta idéntico, para propósitos matemáticos, con un sistema que trate de conjuntos y relaciones.

Entre los sistemas de teoría de conjuntos propuestos por los lógicos como base para el desarrollo de la matemática los principales son la teoría de los tipos empleada por los mismos Whitehead y Russell, ampliada posteriormente por L. Chwistek y F. Ramsey y una linea alternativa desarrollada inicialmente por E. Zermelo y a la cual A. Fraenkel y T. Skolen hicieron posteriormente importantes contribuciones. Aún otro sistema, que tiene ciertas características en común con cada una de estas dos formas principales, fue presentado y estudiado por W. Quine y, hasta cierto punto, por J. B. Rosser. De estos sistemas el de tipo Zermelo ha recibido probablemente más atención junto con una variante importante sugerida y desarrollada por J. von Neumann, P. Bernays y Gődel.

Entre los significativos esfuerzos desarrollados en estos sistemas se cuentan aquellos dirigidos a establecer el status de proposiciones tales como el axioma de elección y la hipótesis del continuo de Cantor. En este aspecto los nombres de Gödel y Mostowski son especialmente prominentes.

Gödel mostró que una forma fuerte del axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo son simultaneamente consistentes con los otros axiomas, más elementales, de la teoría de conjuntos- bajo la hipótesis de que estos últimos son a su vez consistentes. Mostowski mostró que el axioma de elección es independiente de los axiomas elementales de la teoría de conjuntos siempre que se escoja una forma de estos axiomas elementales que no excluya la existencia de un número no enumerable de "Urelemente" (objetos que no son conjuntos). La independencia del axioma de elección en sistemas de axiomas como el usado en la demostración de consistencia de Gödel y la independencia de la hipótesis del continuo en un sistema cualquiera de teoría de conjuntos son problemas aún abiertos (*).

Mas recientemente la dirección de las investigaciones en el área de los fundamentos de la teoría de conjuntos parece haberse transladado de la formulación de sistemas específicos de axiomas y la obtención de teoremas dentro de estos sistemas hacia la consideración de la totalidad de realizaciones diferentes de tales sistemas axiomáticos. Es quizas a J. Shepherdson a quien debe acreditarsele el paso decisivo en este cambio de énfasis, aunque su trabajo esta claramente muy en deuda con el de Gödel. Trabajos subsecuentes de A. Tarski, R. Vaught y R. Montague han impulsado mucho más este desarrollo.

Una herramienta importante en estos trabajos es el concepto de *rango* de un conjunto, el cual puede definirse inductivamente como el menor número ordinal que excede al rango de cada uno de los elementos del conjunto. Esta noción puede emplearse para clasificar modelos de la teoría de conjuntos de acuerdo con el menor número ordinal que no es igual rango de ningún conjunto del modelo. Recientemente ha habido algunas contribuciones interesantes a estos estudios por parte de Azriel Lévy ; sus esfuerzos han estado encaminados a fortalecer sucesivamente los axiomas de la teoría de conjuntos con el fin de penetrar más y más en los dominios del transfinito.

Una segunda área que delinearé dentro de la investigación lógica contemporánea es la relacionada con el problema de decisión. A pesar de que los trabajos de Church pusieron en evidencia que no podía haber un procedimiento *universal* de decisión para la matemática, se ha mantenido un vivo interés en hallar procedimien-

(*) En 1963, dos años después de escrito este artículo, J. P. Cohen demostró la independencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo. N. del E.

tos de decisión para sectores más modestos de la teoría matemática. Es de especial importancia en este ámbito el método de decisión de Tarski para el álgebra y la geometría elementales así como una importante extensión del mismo llevada a cabo por Abraham Robinson. También Wanda Szmielew ha dado un importante procedimiento de decisión, a saber, el procedimiento para la llamada "teoría elemental" de los grupos abelianos. Contrastando con esto, Tarski ha mostrado que la teoría elemental de *todos* los grupos no admite procedimiento de decisión alguno. En realidad, Szmielew y Tarski consideraron exactamente el mismo conjunto de enunciados - grosso modo, todos aquellos enunciados que pueden formarse usando el símbolo de la operación del grupo y además variables que recorren los elementos del grupo, con la ayuda del signo de igualdad así como las conectivas y cuantificadores lógicos ordinarios. Si nos preguntamos si un enunciado dado de este tipo es cierto para todos los grupos *abelianos* , es posible contestar la pregunta de manera automática usando el método de Szmielew. Pero si estamos interesados en saber cuáles de estos enunciados son verdaderos para *todos* los grupos, entonces el argumento dado por Tarski muestra que es imposible ingeniarse un método maquinal para separar los enunciados verdaderos de los falsos.

Un resultado estrechamente relacionado con el de Tarski es el de P. Novikov y W. Boone referente a la no existencia de un método de decisión que nos capacite para resolver el problema de las palabras en la teoría de grupos, problema este cuya solución ha sido perseguida por los algebristas durante largo tiempo. Es en verdad bastante simple ver que el resultado de Novikov-Boone es equivalente a la no existencia de un método de decisión para un cierto *subconjunto* de los enunciados que constituyen la teoría elemental de grupos, a saber, todos aquellos enunciados que tienen una forma especial muy sencilla. Resulta, por lo tanto, que este resultado es más fuerte que el de Tarski

Funciones recursivas.

Ahora bien, el concepto clave cuyo desarrollo fue necesario, antes de lograr soluciones negativas para procedimientos de decisión, fue el concepto de función recursiva. Intuitivamente hablando, se trata sencillamente de funciones de los números naturales en los números naturales con la propiedad de que hay un método automático para calcular su valor para cualquier argumento dado. Una definición matemática explícita y satisfactoria de esta clase de funciones fue formulada en primer lugar por J. Herbrand y Gödel. Pero hubo que esperar hasta que S. C. Kleene desarrollara el concepto hasta tal punto que ahora figura en la base de una porción muy grande e importante de la investigación lógica.

La mayor parte de los trabajos con funciones recursivas ha seguido la linea de clasificar conjuntos y funciones, clasificación similar a la referente a conjuntos proyectivos y conjuntos analíticos en la teoría descriptiva de conjuntos. El mismo Kleene, además de sus alumnos Addison y Spector y otros lógicos, incluyendo a Post, Mostowski, J. Shoenfield y G. Kreisel, han contribuido significativamente a este desarrollo. Deben también mencionarse las aplicaciones que, inicialmente Kleene y posteriormente otros, han intentado hacer del concepto de función recursiva con el fin de explicar la noción de procedimiento matemático "constructivo". En este aspecto se han realizado varios intentos de vincular la noción de función recursiva con la corriente matemática conocida como institucionismo, la cual es una interpretación radical del lenguaje matemático propuesta por L. Brouwer y desarrollada por A. Heyting

Algebra, lógica y modelos

Una cuarta área de investigación lógica tiene que ver con el tema que recientemente se describe como lógica algebraica. En realidad esta se remonta a los primeros trabajos de Boole y Schroder. Empero, el interés en el tema se ha desplazado de la formulación y derivación de ecuaciones algebraicas que expresan leyes lógicas a la consideración de estructuras abstractas definidas por medio de tales ecuaciones. Es así como la atención se ha enfocado sucesivamente en las álgebras de Boole, las álgebras relacionales y las álgebras cilíndricas y poliedricas; los nombres de M. Stone, Tarski y P. Halmos aparecen asociados a los desarrollos centrales en este campo. Las estructuras algebraicas estudiadas en estos dominios pueden asociarse de manera natural con teorías matemáticas y esta asociación permite el empleo de métodos algebraicos considerablemente fuertes en el análisis metamatemático de esas teorías.

Una quinta área en la investigación lógica moderna se refiere a la llamada teoría de modelos. En este caso los esfuerzos están dirigidos a interrelacionar las propiedades matemáticas de alguna clase de estructuras definidas por medio de enunciados matemáticos dados con las propiedades estructurales de esos enunciados en sí mismos.

Un ejemplo muy temprano es el resultado obtenido por Garrett Birkhoff según el cual para que una clase de estructuras pueda definirse por medio de un conjunto de ecuaciones (identidades) es necesario y suficiente que esa clase sea cerrada con respecto a la formación de subestructuras, productos directos e imagenes homomorfas. También se lograron caracterizaciones de naturaleza similar para clases definibles por medio de enunciados elementales de tipo universal (Tarski) y por medio de enunciados elementales (J Keisler).

Un resultado relacionado es el teorema de R Lyndon de acuerdo con el cual cualquier enunciado elemental cuya validez se conserva al pasar de un modelo del enunciado a una imagen homomorfa de dicho modelo debe ser equivalente a un enunciado que no contiene signos de negación. En una dirección diferente, E Beth ha demostrado que si un símbolo dado, de conjunto o de relación, no es definible en términos de los otros símbolos de un sistema elemental de axiomas, entonces deben existir dos modelos distintos de estos axiomas, que coinciden en todos los aspectos excepto por la interpretación del símbolo dado. (Esto prueba la completez del método de A. Padoa para demostrar no-definibilidad.) Un teorema de interpolación lógica de W. Craig proporciona un estrecho nexo entre los resultados de Lyndon y Beth.

Una sexta área que puede discernirse en los trabajos lógicos recientes se refiere a la teoría de la demostración. Es esta quizás la parte más antigua y básica de la lógica, a saber, la búsqueda de reglas sistemáticas de demostración o deducción por medio de las cuales sea posible identificar las consecuencias de una proposición cualquiera. Sin embargo, en trabajos recientes, los lógicos han empezado a apartarse radicalmente del tipo de sistemas para el cual originalmente se buscaban reglas de demostración. Se han efectuado, por ejemplo varios intentos para proporcionar reglas de demostración para lenguajes que contienen fórmulas infinitamente largas, tales como enunciados con infinitas disyunciones, conjunciones y variables cuantificadas. En tales empeños han tomado parte Tarski, Scott, C Karp, W. Hanf y otros. Es bastante curioso que aunque esta corriente de investigación parece a primera vista muy alejada de la matemática ordinaria, uno de sus resultados importantes fue usado por Tarski para resolver un problema referente a la exis tencia de medidas sobre espacios muy grandes problema éste que había permanecido muchos años sin resolver

La última área de investigación lógica sobre la cual quiero llamar la atención es una especie de estudio inverso de lo que hemos llamado lógica algebraica. En esta última estamos interesados en aplicar métodos algebraicos a un sistema lógico. No obstante hay también estudios en los cuales se usan resultados y métodos de la lógica para establecer teoremas del álgebra moderna. El primero en llevar a cabo tal tipo de aplicaciones ha sido el matemático ruso A, Malcev, quien en 1941 indicó cómo podía aplicarse el teorema de completez de la lógica de primer orden para obtener un resultado en la teoría de grupos. Ulteriormente, la misma técnica fue usada por Tarski para construir varios cuerpos ordenados no arquimedeanos. El nombre más conocido en esta área es quizás el de Abraham Robinson quien estuvo vinculado anteriormente a la Universidad de Toronto en el Canadá. Entre sus contribuciones está la aplicación de métodos y resultados lógicos para mejorar una solución, dada por E. Artin en 1926, del 17° problema de Hilbert (el decimoséptimo de la famosa lista de problemas presentada en su conferencia en el Congreso Internacional de Matemáticos en 1900). Robinson demostró que cuando un polinomio real que toma únicamente valores no negativos se representa como suma de cuadrados de funciones racionales, el número de términos necesario para la representación depende únicamente del grado y número de variables del polinomio dado pero que es independiente de los coeficientes particulares del mismo.

La tesis de Russell en perspectiva

Espero que este brevísimo bosquejo de algunas de las áreas de la investigación lógica contemporánea dé una idea acerca de las maneras en que los lógicos han reaccionado ante los teoremas de Gödel y de Church los cuales, durante el periodo de 1931 a 1936, golpearon severamente sus esperanzas originales. Hablando en general puede describirse esta reacción como compuesta de una aceptación de la imposibilidad de realizar esperanzas originales en la lógica matemática, una relativización del programa original de buscar demostraciones de completez y consistencia y métodos de decisión, una incorporación de nuevos métodos y construcciones aparecidos en las demostraciones de imposibilidad y el desarrollo de intereses bastante nuevos sugeridos por la generalización de resultados iniciales.

Ahora, con este bagaje, volvamos a la tesis de Russell según la cual toda la matemática puede reducirse a la lógica. Yo diría que si se entiende que la lógica incluye la teoría de conjuntos (lo cual parece ser una buena apreciación de lo que Russell tenía en mente) entonces la mayoría de los matemáticos aceptarían sin objeción la tesis de que los conceptos básicos de todas las matemáticas pueden expresarse en términos de la lógica. También estarán de acuerdo en que los teoremas de todas las ramas de la matemática pueden derivarse de principios de la teoría de conjuntos, aunque señalarán que ningún sistema fijo de axiomas para la teoría de conjuntos es adecuado para abarcar todos aquellos principios que serían considerados como "matemáticamente correctos".

Pero tiene quizás más hondo significado el consenso de los matemáticos de que en su disciplina hay mucho más que lo indicado por una tal reducción de la matemática a la lógica y la teoría de conjuntos. El hecho de que de entre todas las nociones lógicamente posibles, definibles en teoría de conjuntos, se seleccionen *ciertos* conceptos como objetos de investigación es de esencial significación. Una comprensión cabal de la matemática debe considerar una explicación sobre aquellas nociones conjuntistas que tienen "contenido matemático" y este es un problema que obviamente no es reducible a un problema de lógica, no importa lo ampliamente que esta sea concebida.

La lógica, en lugar de ser toda la matemática parece más bien ser una rama de ella y hay razones para esperar que, con el tiempo, proporcione un elemento de unidad que se oponga a la fragmentación que parece asaltar a la matemática contemporánea, y en realidad a todas las ramas del saber.

Bibliografía

Algunos de los trabajos de Boole, Frege y Cantor han llegado a ser más accesibles debido a traducciones relativamente recientes al inglés. Ejemplos son las obras citadas. Los *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, aunque dedicados en gran parte a un formidable formalismo, contienen muchas secciones de carácter introductorio o de sumario bastante legibles. Una relación de los teoremas fundamentales de Gödel y Church se halla en Kleene. Al describir la investigación lógica desde 1936 mi intención no ha sido presentar una historia completa sino, solamente, indicar la gama de actividades mencionando algunas de las áreas más activamente cultivadas. De acuerdo con esto sólo me he referido a una pequeña muestra de la literatura, seleccionando (dentro de lo posible) obras que son en gran parte autosuficientes. En relación con la lista siguiente, para un ejemplo de una teoría axiomática de conjuntos y una contribución importante hacia su metateoría, véase Gödel. Para una relación sobre el problema de decisión, véase Tarski (1951) para soluciones positivas y Tarski *et al* (1953) para negativas; la teoría de las funciones recursivas y sus aplicaciones está bien descrita en Kleene. Algunas anotaciones históricas sobre lógica algebraica así como resultados detallados pueden encontrarse en Henkin y Tarski. Una contribución muy reciente e importante a la teoría de modelos es la de Keisler, donde pueden hallarse también referencias a trabajos anteriores. Para una relación de trabajos recientes sobre fórmulas infinitamente largas véase Henkin ; una aplicación de tales trabajos a un problema sobre la existencia de ciertas medidas aparece en Tarski. Aplicaciones de la lógica al álgebra se describen en Robinson.

G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*. Dover, N. Y. 1951.

G. Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Open Court, London, 1915 (versión de P. Jourdain).

G. Frege, *The Foundations of Arithmetic*. Philosophical Library, N. Y. 1950 (versión de J. L. Austin).

K. Gödel, "The consistence of the Axiom of Choice" *Annals of Mathematics Study* N° 3. (Princeton Univ. Press. Princeton, N. J. 1940).

L. Henkin, "Some remarks on infinitely long formulas" en *Infinitistic Methods* (Pergamon, N. Y. 1961).

________ y A. Tarski, "Cylindric Algebras" en "Lattice Theory" (Proc. Symposium in Pure Mathematics, Providence, 1961) (American Mathematical Society), vol. 2.

H. J. Keisler, *Indagationes Mathematical*, 23, 477 (1961).

S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics* (Van Nostrand, N. Y. 1952).

A. Robinson, *Complete Theories* (North-Holland, Amsterdam, 1956).

B. Russell y A. N. Whitehead, *Principia Mathematicae* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, Inglaterra ; 1910, 1912, 1913, respectivamente), volumenes 1-3.

A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry* (Univ. of California Press, Berkeley, 1951).

________ "Some problems and results relevant to the foundations of set theory", en "Proceedings of the International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford, 1960" (Stanford Univ. Press).

________, A. Mostowski, R. Robinson, *Undecidable Theories* (North-Holland, Amsterdam, 1953).