Boletín de Matemáticas
Vol. IX, No. 1, pp. 38-64

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA, IV

JAIRO A. CHARRIS

CAPITULO X

CONVERGENCIA COMPACTA EN $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ Y $\mathcal{O}(\Omega)$

1. **Convergencia compacta en** $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. En este número Ω será un espacio topológico localmente compacto. Por $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ entenderemos el $\mathbb{R}$-espacio de las funciones continuas $f: \Omega \to \mathbb{R}_n$. Si K es un subconjunto compacto de Ω definimos :

$$||f||_K = \sup_{x \in K} ||f(x)||, \quad x \in C(\Omega, \mathbb{R}_n).$$

Es inmediato que si $f(x) = 0$ para todo x, $||f||_K = 0$. Además

$$||f + g||_K \leq ||f||_K + ||g||_K$$

$$||\lambda f||_K = |\lambda| \, ||f||_K, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo $||f||_K = 0$ no implica $f = 0$. Por esta razón $|| \; ||_K$ no es una norma sobre $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. Diremos que $|| \; ||_K$ es una *semi-norma*.

Cuando K recorre la clase de todos los conjuntos compactos de Ω, las seminormas $\| \ \|_K$ permiten definir una topología τ_C sobre $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$: la topología de la *convergencia compacta*. Para definir tal topología procederemos de la manera siguiente :

Primero : Si $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, $\varepsilon > 0$ y K es un compacto de Ω, definimos :

$$U_{K,\varepsilon}(f) = \{ g \in C(\Omega, \mathbb{R}_n) \mid \| f-g \|_K < \varepsilon \}.$$

El conjunto $U_{K,\varepsilon}(f)$ se denominará la *pseudo-bola abierta de base* K, *radio* ε, *y centro* f. Luego diremos que un subconjunto V de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ es una vecindad de f, si V contiene alguna pseudo-bola de centro en f. Es decir, si existen un compacto $K \subseteq \Omega$, y $\varepsilon > 0$, tales que :

$$V \supseteq U_{K,\varepsilon}(f).$$

Notaremos $\mathcal{B}(f)$ al conjunto de todas las vecindades de f anteriormente definidas. El conjunto $\mathcal{B}(f)$ tiene las siguientes propiedades, cuya demostración es inmediata :

(VI) Si $U \in \mathcal{B}(f)$ y $V \supseteq U$ entonces $V \in \mathcal{B}(f)$.

(VII) $f \in V$ para todo $V \in \mathcal{B}(f)$.

(VIII) Si $U, V \in \mathcal{B}(f)$, también $U \cap V \in \mathcal{B}(f)$.

(IX) Si $U \in \mathcal{B}(f)$, existe $W \in \mathcal{B}(f)$ tal que si $g \in W$, $U \in \mathcal{B}(g)$.

(Basta, en (IX), tomar $W = U_{K,\varepsilon}(f)$ la cual esté contenida en U, y comprobar que si $g \in U_{K,\varepsilon}(f)$ y $\delta = \varepsilon - \| f-g \|_K$, entonces $U_{K,\delta}(g) \subseteq U_{K,\varepsilon}(f)$).
Definimos ahora la topología τ_C como la clase de todos los subconjuntos $U \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ tales que $U \in \mathcal{B}(f)$ para toda $f \in U$.

Teorema 1.1. *El conjunto τ_C tiene las siguientes propiedades :*

(1) Toda unión de elementos de τ_C está de nuevo en τ_C.

(2) Toda intersección finita de elementos de τ_C es un elemento de τ_C.

(3) ϕ y $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ pertenecen a τ_C.

(4) Si K es un compacto de Ω, $\varepsilon > 0$, y $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, $U_{K,\varepsilon}(f) \in \tau_C$.

(5) Para que U esté en $\mathcal{B}(f)$ es necesario y suficiente que exista $V \in \tau_C$ tal que $f \in V$ y $V \in U$.

Demostración. Inmediata.

Del teorema anterior se deduce inmediatamente que τ_C es, en efecto, una topología sobre $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, y que $\mathcal{B}(f)$ es el conjunto de las vecindades de f para tal topología.

Definición 1.1. Una sucesión $\{K_n\}$ de compactos de Ω se dice exhaustiva si :

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

(b) $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ para todo $n \in N$.

Un espacio topológico localmente compacto se dice *enumerable al infinito* si admite una sucesión exhaustiva de compactos. El siguiente resultado elemental es bien conocido :

Teorema 1.2. *Todo abierto de $\mathbb{R}_m$ es enumerable al infinito.*

Tenemos ahora :

Teorema 1.3. *Sea Ω localmente compacto, enumerable al infinito. Si $\{K_n\}$ es una sucesión exhaustiva de compactos de Ω, y si τ' es la topología so-*

bre $C(\Omega)$ *definida como antes, pero usando sólo las seminormas*

$$\| f \|_{K_n} = \sup_{x \in K_n} \| f(x) \| ,$$

entonces $\tau' = \tau_C$.

Demostración : Claramente es suficiente demostrar que si $\mathcal{B}'(f)$ es el conjunto de todos los $U \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ tales que $U \supset U_{K_n, \varepsilon}(f)$ para algún n y algún $\varepsilon > 0$, entonces $\mathcal{B}'(f) = \mathcal{B}(f)$. Ahora, es claro que $\mathcal{B}'(f) \subseteq \mathcal{B}(f)$. Para demostrar la inclusión recíproca, basta demostrar que si K es un compacto de Ω y $\varepsilon > 0$, existen n y $\delta > 0$ tales que $U_{K, \varepsilon}(f) \supseteq U_{K_n, \delta}(f)$. Pero si K es compacto, existe obviamente $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_n$. De ésto, $\sup_{x \in K} \| f(x) \| \leq \sup_{x \in K_n} \| f(x) \|$, y basta tomar $\varepsilon = \delta$ para tener la afirmación. Esto demuestra el teorema.

***Teorema** 1.4* . *Sea Ω localmente compacto, enumerable al infinito. La topología τ_C es metrizable. En otros términos, existe una métrica d sobre $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, tal que si τ_d es su topología correspondiente ,*

$$\tau_d = \tau_C .$$

Demostración. Sea d definida sobre $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ por :

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\| f - g \| K_n}{1 + \| f - g \| K_n} ,$$

donde $\{ K_n \}$ es cualquier sucesión exhaustiva de compactos de Ω . Es obvio que d es una métrica sobre $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. Escribamos $\| f - g \|_n$ en lugar de $\| f - g \|_{K_n}$, y $B_\varepsilon(f)$ para denotar a la bola abierta de radio $\varepsilon > 0$ y centro $f \in B_\varepsilon(f)$ para la topología τ_d . Para demostrar la coincidencia de τ_C y τ_d es obviamente suficiente demostrar, para $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, que :

(a) Si $\varepsilon > 0$, existen un compacto K de Ω y $\delta > 0$ tales que :

$$U_{K,\delta}(f) \subseteq B_{\varepsilon}(f) .$$

(b) Si K es un compacto de Ω y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que :

$$B_{\delta}(f) \subseteq U_{K,\varepsilon}(f) .$$

Demostremos primero (b). Sean $0 < \varepsilon < 1$ y n lo suficientemente grande para que $K \subseteq K_n$. Sea $g \in C(\Omega, \mathbb{R}_m)$ tal que $\| f-g\|_n < \varepsilon$. Entonces

$$\frac{1}{2} \| f-g\|_n < \frac{\| f-g\|_n}{1+\| f-g\|_n} \leq 2^n d(f,g) .$$

Si tomamos $\delta = \varepsilon/_{2^{n+1}}$ se tiene inmediatamente que $B_{\delta}(f) \subseteq U_{K,\varepsilon}(f)$. Esto demuestra (b).

Demostremos (a): Sea $\varepsilon > 0$. Evidentemente existe n tal que :

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\| f-g\|_m}{1+\| f-g\|_m} < \varepsilon/2$$

para toda $g \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. Esto por ser $\| f-g\|_{m/1+\| f-g\|_m} < 1$. Por otra parte, por ser $\frac{\| f-g\|_m}{1+\| f-g\|_m} < \| f-g\|_m$, se tiene

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} \frac{\| f-g\|_m}{1+\| f-g\|_m} < \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} \| f-g\|_m < \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m}\right) \|f-g\|_n \leqslant \|f-g\|_n .$$

Se deduce que :

$$d(f,g) < \| f-g\|_n + \varepsilon/2$$

y de ésto que :

$$U_{K,\varepsilon/2}(f) \subseteq B_{\varepsilon}(f) .$$

Esto demuestra (a) y completa la demostración del teorema.

***Corolario*.** Para que un subconjunto $\mathcal{F}$ de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ sea cerrado para τ_C, es necesario y suficiente que se cumpla la condición siguiente : si $\{ f_n \}$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{F}$, y si $f_n \to f$ para τ_C, entonces $f \in \mathcal{F}$

Demostración. En efecto, esta es la condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea cerrado en un espacio métrico.

Nota. Evidentemente, decir que una sucesión $\{ f_n \}$ de funciones en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ converge hacia $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ para τ_C es equivalente a decir que $f_n \to f$ uniformemente en compactos de Ω ; o lo que es lo mismo, que

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_K = 0$$

para todo $K \subseteq \Omega$, K compacto .

Definición 1.2. Sea Ω localmente compacto, enumerable al infinito. Una sucesión de funciones $\{ f_n \}$ en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ se dice una sucesión de Cauchy para τ_C, si para todo compacto K de Ω

$$\lim_{n, m \to \infty} \| f_n - f_m \|_K = 0 \quad .$$

Nota. En verdad no es costumbre hablar de sucesiones de Cauchy para una topología. El teorema siguiente justifica, sin embargo, esta terminología.

Teorema 1.5. Para que una sucesión $\{ f_n \}$ de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ sea de Cauchy para τ_C, es necesario y suficiente que para toda $\{ K_n \}$, sucesión exhaustiva de compactos de Ω, $\{ f_n \}$ sea una sucesión de Cauchy para la métrica

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \quad \frac{\| f - g \| K_n}{1 + \| f - g \| K_n}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea n lo suficientemente grande para que $\sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2^m} \cdot \frac{\| f-g \|_m}{1 + \| f-g \|_m} \right) < \varepsilon$. Entonces $d(f,g) < \| f-g \|_n + \varepsilon$. Si $\{ f_p \}$ es una sucesión de Cauchy para τ_C, $\lim_{p,q \to \infty} d(f_p, f_q) \leq \varepsilon + \lim_{p,q\to\infty} \| f_p - f_q \|_n = \varepsilon$. Como ε es arbitrario, $\lim_{p,q \to \infty} d(f_p, f_q) = 0$, y $\{ f_p \}$ es una sucesión de Cauchy para d. Recíprocamente

$$\frac{\| f_p - f_q \|_n}{1 + \| f_p - f_q \|_n} < 2^n d(f_p, f_q).$$

Por lo tanto, si $\{ f_p \}$ es de Cauchy para d,

$$\lim_{p,q \to \infty} \frac{\| f_p - f_q \|_n}{1 + \| f_p - f_q \|_n} = 0.$$

Esto implica que $\lim_{p,q \to\infty} \| f_p - f_q \|_n = 0$ y completa la demostración.

Teorema 1.6. *Sea Ω localmente compacto, enumerable al infinito. Entonces el espacio $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ es completo para la topología de la convergencia compacta. Es decir, si $\{ f_n \}$ es una sucesión de Cauchy para τ_C, existe f en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ tal que $f_n \to f$ en compactos.*

La demostración resultara inmediatamente de los dos lemas siguientes :

Lema 1.1. Si $\{ f_n \}$ es una sucesión en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ y $f_n \to f$ en compactos, entonces $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$.

Demostración. Sea K una vecindad compacta de $a \in \Omega$. Para $x \in K$,

$$\| f(a) - f(x) \| \leq \| f(a) - f_k(a) \| + \| f_k(x) - f(a) \| + \| f_k(a) - f_k(x) \|$$

$$\| f_k(a) - f_k(x) \| .$$

Si $\varepsilon > 0$, para $k \geq k_o$, k_o losuficientemente grande,

$$|| f - f_k ||_K < \varepsilon/2$$

de lo cual,

$$|| f(a) - f(x) || < \varepsilon + || f_k(a) - f_k(x) || .$$

Como f_k es continua,

$$\underset{x \to a}{Lím} \; || f(a) - f(x) || \leqq \varepsilon + \underset{x \to a}{lím} \; || f_k(a) - f_k(x) || = \varepsilon.$$

Se deduce que

$$\underset{x \to a}{Lím} \; || f(a) - f(x) || = 0$$

y de ésto la afirmación.

Lema 1.2. Sea f_n una sucesión de Cauchy en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ para τ_C . Entonces para todo $x \in \Omega$, $\{ f_n(x) \}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}_n$; y si $f : \Omega \to \mathbb{R}_n$ está definida por $f(x) = \underset{n \to \infty}{lím} f_n(x)$, $f_n \to f$ en compactos.

Demostración. Como

$$|| f_n(x) - f_m(x) || = || f_n - f ||_{\{x\}}$$

y $\{x\}$ es compacto, se deduce que

$$\underset{n, m \to \infty}{Lím} \; || f_n(x) - f_m(x) || = 0$$

y $\{ f_n(x) \}$ es entonces una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}_n$. Sean K un compacto de Ω , $\varepsilon > 0$, $N, M > 0$ tales que $|| f_n - f_m ||_K < \varepsilon$ si $n \geq N$ y $m \geq M$. Si $x \in K$,

$$|| f_n(x) - f(x) || = \underset{n \to \infty}{Lím} \; || f_n(x) - f_m(x) ||$$

Por lo tanto, si $n \geq N$,

$$||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon$$

por ser

$$||f_n(x) - f_m(x)|| < ||f_n - f_m||_K < \varepsilon$$

cuando $m \geq M$. Como $x \in K$ es arbitrario,

$$||f_n - f||_K = \underset{x \in K}{Sup} \; ||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon$$

para $n \geq N$, y la afirmación resulta de ésto.

2. *Convergencia compacta en* $\mathcal{O}(\Omega)$.

Teorema 2.1. $\mathcal{O}(\Omega)$ *es un* C*-subespacio cerrado de* $C(\Omega, C)$ *para* τ_C.

Demostración. Nótese en primer lugar que una función $f \in C(\Omega, C)$ es holomorfa en Ω si y sólo si la restricción de f a todo subconjunto abierto convexo $\Omega' \subseteq \Omega$ es holomorfa en Ω' Sea entonces $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{O}(\Omega)$ y supóngase que $f_n \to f$ en compactos de Ω. Sea Ω' un abierto convexo de Ω. Para demostrar que f es holomorfa en Ω' basta demostrar que si $\rho \in S_1(\Omega')$ es cerrada,

$$\int_\rho f \; dz = 0 .$$

Pero si $K = Im\,\rho$, K es compacto, y

$$\left| \int_\rho f\,dz - \int_\rho f_n\,d_z \right| \leq \underset{x \in K}{Sup} \; |f(x) - f_n(x)| \int_0^1 |\rho'(t)|\,dt \quad ,$$

de lo cual,

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_\rho f_n\,dz = \int_\rho f\,dz .$$

Esto demuestra el teorema.

Denotemos por τ'_C a la restricción a $\mathcal{O}(\Omega)$ de la topología τ_C de $C(\Omega, C)$. τ'_C se denomina la *topología de la convergencia compacta sobre* $\mathcal{O}(\Omega)$, y esta definida por las seminormas

$$\| f \|_K = \sup_{z \in K} \| f(z) \|,$$

donde $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y K es un subconjunto compacto de Ω.

Nota. Claramente τ'_C es la restricción a $\mathcal{O}(\Omega)$ de τ_d, donde d es la métrica asociada a una sucesión exhaustiva de compactos de Ω.

***Teorema* 2.2.** *$\mathcal{O}(\Omega)$ es un espacio métrico completo. Es decir, toda sucesión de Cauchy en $\mathcal{O}(\Omega)$ para τ_C es convergente para dicha topología.*

Demostración. Como $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $C(\Omega, C)$ para τ'_C, $f_n \to f \in C(\Omega, C)$ para τ_C. Como $\mathcal{O}(\Omega)$ es cerrado, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y $f_n \to f$ para τ'_C. El teorema está demostrado.

El siguiente teorema jugará un papel importante en el próximo capítulo. Como veremos también, más adelante, implica una interesantísima coincidencia de topologías sobre $\mathcal{O}(\Omega)$. Recordamos primero el siguiente lema, demostrado en el capítulo VI.

***Lema* 2.1.** Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si definimos inductivamente

$$f^{(o)} = f$$
$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})',$$

para $K \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ siempre existe y $f^{(k)} \in \mathcal{O}(\Omega)$. Además, si $a \in \Omega$ y $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$, entonces, para todo $b \in B_\varepsilon(a)$,

$$f^{(k)}(b) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{c_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}\, dz .$$

Tenemos entonces :

Teorema 2.3. (Weierstrass). *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones en* $\mathcal{O}(\Omega)$ *, y supongamos que* $f_n \to f$ *uniformemente en compactos de* Ω *. Entonces , para todo* $k \in \mathbb{N}$ *,* $f_n^{(k)}$ *converge uniformemente en compactos de* Ω *.*

Demostración . Demostremos primero que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ sobre toda bola cerrada $B_r(a)$ tal que $B_r(a) \subseteq \Omega$. Una vez hecho esto la afirmación resultará para todo compacto $K \subseteq \Omega$, pues K puede ser recubierto por un *número finito* de tales bolas, y si $B_1, \ldots, B_p$ recubren a K,

$$\| f_n^{(k)} - f^{(k)} \|_K \leq \sum_{k=1}^{p} \| f_n^{(k)} - f^{(k)} \|_{B_k}$$

de lo cual la afirmación. Sea entonces $B_r(a) \subseteq \Omega$, y sea $s > r$ tal que $B_s(a)$ esté aún contenida en Ω . Como $B_r(a) \subseteq B_s(a)$, para todo $b \in B_r(a)$

$$f_n^{(k)}(b) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_s(a)} \frac{f_n(z)}{(z-b)^{k+1}}\, dz .$$

Pero, para $z \in Im\, C_s(a)$, $|z-b| \geq |s-r| > 0$.

Por lo tanto,

$$| f_n^{(k)}(b) - f^{(k)}(b) | \leq \frac{k!}{2\pi i} \frac{1}{|s-r|^{k+1}} \sup_{z \in B_s(a)} | f_n(z) - f(z)| \cdot (2\pi s),$$

O sea :

$$\sup_{b \in B_r(a)} |f_n^{(k)}(b) - f^{(k)}(b)| \leq \frac{s k!}{|s-r|^{k+1}} \| f_n - f \|_{B_r(a)} .$$

Como

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \|_{B_s(a)} = 0 ,$$

también

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n^{(k)} - f^{(k)} \|_{B_r(a)} = 0 ,$$

y el teorema está demostrado.

Definición 2.1. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funciones en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, Ω abierto en $\mathbb{R}_m$, se dice convergente para τ_C, si la sucesión

$$g_m = \sum_{m=1}^{n} f_n$$

es convergente para τ_C. Claramente se tiene, entonces, el siguiente corolario del anterior teorema :

Corolario. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{O}(\Omega)$, y supóngase que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en compactos hacia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$$

converge uniformemente, en compactos, hacia $f^{(k)}$.

También se tienen, evidentemente, los siguientes resultados :

Teorema 2.4 . *Para que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *de funciones en* $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ *sea convergente para* τ_C *es necesario y suficiente que la sucesión*

$$g_{mn} = \sum_{k=m}^{m+n} f_k$$

sea convergente a cero para τ_C *cuando* $(m,n) \to \infty$.

Teorema 2.5 . *Sea* Ω *abierto en* C, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones en* $\mathcal{O}(\Omega)$ *Entonces, si* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge en compactos de* Ω, *la función*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

es holomorfa en Ω .

Teorema 2.6. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones en* $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$*, la cual es convergente en compactos. Entonces, la sucesión* $\{f_n\}$ *es convergente, en compactos, a* 0 .

Teorema 2.7. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *una serie de funciones en* $C(\Omega, \mathbb{R})$ *convergente en compactos, y sea* $\rho \in S_1(\Omega)$. *Sea* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. *Entonces*

$$\int_\rho f\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\rho f_n\, dz .$$

Si, por otra parte, $\sigma \in S_2(\Omega)$,

$$\int_\sigma f\, dz \wedge d\bar{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\sigma f_n\, dz \wedge d\bar{z} .$$

3. Convergencia simple y convergencia absoluta. Convergencia absoluta en compactos.

Sea Ω un espacio topológico localmente compacto, enumerable al infinito .

Definición 3.1. Una sucesión de funciones $f_n \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ se dice *simplemente convergente en* Ω , si existe una función $f : \Omega \to \mathbb{R}_n$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) ,$$

para todo $x \in \Omega$.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se dice *simplemente convergente en* Ω si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es convergente en Ω .

Teorema 3.1. *Si una sucesión o una serie de funciones es convergente en compactos, entonces es simplemente convergente.*

Demostración. Inmediata.

Definición 3.2. Si para todo compacto K de Ω

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_K$$

e es convergente, Σf_n se dice absolutamente convergente en compactos.

Teorema 3.2. *Si una sucesión o una serie de funciones es absolutamente convergente en compactos, entonces es absolutamente convergente.*

Demostración . Inmediata.

Teorema 3.3. *Si una serie de funciones es absolutamente convergente entonces es simplemente convergente.*

Nota. Nótese que si $\{ f_n \}$ es una sucesión de funciones en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} | f_n(x) | = f(x)$, no es posible concluir que exista el límite simple de $\{f_n\}$.

Teorema 3.4. *Si* Σf_n *es absolutamente convergente en compactos entonces es uniformemente convergente en compactos.*

Demostración : Clara .

4. El Teorema de Liouville y el teorema fundamental del álgebra.

El lema 2.1 del Nº 2 tiene una importante consecuencia.

Teorema 4.1. (Estimativas de Cauchy). *Sean* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *y* $a \in \Omega$. *Entonces, para todo* $r > 0$ *tal que* $B_r(a) \subseteq \Omega$,

$$\frac{1}{n!} \; | f^{(n)}(a) \; | \; \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

donde

$$M(r) = \sup_{|z-a| = r} |f(z)| .$$

Demostración : En efecto ,

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz .$$

De esto,

$$\frac{1}{n!} | f^{(n)}(a) | \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|z-a|=r} | f(z)| \cdot \frac{1}{r^n} \int_0^1 d\theta = \frac{M(r)}{r^n} .$$

Esto demuestra el teorema.

Tenemos entonces :

Teorema 4.2. (Liouville) . *Si $f \in \mathcal{O}(C)$ y si existe $M > 0$ tal que $| f(z)| \leq M$ para todo $z \in C$, entonces f es constante en C .*

Demostración . En efecto, para todo $r > 0$ y todo $a \in C$,

$$| f'(a) | \leq \frac{M(r)}{r} \leq \frac{M}{r} .$$

Por lo tanto,

$$| f'(a) | = \lim_{r \to \infty} | f'(a) | \leq \lim_{r \to \infty} \frac{M}{r} = 0 ,$$

de lo cual $f'(a) = 0$. Esto demuestra el teorema.

Como consecuencia del teorema de Liouville es posible dar una demostración del teorema fundamental del álgebra. Recordamos que por un polinomio en C se entiende una aplicación $f : C \to C$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n , \quad a_k \in C , \quad m \in \mathbb{N} .$$

Es claro que $C[z] \subseteq \mathcal{O}(C)$, donde $C[z] = \{ f : C \to C \mid_f$ es un polinomio en C }, y que $C[z]$ es un C-subespacio de $\mathcal{O}(C)$. Es además fácil de ver (Ejercicio 8) que si $f \in C[z]$, sólo hay dos alternativas para f: que $f(z) = a_o$ para todo $z \in C$, o que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty .$$

En el segundo caso se dice que f tiene grado ≥ 1. Se tiene entonces :

Teorema 4.3. (Teorema fundamental del álgebra). *Si $f \in C[z]$ tiene grado ≥ 1, existe entonces $\alpha \in C$ tal que $f(\alpha) = 0$.*

Demostración. Supongamos $f(z) \neq 0$ para todo $z \in C$, y sea $g(z) = 1/f(z)$. Como $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$, necesariamente g es acotada en C. Como además $g \in \mathcal{O}(C)$, entonces g, y por lo tanto f, son constantes. Este absurdo demuestra el teorema.

5. *Equicontinuidad.*

Definición 5.1. Un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ se dice equicontinuo en un punto $a \in \Omega$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad V de a, tal que

$$\| f(a) - f(x) \| < \varepsilon$$

para toda $f \subset \mathcal{F}$ y todo $x \subset V$.

En otras palabras, $\mathcal{F}$ es equicontinua en a si, para todo $\varepsilon > 0$, es posible encontrar una vecindad V de a tal que

$$V \subseteq \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))),$$

o lo que es lo mismo, que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$$

es una vecindad de a.

***Definición* 5.2.** Si $\mathcal{F}$ es equicontinuo en todo punto $a \in \Omega$, diremos $\mathcal{F}$ es equicontinuo en Ω, o símplemente, que $\mathcal{F}$ es equicontinuo.

Como $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ es, cuando Ω es enumerable al infinito, un espacio métrico, para que un subconjunto $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ sea relativamente compacto, es necesario y suficiente que de toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ se pueda extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \to f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ para τ_C. Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto relativamente compacto de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. Entonces, para todo $a \in \Omega$, $\mathcal{F}(a) = \{ f(a) \mid f \in \mathcal{F} \}$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}_n$. En efecto, si $a_n = f_n(a) \in \mathcal{F}(a)$ y si f_{n_k} es una subsucesión de f_n convergente en compactos hacia f, a_{n_k} es una subsucesión de a_n convergente hacia $a = f(a)$. Por otra parte :

***Teorema* 5.1.** *Si Ω es localmente compacto y $\mathcal{F}$ es relativamente compacto, $\mathcal{F}$ es equicontinuo.*

***Demostración*.** Sean $a \in \Omega$, $\varepsilon > 0$. Sea $\varepsilon' = \varepsilon/3$. Sea K una vecindad compacta de a. Claramente existen $f_1, \ldots, f_n$ en $\mathcal{F}$ tales que $\{ U_{K,\varepsilon'}(f_k)$ $k = 1, 2, \ldots, n \}$ es un recubrimiento de $\mathcal{F}$. Como cada f_k es continua en a, existe una vecindad V_k de a tal que $f_k(x) \in B_{\varepsilon'}(f_k(a))$ si $x \in V_k$. Sea $V' = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$. Si $x \in V'$, $f_k(x) \in B_{\varepsilon'}(f_k(a))$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n$. Sea ahora $f \in \mathcal{F}$ arbitrario. Entonces $f \in U_{K,\varepsilon'}(f_k)$ para algún k. De esto, $\| f(x) - f_k(x) \| < \varepsilon'$ para todo $x \in K$. Ahora,

$$\| f(x) - f(a) \| \leq \| f(x) - f_k(x) \| + \| f_k(x) - f_k(a) \| + \| f_k(a) - f(a) \| .$$

Por lo tanto,

$$|| f(x) - f(a) || < 3 \varepsilon' = \varepsilon ,$$

si $x \in V = V' \cap K$. Esto demuestra el teorema.

Recíprocamente (véanse antes los ejercicios 25 y 26) :

***Teorema* 5.2** . (Ascoli - Arzelá). *Si Ω es un espacio localmente compacto, y si $\mathcal{F}$ es un subconjunto de $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$ tal que*

1) $\mathcal{F}$ es equicontinuo .

2) Para todo $a \in \Omega$, $\mathcal{F}(a)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}_m$ (es decir, acotado en $\mathbb{R}_m$) , entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$ para τ_C .

Demostración . Como, para todo $x \in \Omega$, $\mathcal{F}(x)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}_m$, $\prod_{x \in} \overline{\mathcal{F}(x)}$ es por lo tanto compacto en $\prod_{x \in \Omega} \mathbb{R}_m = R_m^{\Omega}$ (Teorema de Tychonoff) . Sea entonces

$$\phi : \overline{\mathcal{F}} \to \prod_{x \in \Omega} \overline{\mathcal{F}(x)}$$

definida por $\phi(f) = (f(x))_{x \in \Omega}$. Evidentemente ϕ es biyectiva. Recordamos ahora que para cada punto $(f(x))_{x \in \Omega}$ los conjuntos

$$V(f, a_1, \ldots, a_n, \varepsilon) = \{ (g(x))_{x \in \Omega} \mid || f(a_k) - g(a_k) || < \varepsilon \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n \}$$

forman un sistema fundamental de vecindades de $(f(x))_{x \in \Omega}$. Veamos que ϕ es continua cuando se da a $\overline{\mathcal{F}}$ la topología inducida por τ_C. Escribamos

$$U'_{K, \varepsilon}(f) = U_{K, \varepsilon}(f) \cap \overline{\mathcal{F}}$$

Sea: $K = \{ a_1, \ldots, a_n \}$. Evidentemente K es compacto y

$$U'_{K, \varepsilon}(f) \subseteq \phi^{-1}(V(f, a_1, \ldots, a_n, \varepsilon)).$$

De ésto, la afirmación. Veamos ahora que ϕ es abierta, de lo cual, un **homeomorfismo**. Sean K un compacto de Ω, $\varepsilon > 0$, $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Como $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinuo, para cada $a \in K$ existe una vecindad $V(a)$ de a tal que si $x \in V(a)$, $\| f(a) - f(x) \| < \varepsilon/3$ para toda $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $K \subseteq V(a_1) \cup V(a_2) \cup \ldots \cup V(a_n)$. Veamos que

$$\phi\,(U'_{K,\varepsilon}(f)) \supseteq V(f, a_1, \ldots, a_n, \varepsilon/3) = V.$$

En efecto, si $(g(x))_{x \in \Omega} \in V$, $\| g(a_i) - f(a_i) \| < \varepsilon/3$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea ahora $x \in K$. Se tiene que $x \in V(a_i)$ para algún $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, $\| f(x) - g(x) \| \leq \| f(x) - f(a_i) \| + \| f(a_i) - g(a_i) \| + \| g(a_i) - g(x) \| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Esto demuestra que

$$\| f - g \| = \sup_{x \in K} \| f(x) - g(x) \| < \varepsilon,$$

lo cual completa la demostración.

Nota. Los teorema 5.1 y 5.2, así como sus demostraciones, no requieren ninguna hipótesis adicional sobre Ω, salvo la de ser un espacio topológico localmente te compacto. Lo mismo es cierto del siguiente corolario. Nótese primero que si $\mathcal{F}$ es compacto en $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$, $\mathcal{F}(a)$ es compacto en $\mathbb{R}_m$. Se tiene entonces el siguiente corolario del teorema de Ascoli :

Corolario 1. Sea $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_m)$. Las proposiciones siguientes son equivalentes :

1) $\mathcal{F}$ es relativamente compacto (resp. : compacto) en $C(\Omega, \mathbb{R}_m)$

2) $\mathcal{F}$ es equicontinuo y $\mathcal{F}(a)$ es relativamente compacto (resp. : compacto) para todo $a \in \Omega$.

En caso de ser Ω enumerable al infinito, se tiene

Corolario 2. Si Ω es localmente compacto, enumerable al infinito, y $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, las proposiciones siguientes son equivalentes:

1) $\mathcal{F}$ es equicontinuo, y para todo $a \in \Omega$, $\mathcal{F}(a)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}_m$.

2) De toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ puede extraerse una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ convergente en compactos hacia $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$.

Nota. Si en el corolario anterior $\mathcal{F}$ es cerrado, $f \in \mathcal{F}$. Esto es así, por ejemplo, si $\mathcal{F}(a)$ es siempre compacto.

Ejercicios

1. Sea Ω un espacio localmente compacto el cual es reunión de un número enumerable de conjuntos compactos. Demuestre que Ω es enumerable al infinito.
2. Sea Ω un espacio métrico localmente compacto el cual tiene un subconjunto enumerable A, denso en Ω. Demuestre que Ω es enumerable al infinito. Concluya que todo abierto de $\mathbb{R}_n$ es enumerable al infinito.
3. Sea Ω un espacio métrico. Demuestre que para todo conjunto relativamente compacto $K \subseteq \Omega$ y todo $\varepsilon > 0$ existen $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(a_k)$.
4. Sea Ω un espacio métrico, $K \subseteq \Omega$ un conjunto compacto. Use el ejercicio anterior para demostrar que existe un subconjunto $K' \subseteq K$, K' enumerable y denso en K (Ind. Para todo $r > 0$, racional, existe un subconjunto S_r de K, finito, y tal que
$$K \subseteq \bigcup_{a \in S_r} B_r(a).$$

Sea $K' = \bigcup_{\substack{r \in Q \\ r > 0}} S_r)$.

5. Sea Ω un espacio métrico localmente compacto, enumerable al infinito. Demuestre que existe $A \subseteq \Omega$, enumerable y denso en Ω. En otras palabras, un espacio métrico localmente compacto es enumerable al infinito y sólo si es separable (es decir, tiene un subconjunto enumerable denso). Demuestre que un espacio métrico es separable si y sólo si su topología tiene una base enumerable.

6. Complete los detalles de las demostraciones de los teoremas 1.1, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 .

7. De ejemplos de :

   a) Una serie de funciones en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, simplemente convergente y no absolutamente convergente.

   b) Una serie de funciones convergente en compactos y no absolutamente convergente.

   c) Una serie de funciones convergente en compactos y no absolutamente convergente en compactos.

8. Sea $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \in C[z]$. Diremos que f tiene grado n si y sólo si $a_n \neq 0$. Un polinomio de grado 0 es constante y diferente de 0. El polinomio $f(z) = 0$ no tiene grado. Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes para $f \in C[z]$:

   1) $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$

   2) f no es constante

   3) f tiene grado ≥ 1.

9. Sea $f \in C[z]$. Demuestre que si

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_o = b_m z^m + \cdots + b_o$$

entonces $m = n$ y $a_k = b_k$ para $k = 0,1,2, \ldots, n$. Concluya que el grado de un polinomio $\neq 0$ es un número ≥ 0 perfectamente determinado (el cual se denota por $deg(f)$). Demuestre que $deg(fg) = deg(f) + deg(g)$, si $f \neq 0 \neq g$. Concluya que $C[z]$ es un dominio de integridad.

10. Demuestre que $\{ z^n \mid n \geq 0 , n \in \mathbb{N} \}$ es una base sobre C de $C[z]$.

11. Sean $f, g \in C[z]$, $f \neq 0 \neq g$. Demuestre que existen polinomios $q, r \in C[z]$, con $r = 0$ o $deg(r) < deg(g)$, tales que

$$f = gq + r \qquad \text{(Algoritmo de Euclides)}$$

12. Sea $f \in C[z]$. Demuestre que si $f \neq 0$ y $f(\alpha) = 0$, existen $g \in C[z]$ y un único número $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tales que

$$f(z) = (z - \alpha)^n g(z).$$

13. Sea $f \in C[z]$, $f \neq 0$. Demuestre que si $Z(f) = \{ \alpha \in C \mid f(\alpha) = 0 \}$ entonces $Z(f)$ tiene p elementos, donde $p \leq deg(f)$.

14. Sean $f \in C[z]$, $f \neq 0$, $Z(f) = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \}$. Demuestre que

$$f(z) = (z_1 - \alpha_1)^{n_1} (z_2 - \alpha_2)^{n_2} \cdots (z_p - \alpha_p)^{n_p}$$

donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = deg(f)$.

15. Sea $K = Z, Q, \mathbb{R}, C$. Denotaremos por $K[z]$ al subdominio de $C[z]$ de los polinomios $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_o$ con $a_k \in K$ para $k = 0,1,2,..,n$. Un polinomio $f \in K[z]$, $deg(f) > 0$, se dice irreducible sobre K. si

no existen dos polinomios g, h , $0 < deg(g) \leq deg(h) < deg(f)$, tales que $f = g \cdot h$. Demuestre que los únicos polinomios en $C[z]$, irreducibles sobre C , son los de grado $= 1$. Si $K = Q, I\!R, C$, los únicos elementos de $K[z]$, invertibles, son los polinomios de grado 0 . (Es costumbre identificar a $f(z) = a_0$ con a_0 . Entonces $K \subseteq K[z]$ y $K - \{0\}$ es el conjunto de los elementos invertibles de $K[z]$). Cuáles son los elementos invertibles de $K[z]$

16. Sea $f \in I\!R[z]$. Demuestre que si $\alpha \in C$ es tal que $f(\alpha) = 0$, también $f(\bar{\alpha}) = 0$. Concluya que si $f \in I\!R[z]$ es de grado impar, existe $\alpha \in I\!R$ tal que $f(\alpha) = 0$.

17. Sea $f(z) = az^2 + bz + c \in C[z]$, $a \neq 0$. Demuestre que si $b^2 - 4ac \geq 0$,

$$Z(f) = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} , \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

y que si $b^2 - 4ac < 0$,

$$Z(f) = \left\{ \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} , \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \right\} .$$

Demuestre que, en general,

$$Z(f) = \left\{ \frac{-b + w_1}{2a} , \frac{-b + w_2}{2a} \right\}$$

donde w_1, w_2 son las dos raíces de $b^2 - 4ac$.

18. Sea $f(z) = az^2 + bz + c \in I\!R[z]$. Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes :

a) f es irreducible sobre $I\!R$.

b) Existe $\alpha \in C - I\!R$ tal que $f(\alpha) = 0$.

c) $b^2 - 4ac < 0$.

19. Demuestre que los únicos polinomios en $\mathbb{R}[z]$, irreducibles sobre $\mathbb{R}$, son los de grado 1 y los de la forma $f(z) = az^2 + bz + c$ con $b^2 - 4ac < 0$.

20. Sea P un conjunto de subconjuntos del espacio topológico Ω . Para cada $A \in P$ y $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ se define

$$\| f \|_A = \sup_{x \in A} \| f(x) \|$$

y luego

$$U_{A,\varepsilon}(f) = \{ g \in C(\Omega, \mathbb{R}_n) \mid \| f - g \|_A < \varepsilon \} \quad , \quad \varepsilon > 0 .$$

Un subconjunto U de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ se dice entonces abierto si para toda $f \in U$ existen $A \in P$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$U_{A,\varepsilon}(f) \subseteq U .$$

Demuestre que el conjunto τ_P de todos los subconjuntos abiertos de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ es una topología sobre $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ para la cual $\{ U_{A,\varepsilon}(f) \mid A \in P , \varepsilon > 0 \}$ es un sistema fundamental de vecindades. Si P es el conjunto de los compactos de Ω , $\tau_P = \tau_C$. Si P es el conjunto de los subconjuntos finitos de Ω , τ_P se denomina la topología de la convergencia simple y se denota por τ_F .

a) Demuestre que si $\{ f_n \}$ es una sucesión en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$, $f_n \to f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ para τ_F si y sólo si

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in \Omega$.

b) b) Demuestre que una serie de funciones en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ converge a τ_F si y sólo si converge simplemente .

c) Demuestre que si se da a $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ la topología de la convergencia simple, la aplicación

$$\begin{aligned} \psi : C(\Omega, \mathbb{R}_n) &\to \prod_{x \in \Omega} C_x \\ \psi(f) &= (f(x))_{x \in \Omega} \end{aligned}$$

donde $C_x = \{ f(x) \mid f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n) \}$, es un homeomorfismo .

d) Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto equicontinuo de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. Demuestre que sobre $\mathcal{F}$ las topologías inducidas por τ_C y τ_F coinciden .

e) De ejemplo de una sucesión de Cauchy en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ para τ_F la cual no sea convergente a ninguna $f \in C(\Omega, \mathbb{R}_n)$.

f) Demuestre que si Ω es un espacio topológico separado, finito, entonces $\tau_F = \tau_C$.

g) Demuestre que si Ω es un espacio discreto entonces $\tau_F = \tau_C$.

21. Sea $\rho : C(\Omega, \mathbb{R}_n) \times C(\Omega, \mathbb{R}_n) \to C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ definida por $\rho(f, g) = f + g$. Demuestre que ρ es continua para τ_C . Lo mismo es cierto de las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times C(\Omega, \mathbb{R}_n) &\to C(\Omega, \mathbb{R}_n) \\ (\lambda, f) &\to \lambda f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(\Omega, \mathbb{R}_n) \times C(\Omega, \mathbb{R}_n) &\xrightarrow{\pi} C(\Omega, \mathbb{R}_n) \\ (f, g) &\to fg \, . \end{aligned}$$

22. Sea Ω un espacio topológico compacto', $\{ f_n \}$ una sucesión de funciones en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. Sea $P = \{ \Omega \}$. Demuestre

a) $\tau_P = \tau_C$

b) Si $a_n = \| f_n \|_\Omega$, entonces $f_n \to 0$ para τ_C si y sólo si $a_n \to 0$ en $\mathbb{R}$.

23. Sea Ω un espacio topológico localmente compacto enumerable al infinito, $\{ K_n \}$ una sucesión exhaustiva de compactos de Ω. Sea $\{ f_n \}$ una sucesión de funciones en $C(\Omega, \mathbb{R}_p)$. Sea $a_{mn} = \| f_m \|_{K_n}$.

Demuestre que si $\lim\limits_{(m,n)} a_{mn} = 0$ entonces $f_n \to 0$ para τ_C. De un ejemplo que muestre que la recíproca es falsa.

24. Sea $\{ f_n \} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $f_n \to f$ para τ_C. Demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \int_K f_n \, dx_1 \ldots dx_p = \int_K f \, dx_1 \ldots dx_p$$

para todo compacto $K \subseteq \Omega$. Concluya que si $\rho \in S_1(\Omega)$ y $p=2$,

$$\int_\rho w_n \to \int_\rho w$$

si $w_n = f_n \, dx + g_n \, dy$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ para τ_C y $w = f \, dx + y \, dy$. Demuestre que

$$\int_\rho f_n \, dx \wedge dy \to \int_\rho f \, dx \wedge dy$$

si $f_n \to f$ para τ_C y $\rho \in S_2(\Omega)$.

25. Sea Ω un espacio localmente compacto. Demuestre que un subconjunto $\mathfrak{F}$ de $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ es equicontinuo si y sólo si $\overline{\mathfrak{F}}$, su clausura en $C(\Omega, \mathbb{R}_n)$ para τ_C también lo es.

Indicación : Dados $a \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ existe una vecindad compacta K de a tal que $\| g(x) - g(a) \| < \varepsilon/2$ para toda $g \in \mathfrak{F}$ y todo $x \in K$. Sea $f \in \overline{\mathfrak{F}}$ y tómese $g \in \mathfrak{F} \cap U_{k,\, \varepsilon/2}(f)$ para concluir que entonces $\| f(x) - f(a) \| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

26. Sea $\mathfrak{F} \subseteq C(\Omega, \mathbb{R}_n)$. Demuestre que $\overline{\mathfrak{F}}(x) = \overline{\mathfrak{F}(x)}$.

ERRATAS

En la demostración del Lema 4.1, Capítulo V hemos encontrado un error. El comienzo de la demostración debe cambiarse como sigue : Sea $a \in \Omega$ fijo y sean $\sigma, \rho \in S_1(\Omega)$ tales que $\rho(0) = a$, $\rho(1) = z$. Es claro que ..., suprimiendo la frase $\sigma \rho^{-1} \sim 0$ por ser Ω simplemente conexo. Por lo tanto....