SOBRE LA ENSEÑANZA DE ALGUNOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO ELEMENTAL

FRANCISCO LLERAS

Dedicado a la memoria de Luis I. Soriano

Es casi regla general el que los estudiantes de ciertas carreras en cuyos estudios está incluido el Cálculo I (Cálculo Diferencial y elementos de Cálculo Integral), tengan mucha dificultad con los razonamientos previos al estudio de la Regla de L'Hôpital, tales como el Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio, veremos a continuación formas sencillas de presentar estos dos Teoremas y la regla de L'Hôpital en una forma de más fácil comprensión para este tipo de estudiantes, que las que encuentran en los textos de consulta generalmente usados (Thomas, Granville, etc.).

En primer término, es posible llegar a la regla de L'Hôpital partiendo directamente de la definición de derivada (aquí seguimos a Ch. Sturm "Cours d'Analyse de L'Ecole Polytechique", Gauthier-Villars, Paris, 1929), en la forma siguiente:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x = a$, tales que $f(a) = g(a) = 0$, con $g(x) \neq 0$ en una vecindad de a y además que $f'(a)$ y $g'(a)$ no sean ambas nulas; entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Demostración. Puesto que $f(a) = g(a) = 0$ podemos escribir

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

En esta forma es posible, inclusive, suprimir el estudio de los Teoremas de Rolle y del valor medio para ciertas carreras (Farmacia, Agronomía, Geología, etc.) sin dejar de tratar la Regla de L'Hôpital como herramienta útil en la determinación de límites de funciones.

En cuanto al Teorema de Rolle y el del valor medio, es posible presentarlos como consecuencias directas de los Teoremas del valor intermedio de la integral y del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, los cuales, y de acuerdo con el programa de Cálculo I se estudian antes de entrar a considerar la Regla de L'Hôpital.

Supuesto lo anterior, la presentación puede ser la siguiente :

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$; por el teorema del valor intermedio de la integral, existe al menos un c, $a < c < b$, tal que :

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \;;$$

pero

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \;,$$

donde $F'(x) = f(x)$ en (a,b). Por lo tanto

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \;.$$

Ahora bien, si $F(b) \neq F(a)$ obtenemos el Teorema del valor medio y si $F(b) =$

$F(a)$, el Teorema de Rolle, dado que $\dfrac{F(b) - F(a)}{b-a} = 0 = F'(c)$.

Es necesario hacer énfasis en que la función $F(x)$ se supone derivable en el intervalo (a,b) ya que está definida como una integral y además en que $F'(x)$ es continua dado que se ha supuesto la continuidad de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Esta demostración se limita pues al caso en que $F'(x)$ es continua, lo cual es suficiente en el caso de estudiantes de carreras técnicas. Se les puede explicar, en seguida, sin demostración, que esto también es válido para funciones derivables sin la restricción de la continuidad de la derivada .

* * *

Cuando escriba, diga algo.

"Parecería superfluo insistir que para decir algo bien es necesario tener algo que decir; pero esto no es broma. La mayoría de la mala literatura, matemática o de otra clase, se origina al violarse el anterior principio básico. De la misma manera como hay dos posibilidades para que una sucesión no tenga límite (que no existan puntos de acumulación o que existan muchos), hay dos maneras para que un trozo no tenga tema (que no contenga ideas o que contenga muchas)" .

P. R. Halmos
How to write mathematics
American Mathematical Society, 1973 .