Boletín de Matemáticas
Volumen VII No. 6, págs. 331 - 356

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA, II

JAIRO CHARRIS C.

CAPITULO III

HOMOLOGIA SINGULAR

1. Homología continua.

En esta sección X será un espacio topológico arbitrario, $I = [\,0,1\,]$, $I^n = \{\,(t_1,\ldots,t_n) \mid t_i \in I\,,\ i = 1,2,\ldots,n\,\}$.

Definición 1.1. Una aplicación continua $\rho : I^n \to X$ se denominará un n-cubo continuo de X. Denotaremos por $\tilde{S}_n(X)$ al conjunto de todos los n-cubos continuos de X.

Es claro que

$$\tilde{S}_1(X) = \bigcup_{a,b \in X} \tilde{S}(X\,;\,a,b)\,.$$

Convendremos en que $I^o = \{0\}$. Por lo tanto

$$\tilde{S}_o(X) = X$$

si se identifican la aplicación $\rho : I^o \to X,\ \rho(0) = x$, con el punto $x \in X$.

Definición 1.2. Una aplicación

$$f : \tilde{S}_n(X) \to Z$$

tal que su soporte,

$$Supp\, f = \{ \sigma \mid f(\sigma) \neq 0 \},$$

sea finito, se denominará una n-cadena singular de X. Denotaremos por $\tilde{C}_n(X)$ al conjunto de las n-cadenas singulares de X.

Como $\tilde{S}_o(X) = X$, $\tilde{C}_o(X)$ es el conjunto de todas las aplicaciones de X en Z tales que $f(x) = 0$ salvo para un número finito de puntos $x \in X$.

Con las leyes de composición usuales :

$$(f + g)(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma),$$

$$(\lambda f)(\sigma) = \lambda f(\sigma) \quad , \quad \lambda \in Z \quad ,$$

$\tilde{C}_n(X)$ es un Z-módulo. Si identificamos a $\sigma \in \tilde{S}_n(X)$ con la n-cadena f_σ dada por

$$f_\sigma(\rho) = \begin{cases} 1, & \sigma = \rho \\ 0, & \sigma \neq \rho \end{cases},$$

podemos considerar a $\tilde{S}_n(X)$ como un subconjunto de $\tilde{C}_n(X)$. Se tiene entonces

Teorema 1.1. *El conjunto $\tilde{S}_n(X)$ es una base, sobre Z, del Z-módulo $\tilde{C}_n(X)$.*

Demostración. Sea

$$f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \rho_k \quad , \quad \rho_k \in \tilde{S}_n(X)$$

y supongamos $f = 0$. Sea ρ_j, con $1 \leq j \leq n$. Entonces

$$f(\rho_j) = \lambda_j \quad ,$$

de lo cual $\lambda_j = 0$. Por lo tanto, $\tilde{S}_n(X)$ es *libre*. Sea ahora $f \in \tilde{C}_n(X)$ y supongamos que

$$A = Supp\, f = \{ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \}.$$

Escribamos

$$\lambda_j = f(\rho_j) ,$$

y sea

$$f' = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \rho_k .$$

Es claro que $f' \in \tilde{C}_n(X)$. Por otra parte, si $\rho \in \tilde{S}_n(X)$ y $\rho \notin A$, $f'(\rho) = f(\rho) = 0$; y si $\rho = \rho_k \in A$,

$$f'(\rho) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \rho_j(\rho_k) = \lambda_k = f(\rho) .$$

Esto demuestra que $f' = f$ y que $\tilde{S}_n(X)$ es un *sistema de generadores* de $\tilde{C}_n(X)$. El teorema está demostrado.

Ejemplo 1.1. Los 2 cubos de $X = \mathbb{R}_2$ definidos por

$$c^n_{r_1 r_2}(a)\,(\theta, t) = a + (r_2\theta + r_1(1-\theta)))\, e^{2\pi int}$$

donde $0 \leq r_1 \leq r_2$, $n \in Z$, $a \in \mathbb{R}_2$, se denominan las 2-coronas de $\mathbb{R}_2$ con: (1) centro en a ; (2) radio interior r_1 ; (3) radio exterior r_2 ; (4) índice n .

Tales 2-cubos juegan un importante papel en análisis complejo de una variable. En el caso $r_1 = 0$ tales coronas reciben el nombre de 2-discos, con las especificaciones anteriores, y en lugar de $c^n_{r_1, r_2}(a)$ es costumbre escribir $c^n_{o\, r_2}(a)$. Si $r_1 = r_2$, tales 2-coronas reciben el nombre de 2-círculos. Si G es un abierto de $\mathbb{R}_2$ tal que

$$\{ x \mid r_1 \leq || x - a || \leq r_2 \} \subseteq G ,$$

$c^n_{r_1, r_2}(a)$ puede considerarse con un 2-cubo de G .

Nota : Nótese que $\tilde{C}_o(X)$ es el conjunto de las aplicaciones $f : X \to Z$ tales que $f(x) = 0$, salvo para un número finito de puntos. Para $n \in Z$, $n < 0$, es también costumbre definir

$$\tilde{C}_n(X) = \{0\}.$$

Para cada $n \geq 1$, y cada pareja (i,j) $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 0,1$, se define el *operador de cara* $F_j^i : I^{n-1} \to I^n$ por la relación

$$F_j^i(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} (t_1, \ldots, t_{j-1}, \delta_{1j}, t_j, \ldots, t_{n-1}) & 1 < i < n \\ (\delta_{1j}, t_1, \ldots, t_{n-1}) & i = 1 \\ (t_1, \ldots, t_{n-1}, \delta_{1j}) & i = n \end{cases}$$

donde

$$\delta_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = 1 \\ 0 & \text{si} \quad j = 0 \end{cases}$$

es el δ de Kronecker. Los operadores de cara tienen la siguiente propiedad fundamental

Lema 1.1 (a) $F_j^{i+1} \circ F_h^k = F_h^k \circ F_j^i$ si $k < i$

(b) $F_j^i \circ F_h^k = F_h^{k+1} \circ F_j^i$ si $i \leq k$

***Demostración*.** Demostraremos primero (a). Se tiene

$F_h^k(t_1, \ldots, t_{n-2}) = (t_1, \ldots, t_{k-1}, \delta_{1h}, t_k, \ldots, t_{n-2})$. Entonces

$$F_j^{i+1}(t_1, \ldots, t_{k-1}, \delta_{1h}, t_k, \ldots, t_{n-2}) = (t_1, \ldots, t_{k-1}, \delta_{1h}, t_k, \ldots, t_{i-1}, \delta_{1j}, t_i, \ldots, t_n).$$

Por otra parte,

$$F_j^i(t_1, \ldots, t_{n-2}) = (t_1, \ldots, t_{i-1}, \delta_{1j}, t_i, \ldots, t_{n-2}).$$

Por lo tanto ,

$$F_b^k(t_1, \ldots, t_{i-1}\,\delta_{1j}, t_i, \ldots, t_{n-2}) = (t_1, \ldots, t_{k-1}\,;\, \delta_{1b}, t_k, \ldots, \delta_{1j}, t_i, \ldots, t_{n-2}).$$

Esto demuestra (a). Para demostrar (b), nótese que si $i \leq k$ entonces $i\text{-}1 < k$.

Hagamos $k' = i\text{-}1$, $i' = k$. De (a) se tiene

$$F_j^{i'+1} \circ F_b^{k'} = F_b^{k'} \circ F_j^{i'}$$

o sea,

$$F_j^{k+1} \circ F_b^{i-1} = F_b^{i-1} \circ F_j^{k} \quad ,$$

de lo cual se deduce, sustituyendo i por $i+1$,

$$F_j^{k+1} \circ F_b^{i} = F_b^{i} \circ F_j^{k} ,$$

y como j, b son intercambiables,

$$F_b^{k+1} \circ F_j^{i} = F_j^{i} \circ F_b^{k}$$

Esto demuestra (b) y completa la demostración del lema .

Definición 1.3. Si $\rho \in \tilde{S}_n(X)$, $\rho_{ij} = \rho \circ F_j^i$ se denomina la (i,j) cara de ρ .

Ejemplo 1.2. Si $n=2$, $F_o^1(t) = (0,t)$, $F_1^1(t) = (1,t)$, $F_o^2(t) = (t,0)$, $F_1^2(t) = (t,1)$.

La figura 1.1 representa las cuatro caras del 2-cubo $\rho(\theta, t) = (\theta, t)$

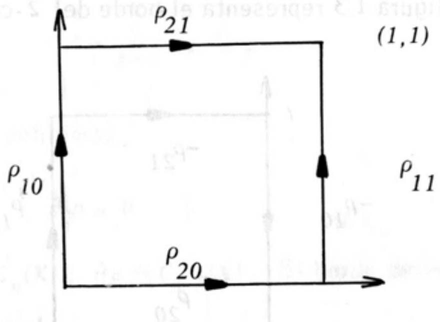

Fig. 1.1

Ejemplo 1.3. Si $n=2$ y $\sigma(\theta,t) = c^{1}_{r_1 r_2}(a) = c_{r1\,r2}(a)$, la figura 1.2 representa las cuatro caras del 2-cubo σ.

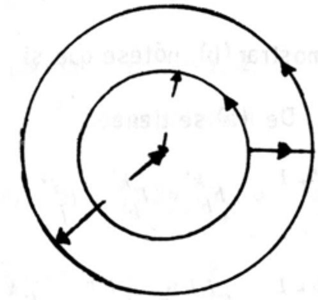

Fig. 1.2

(σ_{20} es el segmento $\vec{AB}$; σ_{21} es el segmento $\vec{AB}$; σ_{11} es el círculo de radio r_2 recorrido en su dirección positiva ; σ_{10} es el círculo de radio r_1 recorrido en su dirección positiva).

Definición 1.4. Para cada $\rho \in \tilde{S}_n(X)$, $n \geq 1$, sea

$$\partial\rho = \sum_{j=o}^{n} (-1)^i \rho_{ij} \ .$$

La $(n\text{-}1)$-cadena $\partial\rho$ se denomina el *borde* de ρ. Si $n=0$ y $\rho \subset \tilde{S}_n(X)$ definimos

$$\partial\rho = 0 \ .$$

Ejemplo 1.4. La figura 1.3 representa el borde del 2-cubo : $\rho(\theta,t) = (\theta,t)$ de $\mathbb{R}_2$

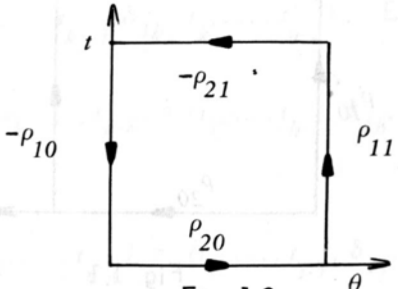

Fig. 1.3

El borde del 2-cubo $\rho(\theta,t) = (\theta,t)$ de $\mathbb{R}_2$.

Ejemplo 1.5. La figura 1.4 representa el borde del 2-cubo

$$\rho = c_{r_1, r_2}(0)$$

de $\mathbb{R}_2$

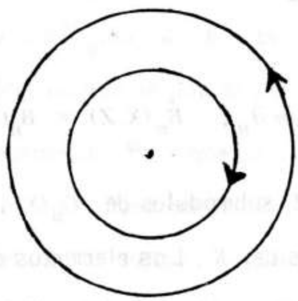

Fig. 1.4

El borde del 2-cubo $\rho = c_{r_1, r_2}(0)$ de $\mathbb{R}_2$

Nota : Un 2-cubo ρ tiene cuatro caras y $\partial\rho = \rho_{20} + \rho_{11} - \rho_{21} - \rho_{10}$

Definición 1.5. Sea $\rho \in \tilde{C}_n(X)$, $n \geq 1$,

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \rho_k \quad , \quad \rho_k \in S_n(X) \ , \ \lambda_k \in Z \ .$$

Definimos el borde de ρ por

$$\partial \rho = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \partial \rho_k \, .$$

Si $\rho \in \tilde{C}_n(X)$, $n \leq 0$, definimos

$$\partial \rho = 0 \, .$$

Es claro que si $\rho \in \tilde{C}_n(X)$, $\partial \rho \in \tilde{C}_{n-1}(X)$. El borde define entonces un operador , obviamente Z-lineal ,

$$\partial_n = \partial : \tilde{C}_n(X) \to \tilde{C}_{n-1}(X) ,$$

$$\partial_n(\rho) = \partial(\rho) = \partial\rho .$$

2. *Los grupos de homología singular continua.*

Sean

$$\tilde{Z}_n(X, Z) = \tilde{Z}_n(X) = Ker\, \partial_n , \quad \tilde{B}_n(X,Z) = \tilde{B}_n(X) = Im\, \partial_{n+1} .$$

Entonces, $\tilde{B}_n(X)$, $\tilde{Z}_n(X)$ son Z-submódulos de $\tilde{C}_n(X)$. Los elementos de $\tilde{Z}_n(X)$ se denominan los n-ciclos de X . Los elementos de $\tilde{B}_n(X)$, los n-bordes. Para $n=0$, $\tilde{Z}_n(X) = \tilde{C}_n(X)$. Para $n<0$, $\tilde{Z}_n(X) = \tilde{B}_n(X) = \{ 0 \}$.

Teorema 2.1. *Para todo* $n \geq 0$, $\tilde{B}_n(X) \subseteq \tilde{Z}_n(X)$. *Es decir, si* $\rho \in \tilde{C}_{n+1}(X)$, $\partial(\partial\rho) = 0$.

Demostración. Tenemos

$$\partial(\partial\rho) = \sum_{i,h=0}^{1} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j+h+k} \rho \circ F_h^k \circ F_i^j ,$$

lo cual se puede escribir en la forma

$$\partial(\partial\rho) = \sum_{i,h=0}^{1} \{ \sum_{k\leq j} (-1)^{i+j+k+h} \rho \circ F_h^k \circ F_j^i + \sum_{j<k} (-1)^{i+j+h+k} \rho \circ F_h^k \circ F_i^j \}.$$

Introduciendo las notaciones

$$B_{ih} = \sum_{k\leq j} (-1)^{i+j+h+k} \rho \circ F_h^k \circ F_i^j ,$$

$$A_{ih} = \sum_{j\leq k-1} (-1)^{i+j+h+k} \rho \circ F_i^j \circ F_h^{k-1} ,$$

se comprueba inmediatamente que

$$A_{ih} = \sum_{j<k} (-1)^{i+j+h+k} \rho \circ F_h^k \circ F_i^j .$$

Ahora, sustituyendo j por k y $k-1$ por j en la definición de A_{ih}, se tiene

$$A_{ih} = (-1) \sum_{k \leq j} (-1)^{i+j+h+k} \rho \circ F_i^k \circ F_h^j = -B_{hi} ,$$

de lo cual $\partial(\partial\rho) = \sum_{i,h} B_{ih} + \sum_{i,h} A_{ih} = 0$. Esto demuestra el teorema.

Definición 2.1. Un n-cubo $\rho \in \tilde{C}_n(X)$, $n \geq 0$, se dice degenerado si, como aplicación de I^n en X, es independiente de una al menos de las variables.

Un 0-cubo nunca es degenerado. Para que un 1-cubo sea degenerado es necesario y suficiente que sea constante. Para que un 2-cubo sea degenerado es necesario y suficiente que $\rho(\theta, t) = \gamma(\theta)$ ó $\gamma(\theta, t) = \gamma(t)$, $\gamma \in \tilde{S}_1(X)$. No se excluye aquí que γ sea constante (es decir, un 1-cubo degenerado). Denotaremos por $\tilde{S}_{n,D}(X)$ al conjunto de los n-cubos degenerados de X. Pondremos además que $\tilde{S}_{n,D}(X) = \phi$ si $n \leq 0$. Por $\tilde{D}_n(X)$ denotaremos al Z-submódulo de X generado por $\tilde{S}_{n,D}(X)$, y escribiremos

$$\tilde{\tilde{B}}_n(X) = \tilde{B}_n(X) + \tilde{D}_n(X) \cap \tilde{Z}_n(X) .$$

Es claro que $\tilde{B}_n(X)$ es un submódulo de $\tilde{Z}_n(X)$.

Definición 2.2. Denominaremos n-ésimo grupo de homología de X, con coeficientes en Z, y lo notaremos $\tilde{H}_n(X, Z)$, ó simplemente $\tilde{H}_n(X)$, al Z-módulo cociente

$$\tilde{H}_n(X) = \tilde{Z}_n(X) / \tilde{\tilde{B}}_n(X) .$$

Denominaremos relación *de equivalencia de homología* sobre X a la relación definida en cada $\tilde{C}_n(X)$ por

$$\tilde{H}_n^X = \{ (\rho, \sigma) \mid \rho - \sigma \in \overline{B}_n(X) \} .$$

Si $(\rho,\sigma) \in \tilde{H}_n^X$, escribiremos $\rho \doteq \sigma$ (mod X,n), o simplemente $\rho \doteq \sigma$ si no hay lugar a confusión. En tal caso ρ y σ se dirán homólogos. Es claro que $\tilde{H}_n^X$ es, en efecto, una relación de equivalencia en $\tilde{C}_n(X)$.

Denotaremos por $<\rho>_{n,X}$, ó simplemente por $<\rho>$, a la clase de equivalencia según $\tilde{H}_n^X$ de $\rho \in \tilde{C}_n(X)$. Es decir,

$$<\rho> = \{ \sigma \in \tilde{C}_n(X) \mid \sigma \dot{\sim} \rho \} ;$$

Si $\rho, \sigma \in \tilde{C}_n(X)$, $\rho \dot{\sim} \sigma$ si y sólo si

$$\rho - \sigma = \partial c + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k ,$$

$m \geq 1$, $\lambda_k \in Z$, $\rho_k \in \tilde{S}_{n,D}(X)$, $c \in \tilde{C}_{n+1}(X)$, teniéndose además que

$$\partial \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k \right) = 0 .$$

De ésto se deduce que si $\rho \dot{\sim} \sigma$ y $\partial \rho = 0$, también $\partial \sigma = 0$. Por lo tanto, si $\rho \in \tilde{Z}_n(X)$,

$$<\rho> = \{ \sigma \in \tilde{Z}_n(X) \mid \rho \dot{\sim} \sigma \} ,$$

y

$$\tilde{H}_n(X) = \{ <\rho> \mid \rho \in \tilde{Z}_n(X) \} .$$

Recordamos que si $n=0$, $\tilde{Z}_n(X) = \tilde{C}_n(X)$ y por lo tanto, $S_o(X) \subseteq \tilde{Z}_o(X)$. Sea $\psi : \tilde{S}_o(X) \to Z$ definida por $\psi(\rho) = 1$ para todo ρ, y extendamos a ψ por linealidad a todo $\tilde{Z}_o(X)$. Entonces $\psi : \tilde{Z}_o(X) \to Z$ es un epimorfismo, y está dada por

$$\psi \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \rho_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

cuando $\rho_k \in \tilde{S}_o(X)$, aún si $\rho_j = \rho_k$ para $k \neq j$. Por otra parte, $\tilde{B}_o(X) = \tilde{B}_o(X)$ $\subseteq Ker\, \psi$. En efecto, si $\rho \in \tilde{S}_1(X)$,

$$\partial \rho = \rho_1 - \rho_o ,$$

donde $\rho_1(0) = \rho_0(0) = \rho(0)$. Si $\sigma \in \tilde{S}_o(X)$ es un borde,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\rho_{k1} - \rho_{k0}) \ , \qquad \lambda_k \in Z$$

donde $\rho_k \in \tilde{S}_1(X)$. Se tiene entonces

$$\psi(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0 \ ,$$

y por lo tanto $\sigma \in Ker\ \psi$. Más aún

***Teorema* 2.2.** *Si X es un espacio topológico arco conexo, $\tilde{B}_o(X) = Ker\,\psi$. La aplicación*

$$\tilde{\psi} : \tilde{H}_o(X) \to Z \ ,$$

obtenida de ψ por paso al cociente, es un isomorfismo.

***Demostración*.** Todo lo que hay que demostrar es que $Ker\ \psi \subseteq \tilde{B}_o(X)$. Sea

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \rho_k \quad , \qquad \lambda_k \in Z \ , \ \rho_k \in \tilde{S}_o(X) \ .$$

y supongamos que

$$\psi(\rho) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0 \ .$$

Entonces, para todo $\sigma \in \tilde{S}_o(X)$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sigma = 0 \ .$$

Se deduce que

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\rho_k - \sigma) \ .$$

Todo lo que hay que ver es que, para σ fijo , $\rho_k - \sigma$ es un borde. Para ello, sea $\sigma_k \in \tilde{S}_1(X)$ tal que $\sigma_k(1) = \rho_k(0)$, $\sigma_k(0)$, $\sigma_k(0) = \sigma(0)$. Tal σ_k existe pues

X es arco conexo. Pero entonces

$$\partial\sigma_k = \rho_k \cdot \sigma ,$$

y el teorema queda demostrado .

Corolario : Si Ω es un abierto conexo en $\mathbb{R}_p$, $p \geq 0$, entonces $\tilde{H}_o(\Omega) \approx Z$.

Demostración. En efecto, Ω es arco-conexo, por ser abierto y conexo.

3. La relación entre $\tilde{\pi}_1(X)$ y $\tilde{H}_1(X)$.

Entre $\tilde{\pi}_1(X)$ y $\tilde{H}_1(X)$ existe, en el caso de X arco-conexo, una importantísima relación, conocida como el Lema de Poincaré (muchos otros lemas en matemática llevan también el nombre de Poincaré). Como vemos, tal lema juega un importante papel en el análisis complejo.

Lema 3.1. *Sean $\rho,\sigma \in \tilde{S}_1(X)$ y supongamos que $\rho\sigma$ está definido. Entonces*

(a) $\rho\sigma \doteq \rho + \sigma$

(b) $\rho^{-1} \doteq -\rho$

(c) $e_a \doteq 0$, *para todo* $a \in X$.

Demostración . Sea $\gamma = \rho\sigma \in \tilde{S}_1(X)$ y definamos

$$\tilde{\gamma}(\theta, t) = \gamma(\theta(\frac{t+1}{2}) + (1-\theta)\, t) .$$

Nótese al respecto que si $t \in [0,1]$,

$$\theta(\frac{t+1}{2}) + (1-\theta)\, t \in [0,1]$$

para todo $\theta \in [0,1]$. Además $\tilde{\gamma} \in \tilde{S}_2(X)$, y un cálculo simple muestra que $\tilde{\gamma}_{20} = \rho$, $\tilde{\gamma}_{10} = \gamma$, $\tilde{\gamma}_{11} = \sigma$ y que $\tilde{\gamma}_{21}$ es degenerado. Por lo tanto

$$\rho - \rho\sigma + \sigma \doteq 0 ,$$

y de ésto,

$$\rho\sigma \doteq \rho + \sigma .$$

Esto demuestra (a). La relación (c) es trivial por ser e_a degenerado. Para demostrar (b), tómese

$$\sigma(\theta, t) = \rho((1-t) + \theta t) \in \tilde{S}_2(X) .$$

Se ve inmediatamente que σ_{20} y σ_{11} son degenerados y que $\sigma_{10} = \rho^{-1}, \sigma_{21} = \rho$. De la relación

$$\partial\sigma = \sigma_{20} + \sigma_{11} - \sigma_{10} - \sigma_{21}$$

se deduce inmediatamente que $(-\rho) \doteq \rho^{-1}$. El lema está demostrado.

Lema 3.2. *Si* $\rho \in \tilde{S}_2(X)$ *y* $\hat{\rho} = \rho_{20}\, \rho_{11}\, \rho_{21}^{-1}\, \rho_{10}^{-1}$, *entonces* $\hat{\rho} \doteq 0$

***Demostración*.** En virtud del lema 3.1

$$\hat{\rho} \doteq \rho_{20} + \rho_{11} - \rho_{21} - \rho_{10} = \partial\rho .$$

Lema 3.3. *Sea* $\gamma \in \tilde{S}_1(X,a)$. *Si* $\gamma \approx e_a$, *entonces* $\gamma \doteq 0$.

Demostración. Sea $\sigma : \gamma \to e_a$. Es claro que $\sigma \in \tilde{S}_2(X)$. Por otra parte, es evidente que

$$\partial\sigma = e_a - e_a + \gamma - e_a .$$

Como e_a es degenerado, $\gamma \doteq \partial\sigma$. Es decir, $\gamma \doteq 0$.

Corolario. Sean $\rho, \sigma \in \tilde{S}_1(X; a,b)$, y supóngase que $\rho \approx \sigma$. Entonces $\rho \doteq \sigma$.

***Demostración*.** En efecto, $\rho\sigma^{-1} \approx e_a$. Por lo tanto, $\rho\sigma^{-1} \doteq \rho - \sigma \doteq 0$. Se deduce que $\rho \doteq \sigma$.

Sea ahora

$$i : \dot{\tilde{S}}_1(X, a) \to \tilde{Z}_1(X)$$

la inyección natural: $i(\rho) = \rho$. En virtud del corolario al lema 3.3, $\rho \approx \rho'$ implica $\rho \doteq \rho'$, o sea, $i(\rho) \doteq i(\rho')$. Por paso a los cocientes i define entonces una aplicación

$$\phi : \tilde{\pi}_1(X, a) \to \tilde{H}_1(X),$$

$$\phi([\rho]) = <\rho> .$$

Además, por los lemas 3.1 y 3.3,

$$\phi([\rho][\sigma]) = <\rho> + <\sigma> ,$$

$$\phi([\rho^{-1}]) = - <\rho> ,$$

$$\phi([e_a]) = \phi(1_a) = 0 ,$$

de lo cual ϕ es un homomorfismo de las estructuras de grupo.

Teorema 3.1. *Si X es arco conexo, $\phi : \tilde{\pi}_1(X) \to \tilde{H}_1(X)$ es sobre.*

Demostración. Basta demostrar que $\phi : \tilde{\pi}_1(X,a) \to \tilde{H}_1(X)$, $a \in X$, es sobre. Para cada $b \in X$ escójase, de una vez por todas, una curva $\gamma_b \in \tilde{S}_1(X; a, b)$. Sea $\rho \in \tilde{Z}_1(X)$,

$$\rho = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k , \qquad \lambda_k \in Z , \rho_k \in \tilde{S}_1(X).$$

Además, sea $x_k = \rho_k(0)$, $y_k = \rho_k(1)$,

$$\gamma_{0k} = \gamma_{xk} , \quad \gamma_{1k} = \gamma_{yk} ,$$

donde γ_{xk}, γ_{yk} son las curvas en $\tilde{S}_1(X, a, x_k)$, $\tilde{S}_1(X, a, y_k)$ escogidas antes. Sea

$$\tilde{\rho} = \prod_{k=1}^{m} (\gamma_{0k} \rho_k \gamma_{1k}^{-1})^{\lambda_k} .$$

Es claro que $\tilde{\rho} \in \tilde{S}_1(X; a)$. Demostremos que

$$\phi([\tilde{\rho}]) = <\rho> .$$

Puesto que ϕ es un homomorfismo,

$$\phi(\bar{\rho}) = < \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\gamma_{0k}\, \rho_k\, \gamma_{1k}^{-1}) > \; = \; < \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\gamma_{0k} \cdot \gamma_{1k}) > + < \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \rho_k > .$$

Se deduce que
$$\phi(\bar{\rho}) = < \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\gamma_{0k} \cdot \gamma_{1k}) > + <\rho> .$$

Veamos ahora que
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \gamma_{1k} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \gamma_{0k} .$$

Como ρ es un 1-ciclo,
$$\partial \rho = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \partial \rho_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\rho_{k1} \cdot \rho_{k0}) = 0 .$$

Se deduce que
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \rho_{k1} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \rho_{k0} .$$

Pero los ρ_{kj} son 0-cubos, y por lo tanto linealmente independientes. Debe existir entonces una permutación τ de $\{1, 2, \dots, m\}$, tal que
$$\rho_{k1} = \rho_{\tau(k)0} \;, \quad \lambda_k = \lambda_{\tau(k)} .$$

Pero entonces $\rho_{k1}(0) = \rho_k(1) = \rho_{\tau(k)0}(1) = \rho_{\tau(k)}(0)$. De esto $\gamma_{1k} = \gamma_{0\tau(k)}$, y la afirmación resulta inmediatamente de esta relación. El teorema está demostrado.

Teorema 3.2. (H. Poincaré). *Si X es arco conexo, $Ker\, \phi = \tilde{\pi}_1'(X, a)$ donde $\tilde{\pi}_1'(X, a)$ es el subgrupo derivado de $\tilde{\pi}_1(X,a)$, o subgrupo de los conmutadores. El homomorfismo*
$$\tilde{\phi} : \tilde{\pi}_1(X, a) / \tilde{\pi}'(X,a) \to \tilde{H}_1(X)$$

obtenido de ϕ por paso al cociente es, entonces, un isomorfismo. Es decir,
$$\tilde{\pi}(X)_{ab} \approx \tilde{H}_1(X) ,$$

donde
$$\tilde{\pi}_1(X)_{ab} = \tilde{\pi}_1(X) / \tilde{\pi}_1'(X)$$

es, de acuerdo con la terminología usual de la teoría de grupos, el abelianizado $\tilde{\pi}_1(X)$.

Demostración . Para cada punto $x \in X$, escójase una única $\gamma_x \in \tilde{S}_1(X\ ;\ a,x)$. Si $\rho \in \tilde{S}_1(X)$, sea

$$\gamma_{o\rho} = \gamma_{\rho(0)}\ ,\quad \gamma_{1\rho} = \gamma_{\rho(1)}\ ,$$

y definamos

$$\psi : \tilde{S}_1(X) \to \pi(X,a)_{ab}$$

por

$$\psi(\rho) = [\,[\gamma_{1\rho}\ \rho\ \gamma_{1\rho}^{-1}]\,]$$

donde $[\,[\sigma]\,]$ denota a la clase módulo $\tilde{\pi}_1'(X,a)$ de $[\sigma]$. Denotemos también por ψ a la extensión lineal de la anterior aplicación a todo $\tilde{C}_1(X)$. Sea $\rho \in \tilde{S}_1(X,a)$, $\langle\rho\rangle = 0$. Demostremos que $[\sigma] \in \tilde{\pi}_1'(X,a)$, o lo que es lo mismo, que $[\,[\rho]\,] = [(e_a)] = 1$. Esto probará que $Ker\ \phi \subseteq \pi_1'(X,a)$. Supongamos entonces que $\rho \in \tilde{B}_1(X)$, o sea que

$$\rho = \partial\sigma + \sum_{k=1}^{s} \mu_k\,\sigma_k\ ,$$

donde $\sigma \in \tilde{C}_2(X)$ y $\sigma_k \in \tilde{S}_{1D}(X)$. Supongamos también que

$$\sigma = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k\,\rho^k \qquad ,\qquad \rho^k \in \tilde{S}_2(X)\ .$$

Entonces

$$\partial\sigma = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k\,\partial\rho^k$$

y

$$\rho = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k\,(\rho_{20}^k + \rho_{11}^k - \rho_{21}^k - \rho_{10}^k) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k\,\sigma_k\ .$$

Sean

$$\gamma_{ijbk} = \gamma_{\rho_{ij}^k(b)}\ .\quad b = 0,\ 1\ ,$$

$$\tilde{\rho} = \prod_{k=1}^{q} (\gamma_{200k}\,\rho_{20}^k\,\gamma_{201k}^{-1}\,\gamma_{110k}\,\rho_{11}^k\,\gamma_{111k}^{-1}\,\gamma_{211k}\,\rho_{21}^{-1k}\,\gamma_{210k}^{-1}\,\gamma_{101k}\,\rho_{10}^{-1k}\,\gamma_{100k}^{-1})^{\lambda_k}\ .$$

$$\tilde{\tilde{\rho}} = \prod_{k=1}^{s} (\gamma_{0k}\, \sigma_k\, \gamma_{2k}^{-1})^{\mu_k}.$$

Como $\sigma_k(1) = \sigma_k(0)$, también $\gamma_{1k} = \gamma_{0k}$. Como evidentemente

$$\gamma_{1k}\, \sigma_k\, \gamma_{1k}^{-1} \approx e_a ,$$

se tiene

$$\tilde{\tilde{\rho}} \approx e_a .$$

Por otra parte (Fig. 3.1)

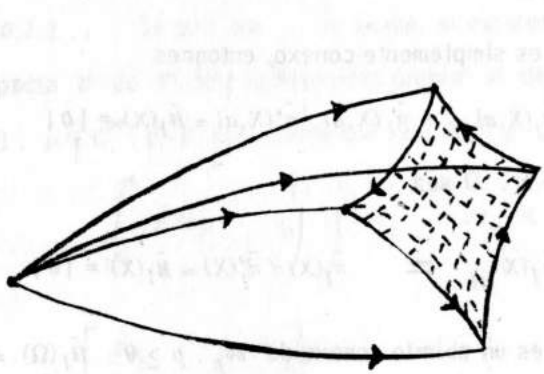

Fig. 3.1.

$$\gamma_{201k} = \gamma_{110k},\ \gamma_{211k} = \gamma_{111k},\ \gamma_{210k} = \gamma_{101k},\ \gamma_{200k} = \gamma_{100k} = \gamma_k .$$

Se deduce que

$$\rho \approx \prod_{k=1}^{q} (\gamma_k\, \bar{\rho}^k\, \gamma_k^{-1})^{\lambda_k}$$

donde

$$\bar{\rho}^k = \rho_{20}^{k}\, \rho_{11}^{k}\, \rho_{21}^{-1k}\, \rho_{10}^{-1k} .$$

Pero $\gamma_k \tilde{\rho}^k \gamma_k^{-1} \simeq e_a$, por ser $\tilde{\rho}^k \simeq e_{a_k}$, $a_k = \rho^k(0,0)$. Por lo tanto $\tilde{\rho}\cdot\tilde{\tilde{\rho}} \simeq e_a$. Pero $\psi(\rho) = [[\rho]][[\tilde{\tilde{\rho}}]] = [[e_a]] \in \tilde{\pi}_1'(X,a)$, y también $\psi(\rho) = [[\gamma\, \rho\, \gamma^{-1}]]$ donde $\gamma = \gamma_\rho(0) = \gamma_a \in \tilde{S}_1(X,a)$. Se deduce entonces que $[\gamma\, \rho\, \gamma^{-1}] \in \tilde{\pi}_1'(X,a)$, y de ésto, que $[\rho] \in \tilde{\pi}'_1(X,a)$, como queríamos demostrar. Veamos ahora que $\tilde{\pi}_1'(X,a) \subseteq Ker\, \phi$. Pero si

$$\rho \simeq \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_1^{-1}\, \alpha_2^{-1}\ ,\ \alpha_i \subset S_1(X,a)\ ,$$

$$<\rho> = <\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2> = <0> = 0\ ,$$

de lo cual la afirmación. Por lo tanto, $Ker\, \phi = \tilde{\pi}_1'(X,a)$. Como ϕ es sobre, el teorema está demostrado.

Corolario 1. Si X es simplemente conexo, entonces

$$\tilde{\pi}_1(X,a)_{ab} = \tilde{\pi}_1(X,a) / \tilde{\pi}'(X,a) \simeq \tilde{H}_1(X) = \{0\}$$

para todo punto $a \in X$. O sea,

$$\tilde{\pi}_1(X)_{ab} = \tilde{\pi}_1(X) / \tilde{\pi}_1'(X) \simeq \tilde{H}_1(X) = \{0\}.$$

Corolario 2. Si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{R}_p$, $p \geq 0$, $\tilde{H}_1(\Omega) = 0$.

Nota. Reemplazando a Z por $\mathbb{K} = Q, \mathbb{R}, C$ en la definición de los grupos de homología obtenemos la denominada homología con coeficientes en $\mathbb{K}$. Una n-cadena con coeficientes en $\mathbb{K}$ es simplemente una aplicación con soporte finito de $\tilde{S}_n(X)$ en $\mathbb{K}$, y $\tilde{C}_n(X,\mathbb{K})$, $\tilde{Z}_n(X,\mathbb{K})$, $\tilde{B}_n(X,\mathbb{K})$, $\tilde{S}_{n,D}(X,\mathbb{K})$, $\tilde{D}_n(X,\mathbb{K})$ y $\tilde{B}_n(X,\mathbb{K})$ se definen de la manera obvia, utilizando como borde la extensión de ∂_n a $\tilde{C}_n(X,\mathbb{K})$. Escribiremos $\tilde{H}_n(X,\mathbb{K})$ para denotar al n-grupo de homología con coeficientes en $\mathbb{K}$. Es claro que $\tilde{H}_n(X,\mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y es fácil ver que $\tilde{H}_n(X,\mathbb{K}) \simeq \tilde{H}_n(X) \otimes_Z \mathbb{K}$.

4. Homología suave.

Un subconjunto F de $\mathbb{R}_n$ se dice una *subvariedad* de $\mathbb{R}_n$ si

$$F = \bigcup_{k=1}^{m} a_k + V_k$$

donde $a_k \in \mathbb{R}_n$ y V_k es un subespacio de $\mathbb{R}_n$. Si $dim(V_k) < n$ para todo $k = 1, 2, \ldots, m$, se dirá que F es una *subvariedad propia* de $\mathbb{R}_n$. Para $n=0$, la única subvariedad de $\mathbb{R}_n$ es $\{0\}$. Si $n=1$, las únicas subvariedades propias son los conjuntos finitos de puntos, y si $n=2$, los conjuntos que son unión de un número finito de líneas y puntos. Sea ahora Ω abierto en $\mathbb{R}_p$, $p \geq 0$, y sea $\rho \in \tilde{S}_n(\Omega)$, $n=0,1,2,\ldots,$ Se dirá que ρ es suave, si existen una vecindad relativamente compacta U de I^n, una subvariedad propia F de $\mathbb{R}_n$, y una aplicación $\tilde{\rho} : U \to \Omega$, $\tilde{\rho} \in C^\infty(U \cdot F, \Omega)$, tales que $\tilde{\rho} \mid I^n = \rho$ y que

$$\int_{I^n} \| \tilde{\rho}'(t_1, \ldots, t_n) \|^2 \, dt_1 \ldots dt_n < +\infty,$$

donde

$$\tilde{\rho}'(t_1, \ldots, t_n) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t_1}, & \ldots & \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \dfrac{\partial \rho_p}{\partial t_1}, & \ldots & \dfrac{\partial \rho_p}{\partial t_n} \end{bmatrix} = \rho'(t_1, \ldots, t_n)$$

Denotaremos por $S_n(\Omega)$ al subconjunto de $\tilde{S}_n(\Omega)$ formado por los n-cubos suaves, y por $C_n(\Omega)$ al submódulo de $\tilde{C}_n(\Omega)$ generado por $S_n(\Omega)$. Nótese que $S_o(\Omega) = \tilde{S}_o(\Omega)$, y que $C_o(\Omega) = \tilde{C}_o(\Omega)$. Por otra parte,

$$S_1(\Omega) = \bigcup_{a,b \in \Omega} S_1(\Omega\, ; a,b),$$

y $S_2(\Omega)$ es simplemente el conjunto de las homotopías suaves de Ω. Luego se definen

$$Z_n(\Omega) = \tilde{Z}_n(\Omega) \cap C_n(\Omega) ,$$

$$B_n(\Omega) = \partial(C_{n+1}(\Omega)) ,$$

$$S_{n,D}(\Omega) = \tilde{S}_{n,D}(\Omega) \cap S_n(\Omega) ,$$

$\mathbb{D}_n(\Omega)$ como el submódulo de $C_n(\Omega)$ generado por $S_{n,D}(\Omega)$, y

$$\bar{B}_n(\Omega) = B_n(\Omega) + Z_n(\Omega) \cap \mathbb{D}_n(\Omega) .$$

Se tiene que $\mathbb{B}_n(\Omega) \subseteq Z_n(\Omega)$, y se define

$$H_n(\Omega, Z) = H_n(\Omega) = Z_n(\Omega) / \mathbb{B}_n(\Omega) .$$

El Z-módulo $H_n(\Omega)$ se denomina el *n-ésimo grupo de homología singular suave de* Ω.

Si un abierto Ω es conexo, dos puntos cualesquiera de Ω pueden unirse por una curva $\rho \in S_1(\Omega)$; basta, por ejemplo, tomar una poligonal que aproxime suficiente cercanamente a una curva $\sigma \in \tilde{S}_1(\Omega)$ que conecte a los dos puntos. Se deduce que $H_o(\Omega) \approx \tilde{H}_o(\Omega) \approx Z$. Por otra parte, si

$$i : S_1(\Omega, a) \rightarrow S_1(\Omega) \qquad a \in \Omega ,$$

es la inyección natural, i es compatible con las relaciones R_S y H_1^{Ω} (notaremos H_n^{Ω} a la relación de equivalencia en $C_n(\Omega)$ dada por $H_n^{\Omega} = \{(\rho, \sigma) \mid \rho - \sigma \in \mathbb{B}_n(\Omega)\}$, y escribiremos $\rho \sim \sigma$ si $(\sigma, \rho) \in H_n^{\Omega}$. Además, $\langle\rho\rangle$ denotará a la clase módulo H_n^{Ω} de $\rho \in C_n(\Omega)$. Si $\rho \sim \sigma$ diremos que ρ y σ son suavemente homólogos). Es decir, si $\rho \equiv \sigma$, también $i(\rho) \sim i(\sigma)$, e i define entonces, por paso al cociente, un homomorfismo epiyectivo.

$$h : \pi_1(\Omega, a) \rightarrow H_1(\Omega)$$

tal que $h(\{\rho\}) = \langle\rho\rangle$. Se tiene entonces la siguiente versión del lema de Poincaré .

Teorema 4.1. *El núcleo de b es precisamente $\pi_1'(\Omega, a)$, subgrupo derivado de $\pi_1(\Omega, a)$ y se tiene un isomorfismo*

$$\hat{b} : \pi_1(\Omega, a) / \pi_1'(\Omega, a) \to H_1(\Omega) ,$$

o lo que es lo mismo, $$\hat{b} : \pi_1(\Omega) / \pi_1'(\Omega) \to H_1(\Omega) ,$$

dado por $\hat{b}(\{\rho\} + \pi_1'(\Omega)) = \langle\rho\rangle$.

Demostración . Idéntica a la del teorema 3.2 .

Corolario . Si Ω es un abierto conexo de $\mathbb{R}_p$, $H_1(\Omega) \approx \tilde{H}_1(\Omega)$.

Demostración. En efecto

$$\tilde{H}_1(\Omega) \approx \tilde{\pi}_1(\Omega) / \pi_1'(\Omega) \approx \pi_1(\Omega)/\pi_1'(\Omega) \approx H_1(\Omega) .$$

Nota. El isomorfismo $\hat{\hat{b}} : H_1(\Omega) \to \tilde{H}_1(\Omega)$ está obviamente dado por

$$\hat{\hat{b}}(\langle\rho\rangle) = \langle\rho\rangle .$$

Nota. Por regularización de los n-cubos $\rho \in \tilde{S}_n(\Omega)$ es fácil ver que es posible definir un homomorfismo

$$\hat{\hat{b}}_n : H_n(\Omega) \to \tilde{H}_n(\Omega) .$$

Tal homomorfismo es un isomorfismo, pero ésto no es tan fácil de demostrar. A este respecto, véanse,por ejemplo, [1] , [2] , [3] en la bibliografía. Como nuestro interés radicará esencialmente en $H_o(\Omega)$, $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega)$, y sólo alguna vez en $H_3(\Omega)$, y de manera fundamental, sólo para $H_o(\Omega)$ y $H_1(\Omega)$, en cuyos casos la afirmación está demostrada, no haremos énfasis en este resultado.

Nota. La razón fundamental para introducir los grupos $\pi_1(\Omega)$ y $H_1(\Omega)$ es la siguiente : si $f: \Omega \to I\!R$ es continua y $\rho \in S_1(\Omega)$, podemos introducir un objeto matemático, al cual notaremos (véase más adelante) por $\int_\rho f\, dx$, dado por

$$\int_\rho f\, dx = \int_0^1 f(\rho(x))\, \rho'(x)\, dx \;,$$

mientras que no es fácil dar un significado a $\int_\rho f dx$ para $\rho \in \tilde{S}_1(\Omega)$. Como veremos después, en ciertos casos del mayor interés, $\int_\rho f dx$ sirve para estudiar más profundamente la estructura de los grupos $H_1(\Omega)$ y $\pi_1(\Omega)$, la de los $\tilde{H}_n(\Omega)$ para $n \geq 1$, y la de $\tilde{\pi}_1(\Omega)$. Más aún, para ciertas funciones, al menos, nos permitirá definir un objeto $\int_\rho f\, dz$, cuando $\rho \in \tilde{S}_1(\Omega)$. El análisis complejo de una variable, $\Omega \subseteq C$, sólo los grupos $H_o(\Omega)$ y $H_1(\Omega)$ son importantes, pues, como veremos, $\tilde{H}_n(\Omega) = 0$ para $n \neq 0, 1$.

Teorema 4.2. *Sea Ω un abierto simplemente conexo de C. Entonces $\tilde{H}_1(\Omega) \approx H_1(\Omega) = 0$.*

Demostración. En efecto, $\tilde{\pi}_1(\Omega) \approx \pi_1(\Omega) = \{0\}$, y es calro que $\tilde{\pi}_1(\Omega) \approx \tilde{H}_1(\Omega) \approx H_1(\Omega)$.

Teorema 4.3. *Sea Ω un abierto simplemente conexo de C, $a \in \Omega$, $\Omega' = \Omega - \{a\}$. Entonces, $H_1(\Omega')$ y $\tilde{H}_1(\Omega')$ están generados por un único elemento. Además, $< c_\varepsilon(a) >$, donde $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que $B_\varepsilon(a) \subseteq \Omega$, es un generador de $\tilde{H}_1(\Omega')$ y $H_1(\Omega')$ está generado por $\langle c_\varepsilon(a) \rangle$.*

Demostración. $\tilde{\pi}_1(\Omega') \approx \tilde{H}_1(\Omega')$, y $[\, c_\varepsilon(a)\,]$ es un sistema de generadores de $\tilde{\pi}_1(\Omega')$. Las demás afirmaciones son ahora triviales.

El siguiente teorema es también cierto, pero su demostración no es fácil en este momento. (Véase el teorema 1.3 del Cap. VI).

Teorema 4.4. *Si Ω es un abierto simplemente conexo de C, $a \in \Omega$, $\Omega' = \Omega - \{a\}$, $\tilde{H}_1(\Omega') \approx H_1(\Omega') \approx Z$. Si $\varepsilon > 0$ es como en el teorema 4.3, $< c_\varepsilon(a) >$ es una ba-*

se de $\tilde{H}_1(\Omega')$ y $\langle c_\varepsilon(a) \rangle$ una base de $H_1(\Omega')$.

Nota. Nótese que si suponemos Ω convexo, o simplemente estrellado con respecto al punto a, no es necesario recurrir al lema *(C)* para demostrar el teorema 4.3.

Nota. Para $K = Q$, $\mathbb{R}$, C podemos también definir, de la manera evidente, los grupos $H_n(\Omega, K)$ de homología suave con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Nota. En el capítulo X estudiaremos más detalladamente la estructura de los $\tilde{H}_n(\Omega)$ para conjuntos abiertos del plano.

5. *Homomorfismos inducidos por una aplicación continua.*

Sean X, Y espacios topológicos, $f: X \to Y$ una aplicación continua. Para cada $n \in Z$, f induce una aplicación $f^*: \tilde{S}_n(X) \to \tilde{S}_n(Y)$ definida por

$$f^*(\rho) = f \circ \rho \ .$$

Por linealidad f induce un homomorfismo

$$f^{**} : \tilde{C}_n(X) \to \tilde{C}_n(Y) ,$$

y evidentemente f es compatible con la relación de equivalencia de homología. Se tiene entonces un homomorfismo $\tilde{f} : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$ dado por

$$\tilde{f}(<\rho>) = < f^{**}(\rho) > \ .$$

Es además evidente que $\tilde{f}$ es un isomorfismo si $\tilde{f}$ es un homeomorfismo. En efecto, se comprueba inmediatamente que $\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} = \tilde{i}_Y$ es la identidad de $\tilde{H}_n(Y)$ y que $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} = \tilde{i}_X$ es la identidad de $\tilde{H}_n(X)$. Nótese que si Ω, Ω' son abiertos de $\mathbb{R}_p$ y $f: \Omega \to \Omega'$ es continua, se tiene un homomorfismo:

$$\tilde{\tilde{f}}: H_1(\Omega) \to H_1(\Omega') ,$$

y si f es un homeomorfismo, $\tilde{f}$ es un isomorfismo. Por otra parte, si f es de clase C^{∞}, $\tilde{\tilde{f}}$ puede tomarse dado por

$$\tilde{\tilde{f}}(\langle\rho\rangle) = \langle f^{**}(\rho)\rangle$$

donde $f^{**}(\rho) = f \circ \rho$ si $\rho \in S_1(\Omega)$, y si f es un difeomorfismo, $\tilde{\tilde{f}}$ es un isomorfismo. Es un ejercicio fácil para el lector comprobar que si $f: X \to Y$ es continua, f induce también aplicaciones K-lineales

$$\tilde{f} : \tilde{H}_n(X, K) \to \tilde{H}_n(Y, K) \qquad K = Q, \mathbb{R}, C.$$

y

$$\bar{f}: \tilde{H}^n(Y, K) \to \tilde{H}^n(X, K) \quad \text{(Ver N° 6)}$$

para todo $n \in Z$. Además, $\bar{f} = \tilde{f}^T$, y si f es un homeomorfismo, $\tilde{f}$ y $\bar{f}$ son isomorfismos.

6. Cohomología.

Si X es un espacio topológico, y si $K = Z, Q, \mathbb{R}, C$, denotaremos por $\tilde{H}^n(X, \mathbb{K})$ al $\mathbb{K}$-módulo $(\tilde{H}_n(X, \mathbb{K}))^*$, dual algebraico de $\tilde{H}_n(X, K)$. $\tilde{H}^n(X, K)$ se denomina el n-ésimo grupo de cohomología de X con coeficientes en K. Lo mismo, si Ω es un abierto de $\mathbb{R}_p$, $H^n(\Omega, \mathbb{K})$ denotará al dual $H_n(\Omega, \mathbb{K})^*$, de $H_n(\Omega, \mathbb{K})$. $H^n(\Omega, \mathbb{K})$ se denominará el n-ésimo grupo de cohomología suave de Ω con coeficientes en $\mathbb{K}$. Para la cohomología suave, solamente los casos $n = 0, 1$ son de interés para nosotros. Nótese que si Ω es un abierto conexo, $H^0(\Omega, K) \approx \mathbb{K} \approx \tilde{H}^0(\Omega, \mathbb{K})$, y que $H^1(\Omega, \mathbb{K}) \approx \tilde{H}^1(\Omega, \mathbb{K})$. Por lo tanto, si Ω es simplemente conexo, $H^1(\Omega, \mathbb{K}) \approx 0 \approx \tilde{H}^1(\Omega, \mathbb{K})$, y si Ω es un abierto 1-conexo de C, $H^1(\Omega, \mathbb{K}) \approx \mathbb{K} \approx \tilde{H}^1(\Omega, \mathbb{K})$.

EJERCICIOS

1. Sea Ω un espacio topológico. Para cada $n \in Z$ defínase

$$\hat{C}_n(\Omega, \mathbb{K}) = \tilde{C}_n(\Omega, \mathbb{K}) / \tilde{D}_n(\Omega, \mathbb{K}), \quad \mathbb{K} = Z, Q, \mathbb{R}, C.$$

Sea $\partial_n : \tilde{C}_n(\Omega, K) \to \tilde{C}_{n-1}(\Omega, \mathbb{K}$ el operador de borde. Demuestre que

$$\partial_n (\tilde{D}_n(\Omega, \mathbb{K}) \subseteq \tilde{D}_{n-1}(\Omega, \mathbb{K})$$

y que por lo tanto ∂_n define, por paso a los cocientes, un homomorfismo

$$\hat{\partial}_n : \hat{C}_n(\Omega, \mathbb{K}) \to \hat{C}_{n-1}(\Omega, \mathbb{K}).$$

Demuestre entonces que

$$\tilde{H}_n(\Omega, \mathbb{K}) \approx Ker\, \hat{\partial}_n / Im\, \hat{\partial}_{n+1}$$

2) Demuestre que para todo $n \in Z$, $\mathbb{K} = Z, Q, \mathbb{R}, C$,

$$\tilde{H}_n(\Omega, \mathbb{K}) \approx \tilde{H}_n(\Omega, Z) \otimes_Z \mathbb{K},$$

y concluya que $\tilde{H}_o(\Omega, \mathbb{K}) \approx \mathbb{K}$ si Ω es arco conexo, $\tilde{H}_o(\Omega, \mathbb{K}) = \{0\}$ si Ω es simplemente conexo, y que $\tilde{H}_o(\Omega, \mathbb{K})$ está generado por $< c_\varepsilon(a) >$ si $\Omega = \Omega' - \{a\}$ con Ω' simplemente conexo en C y $\bar{B}_\varepsilon(a) \subseteq \Omega'$.

3) Sean $\tilde{C}_n(\Omega, \mathbb{K}) = (\hat{C}_n(\Omega, \mathbb{K}))^*$ ($\mathbb{K}$ - dual algebraico) y

$$\partial^{*n} : \tilde{C}^n(\Omega, \mathbb{K}) \to \tilde{C}^{n+1}(\Omega, \mathbb{K})$$

la aplicación transpuesta de $\hat{\partial}_n$. Demuestre que

$$Im\, \partial^{*n} \subseteq Ker\, \partial^{*(n+1)}$$

y que

$$\tilde{H}^n(\Omega, \mathbb{K}) \approx Ker\, \partial^{*(n+1)} / Im\, \partial^{*n}$$

4) Demuestre que si Ω es un abierto estrellado de $\mathbb{R}_p$, $\tilde{H}_n(\Omega, \mathbb{K}) = 0$ para todo $n \in Z$, $n \neq 0$.

5) Demuestre que si Ω es un abierto simplemente conexo de C,

$$H_n(\Omega, IK) = \{0\} \text{ para todo } n \in Z, \ n \neq 0.$$

6) Demuestre que si Ω es f-contráctil, $\tilde{H}_n(\Omega, C) = \{0\}$ para todo $n \in Z$.

7) Demuestre que si X, Y son del mismo tipo de homotopía, $\tilde{H}_n(X, IK) \approx \tilde{H}_n(Y, IK)$ para todo $n \in Z$.

8) Trate de demostrar que un abierto simplemente conexo de IR_p es f-contráctil.

9) Sea $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de espacios topológicos arco-conexos, mutuamente disyuntos. Sea X el espacio suma de los X_i. Demuestre que

$$H_n(X) = \coprod_{i \in I} H_n(X_i)$$

(suma directa externa).

10) Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Sea $h = g \circ f$ y sean $\tilde{f}: H_n(X) \to H_n(Y)$, $\tilde{g}: H_n(Y) \to H_n(Z)$, $\tilde{h}^*: H_n(X) \to H_n(Z)$ los homomorfismos inducidos. Demuestre que $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

11) Sea $i: X \to X$ la aplicación idéntica. Demuestre que $\tilde{i}: H_n(X) \to H_n(X)$ es la identidad.

12) Sea $f: X \to Y$ un homeomorfismos. Demuestre que $\tilde{f^{-1}} = \tilde{f}^{-1}$ y que por lo tanto $\tilde{f}$ es un isomorfismo.