Boletín de Matemáticas
Vol. VII, No. 1, pp. 1-47

SOBRE LA DEFINICION DE DETERMINANTE

GILMA R. DE VILLAMARIN Y CARLOS F. LUQUE

En este artículo se exponen detalladamente tres formas de definir *determinante*, las cuales contrastan tanto por su punto de partida, como por su aplicabilidad en la demostración de teoremas o solución de problemas prácticos.

La primera, atribuída a Weierstrass, es la definición usual o clásica de determinante como función que asigna a cada matriz cuadrada un único escalar (el *determinante* de dicha matriz).

En segundo lugar, aunque es esencialmente la misma anterior, se expone la definición por recurrencia, que permite definir el determinante de matrices de orden n a partir de la noción de determinante de una matriz de orden $n-1$; naturalmente el caso $n=1$ es trivial.

Conceptos como los de base, dimensión, multilinealidad son necesarios para dar la tercera definición, la cual aventaja a las anteriores en alcance y elegancia, ésta es la llamada definición invariante de determinante.

Para efectos de claridad, ha sido necesario en más de una ocasión hacer digresiones y cuando éstas resultaron muy largas, se prefirió anexarlas, como apéndices, al final del trabajo.

1. *Determinante de una Matriz (Definición de Weierstrass)*

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donde a, b, c, d son números reales (o complejos), es usual definir el determinante de A, como el número real (o complejo): $ad - cb$, el cual se nota $det\ A$.

Es decir: $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - c.d$

Es fácil verificar que el determinante:

1) es *cero* si las dos columnas de la matriz son iguales.

2) es *lineal*, en cualquiera de las dos columnas de la matriz. Es decir:

$$det \begin{pmatrix} \alpha a + a' & b \\ \alpha c + c' & d \end{pmatrix} = \alpha\, det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a' & b \\ c' & d \end{pmatrix}$$

cualesquiera sean α, a', c', números reales (o complejos) y lo mismo para la segunda columna.

3) es *uno* si la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(esta matriz es la llamada *matriz unidad* o *idéntica* porque al multiplicar una matriz cualquiera por la idéntica se obtiene la misma matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.1 + b.0 & a.0 + b.1 \\ c.1 + d.0 & c.0 + d.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Lo mismo si se invierte el orden de los factores).

Se trata de dar una definición de determinante de una matriz cuadrada de orden n

de tal manera que tenga por lo menos las tres propiedades anteriores, o sea, como una función que a cada matriz de orden n asigne un bien determinado número real o complejo (según que la matriz esté formada por reales o complejos) y que satisfaga las "condiciones" 1), 2) y 3).

El problema consiste en demostrar que tal función existe y que es única.

Como todo número real es un número complejo, la discusión puede reducirse al caso complejo. Aún más general, en lugar de considerar el sistema $\mathbb{C}$ de los números complejos puede considerarse un cuerpo cualquiera $\mathbb{K}$, es decir, un sistema algebraico provisto de una "adición" y una "multiplicación" que cumplen esencialmente las mismas propiedades de la adición y la multiplicación entre números complejos (o reales).

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, se nota por $\mathbb{K}^n$ al conjunto cuyos elementos son las sucesiones finitas de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son elementos de $\mathbb{K}$. En $\mathbb{K}^n$ se define la operación de adición de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

y con esta operación, $\mathbb{K}^n$ es *grupo abeliano*, es decir; a) la suma de dos elementos de $\mathbb{K}^n$ es de nuevo un elemento de $\mathbb{K}^n$, b) la adición es asociativa y conmutativa, c) existe un elemento *neutro* o cero, a saber, $(0, 0, \ldots, 0)$ y, por último, para cada elemento de $\mathbb{K}^n$ existe otro elemento de $\mathbb{K}^n$ que sumado con el primero da cero.

Se puede hacer de $\mathbb{K}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. En otros términos, es posible definir una operación de multiplicación de elementos de $\mathbb{K}$ por elementos de $\mathbb{K}^n$, a saber:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

tal que :

1) $\alpha\,[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

2) $[\alpha + \beta]\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

3) $\alpha\,[\beta (x_1, x_2, \ldots, x_n)] = [\alpha \cdot \beta] \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

4) $1 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (donde 1 es la unidad de $\mathbb{K}$)

para todo α y β de $\mathbb{K}$, y todo $(x_1\ x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

A los elementos de $\mathbb{K}$ se le llaman *escalares* y a los de $\mathbb{K}^n$ *vectores*.

En los elementos de $\mathbb{K}^n$ se pueden reconocer las matrices $1 \times n$, o sea matrices de una fila y n columnas.

Análogamente se puede dotar de estructura de espacio vectorial al conjunto $\mathbb{K}_n$ de elemento de la forma

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^n \end{pmatrix}$$

los cuales se denominan *vectores columna*, o sea matrices $n \times 1$ (matrices de n filas y una columna).

De manera natural, el conjunto de las matrices $n \times n$ será denotado $\mathbb{K}_n^n$ y posee también estructura de espacio vectorial, con respecto a las operaciones siguientes :

Sean A y B elementos de $\mathbb{K}_n^n$, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b^1_1 & b^1_2 & \dots & b^1_n \\ b^2_1 & b^2_2 & \dots & b^2_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b^n_1 & b^n_2 & \dots & b^n_n \end{pmatrix}$$

se define :

$$A + B = \begin{pmatrix} a^1_1 + b^1_1 & a^1_2 + b^1_2 & \dots & a^1_n + b^1_n \\ a^2_1 + b^2_1 & a^2_2 + b^2_2 & \dots & a^2_n + b^2_n \\ & \cdot & \dots & \cdot \\ a^n_1 + b^n_1 & a^n_2 + b^n_2 & \dots & a^n_n + b^n_n \end{pmatrix}$$

Es fácil demostrar que con esta operación de adición $\mathbb{K}^n_n$ es grupo abeliano (es decir conmutativo).

Además la multiplicación por escalares definida como sigue :

$$\alpha \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a^1_1 & \alpha a^1_2 & \dots & \alpha a^1_n \\ \alpha a^2_1 & \alpha a^2_2 & \dots & \alpha a^2_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha a^n_1 & \alpha a^n_2 & \dots & \alpha a^n_n \end{pmatrix}$$

goza de las propiedades requeridas.

Es conveniente observar que todo elemento A de $\mathbb{K}^n_n$, se puede expresar en términos de sus vectores columna así :

$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ donde para cada i $(i = 1, 2, \dots, n)$ A_i puede considerarse como un elemento de $\mathbb{K}_n$.

Por ejemplo, en el caso particular $n=3$, un elemento A de $\mathbb{K}_3^3$ es de la forma :

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

la cual puede expresarse como $A = (A_1, A_2, A_3)$ donde A_1, A_2 y A_3 son los vectores columna:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, si F es una función de $\mathbb{K}_n^n$ en $\mathbb{K}$, $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ y $F(A)$ son notaciones diferentes para un mismo escalar.

Los axiomas. Supongamos ahora que

$$D : \mathbb{K}_n^n \longrightarrow \mathbb{K} \text{ es una función tal que :}$$

(i) $D(A) = 0$, si A tiene dos columnas iguales .

Es decir : Si $A_i = A_j$ para $i \neq j$, entonces $D(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = 0$.

Por ejemplo, en el caso de las matrices 3×3 si

$$A = \begin{pmatrix} sen\,\frac{\pi}{2} & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -3 & |-1| \\ 0 & 4 & 0^2 \end{pmatrix}$$

puesto que A_1 (primera columna) es igual a A_3 (tercera columna), entonces $D(A) = 0$.

(ii) D es lineal como función de cada columna. Es decir :

$$D(A_1, \ldots, \alpha A_i + B_i, \ldots, A_n) = \alpha D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + D(A_1, \ldots, B_i, \ldots, A_n)$$

para $1 \leq i \leq n$, y $\alpha \in \mathbb{K}$.

En el caso de las matrices 3×3 veamos, por ejemplo, la linealidad en la segunda columna.

$$D\begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & 23 & 5 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 8 & 2\times 3+1 & 0 \\ 4 & 2\times 5-8 & 1 \\ -3 & 2\times 7+9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= D\begin{pmatrix} 8 & 2\times 3 & 0 \\ 4 & 2\times 5 & 1 \\ -3 & 2\times 7 & 5 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 2D\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

(iii) $D(I_n) = 1$, donde I_n es la identidad en $\mathbb{K}^n_n$.

En el caso $\mathbb{K}^3_3$, la identidad está dada por :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consecuencias de los Axiomas. A priori es posible que *no exista* función alguna que satisfaga los axiomas mencionados. A pesar de ésto, pasamos a deducir algunas propiedades que una tal función debe poseer (en caso de existir).

1) *Si* A' *es la matriz obtenida a partir de* A *intercambiando dos de sus columnas, entonces* D(A') = − D(A) .

Es decir:

$D(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = - D(A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$ para $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.

Demostración. Sea $B = (A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_j + A_i, \ldots, A_n)$.

Es claro que B tiene dos columnas iguales y por lo tanto por el primer axioma, $D(B) = 0$. Pero por el segundo axioma:

$$\begin{aligned} D(B) &= D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) + D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) \\ &= D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &\quad + D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \end{aligned}$$

Es decir :

$$0 = 0 + D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + 0$$

Luego

$$D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = - D(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n) \qquad \blacksquare$$

Por ejemplo, en el caso de las matrices 3×3

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1/2 & \pi/6 & 8 \\ \sqrt{3} & 4 & 1/4 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 8 & \pi/6 & 1/2 \\ 1/4 & 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

(donde A' es la matriz obtenida de A intercambiando la primera y tercera columnas), entonces

$$D(A) = - D(A')$$

Es decir : $D(A_1, A_2, A_3) = - D(A_3, A_2, A_1)$

2) *Si A tiene una columna nula, entonces,* $D(A) = 0$.

Demostración. Supongamos que la i-ésima columna es cero. Es decir que $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \ldots, A_n)$ donde

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \in I\!K_n$$

Este vector puede escribirse en la forma $0 = 0\, A_i$ donde A_i es un elemento cualquiera de $I\!K_n$. Por la linealidad en la i-ésima columna, se tiene :

$$D(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, 0\, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) = 0 \cdot D(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = 0$$

Luego $D(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, 0, A_{i+1}, \ldots, A_n) = 0$ ∎

En el caso de las matrices 3×3 si, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & sen\ 2\pi \\ 0 & 7 & ln\ 1 \\ -3 & \pi & 0^2 \end{pmatrix}$$

entonces, según lo anterior $D(A) = 0$, es decir

$$D(A_1, A_2, 0) = 0$$

3) *Si se multiplica una matriz A por un escalar α, el determinante de la matriz resultante es igual al deteminante de A multiplicado por α^n, esto es :*

$$D(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot D(A)$$

Demostración. Esta propiedad se obtiene por la aplicación reiterada de la linealidad en cada variable. En efecto :

$$\begin{aligned} D(\alpha \cdot A) &= D(\alpha A_1, \alpha \cdot A_2, \ldots, \alpha \cdot A_n) = \\ &= \alpha \cdot D(A_1, \alpha \cdot A_2, \ldots, \alpha \cdot A_n) = \alpha^2 \cdot D(A_1, A_2, \ldots, \alpha A_n) \\ &= \alpha^n \cdot D(A_1, A_2, \ldots, A_n) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Para $\alpha = -1$ se tiene :

$$D(-A) = (-1)^n \cdot D(A)$$

si por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 3/2 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -20 \\ 0 & -4 & 6 \\ 24 & 12 & 16 \end{pmatrix} = 4\ A$$

entonces : $D(B) = 4^3 \cdot D(A)$. Es decir $D(4A_1, 4A_2, 4A_3) = 4^3 \cdot D(A_1, A_2, A_3)$.

Para el caso $\alpha = -1$.

$$-A = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ -6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D(-A) = D(-A_1, -A_2, -A_3) = (-1)^3 \cdot D(A_1, A_2, A_3) = (-1)^3 \cdot D(A) = -D(A)$$

4) *Si B se obtiene a partir de A, sumando a una de sus columnas (por ejemplo la i-ésima), un múltiplo escalar de otra (por ejemplo la j-ésima)($i \neq j$), entonces $D(A) = D(B)$.*

Demostración. Podemos asumir $i < j$ (ya que $i \neq j$). Como B tiene por i-ésima columna $X + \alpha Y$ donde $X = A_i$ y $Y = A_j$, entonces, usando la linealidad, se tiene

$$\begin{aligned} D(B) &= D(A_1, A_2, \ldots, X + \alpha Y, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \\ &= D(A_1, A_2, \ldots, X, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \\ &+ \alpha D(A_1, A_2, \ldots, Y, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \end{aligned}$$

Pero $$D(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = D(A)$$

y $D(A_1, A_2, \ldots, Y, \ldots, Y, \ldots, A_n) = 0$ (por tener dos columnas iguales) luego $D(A) = D(B)$ como queríamos probar. ■

En el caso 3×3 sean, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3/2 \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3/2 \\ 6 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

puede verificarse que $B = (A_1, A_2 - 2A_3, A_3)$ donde $A = (A_1, A_2, A_3)$; entonces. $D(B) = D(A)$.

Hasta aquí se han deducido algunas de las propiedades que cumpliría una función que satisfaga los axiomas 1) 2) y 3), pero es necesario garantizar que hay al menos una tal función y más aún que hay solo una.

Para esto son indispensables algunas nociones acerca de las permutaciones de un conjunto de n-elementos. A continuación se enumeran las permutaciones de un conjunto de tres elementos :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se observa, las permutaciones de un conjunto, son las distintas ordenaciones que se pueden hacer con sus elementos.

Es costumbre usar letras griegas para designar dichas permutaciones. Así por ejemplo :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \end{pmatrix}$$

donde $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$.

Una permutación de un conjunto de n elementos $\{1, 2, \ldots, n\}$ es una función uno a uno, del conjunto sobre sí mismo. Así :

$$\begin{array}{rcl} \pi : \{1, 2, \ldots, n\} & \longrightarrow & \{1, 2, \ldots, n\} \\ i & \longmapsto & \pi(i) \end{array}$$

la cual se nota :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots\ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Una permutación que solo "permute" dos elementos del conjunto y deje fijos los demás, se llama una *transposición* .

Se puede demostrar (ver nota 1) que toda permutación π es "producto" (composición) de transposiciones. Según que el número de transposiciones de π sea par o impar, se le suele asignar el número 1 o -1 respectivamente, el cual se llama el signo de la pemutación y se nota $Sgn\,\pi$.

Ahora se puede deducir una fórmula explícita para calcular $D(A)$. Sea e_j, la j-ésima columna de I_n , entonces

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{puesto j-ésimo}$$

La i-ésima columna de A , $A_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_i^n \end{pmatrix}$ se puede escribir como :

$$A_i = a_i^1 e_1 + a_i^2 e_2 + \cdots + a_i^n e_n = \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j$$

Luego, en el caso de la primera columna se tiene :

$$D(A) = D(A_1, A_2, \ldots, A_n) = D(\sum_{j_1=1}^{n} a_1^{j_1} e_{j_1}, A_2, \ldots, A_n)$$

y por linealidad :

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_1^{j_1} D(e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_2^{j_2} e_{j_2}, \ldots, A_n)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_1^{j_1} \cdot \sum_{j_2=1}^{n} a_2^{j_2} \cdot D(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, A_n)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} a_1^{j_1} \sum_{j_2=1}^{n} a_2^{j_2} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} a_n^{j_n} \cdot D(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_n^{j_n} \cdot D(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$$

Pero $D(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) = 0$, si dos de los $j_1, j_2 \ldots, j_n$ son iguales. Por otra parte, si todos los $j_1, \ldots, j_n$ son distintos, constituyen una permutación del conjunto $\{1,2, \ldots, n\}$ y se tiene que la matriz $(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$ se obtiene a partir de I_n, mediante la permutación π de sus columnas.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots\ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

donde $\pi(1) = j_1$, $\pi(2) = j_2$, $\ldots$, $\pi(n) = j_n$.

Pero π es producto de transposiciones (en este caso, transposición significa intercambio de dos columnas de I_n) y como cada transposición causa un cambio de signo, entonces :

$$D(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n}) = Sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix} D(I_n)$$

Entonces :

$$D(A) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2}, \ldots, a_n^{j_n} D(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2}, \ldots, a_n^{j_n} Sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) \ldots & \pi(n) \end{pmatrix} D(I_n)$$

$$= D(I_n) \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_1^{j_1}, a_2^{j_2}, \ldots, a_n^{j_n} Sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Y como el axioma 3 exige que $D(I_n) = 1$ se tiene :

$$D(A) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \ldots a_n^{j_n} Sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Esto prueba la *unicidad*, pues se ha demostrado que los valores de *cualquier* función que satisfaga las tres condiciones (axiomas) dadas, deben ser precisamente los dados por la fórmula anterior, y no otros. Para demostrar la *existencia*, basta definir una función de la manera siguiente :

$$D : \mathbb{K}_n^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$A \longmapsto D(A)$$

donde $D(A) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_n^{j_n} \; Sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$

la cual satisface los axiomas según se demuestra sin mayor dificultad. Esta es la función llamada *determinante* y se denota por det .

Si $\mathfrak{S}_n$ denota el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, se puede entonces escribir :

$$det : \mathbb{K}_n^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$A \longmapsto det(A) \text{ , } \quad \text{donde}$$

$$det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} Sgn\, \pi \cdot a_1^{\pi(1)} \cdot a_2^{\pi(2)} \cdot \ldots \; a_n^{\pi(n)}$$

Como ejemplo calculemos el determinante de una matriz de orden 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} Sgn\, \pi \cdot a_1^{\pi(1)} \; a_2^{\pi(2)} \; a_3^{\pi(3)}$$

$$det(A) = a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 - a_1^1 a_2^3 a_3^2$$

2. ***Definición por recurrencia*** . (Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o columna).

En el desarrollo del determinante de la matriz A de orden 3 , dado en el ejemplo anterior, se pueden factorizar los elementos de la primera columna así :

$$det\,(A) = a^1_1\,(a^2_2\,a^3_3 - a^3_2\,a^2_3) + a^2_1\,(\,a^3_2\,a^1_3 - a^1_2\,a^3_3\,) + a^3_1\,(a^1_2\,a^2_3 - a^2_2\,a^1_3\,)\ .$$

Si se designa por C^i_j , la expresión que multiplica al elemento a^i_j en este desarrollo, es decir :

$$C^1_1 = a^2_2\,a^3_3 - a^3_2\,a^2_3$$

$$C^2_1 = a^3_2\,a^1_3 - a^1_2\,a^3_3$$

$$C^3_1 = a^1_2\,a^2_3 - a^2_2\,a^1_3$$

puede escribirse :

$$det\,(A) = a^1_1\,C^1_1 + a^2_1\,C^2_1 + a^3_1\,C^3_1\ .$$

Se dice entonces, que el determinante ha sido desarrollado por los elementos de la primera columna, y a la expresión C^i_j se le denomina *cofactor* del correspondiente elemento a^i_j .

Obsérvese que en cada término del desarrollo inicial del $det\,(A)$, aparece uno y sólo un elemento de cada fila y columna, luego el valor del $det(A)$ no depende de la fila o columna elegida para desarrollarlo.

Así por ejemplo, $det(A)$ puede desarrollarse también por la segunda o por la tercera columna :

$$det(A) = a^1_2\ C^1_2 + a^2_2\ C^2_2 + a^3_2\ C^3_2$$

$$det(A) = a^1_3\ C^1_3 + a^2_3\ C^2_3 + a^3_3\ C^3_3$$

También se observa que C^i_j es el determinante de la matriz obtenida de A, eliminando la fila i y la columna j, multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

El determinante de la matriz A eliminando la fila i y la columna j, se llama *menor* del elemento a^i_j y se nota M^i_j. Entonces:

$$C^i_j = (-1)^{i+j} \cdot M^i_j$$

En el ejemplo: $C^1_1 = (-1)^{1+1} M^1_1 = (+1)(a^2_2\ a^3_3 - a^3_2\ a^2_3)$

$$C^2_1 = (-1)^{2+1} M^2_1 = (-1)(a^1_2\ a^3_3 - a^3_2\ a^1_3)$$

$$C^3_1 = (-1)^{3+1} M^3_1 = (+1)(a^1_2\ a^2_3 - a^2_2\ a^1_3)$$

y por lo tanto la expresión del desarrollo del $det(A)$ por la primera columna es :

$$det(A) = a^1_1 (-1)^{1+1} M^1_1 + a^{2+1}(-1)^{2+1} M^2_1 + a^3_1 (-1)^{3+1} M^3_1$$

Se reduce así el cálculo de un determinante de orden n al cálculo de n determinantes de orden $n-1$, cada uno de estos a su vez se calcula por medio de $(n-1)$ determinantes de orden $n-2$, y así sucesivamente.

Lo anterior proporciona un procedimiento sistemático para la evaluación de determinantes. La regla anterior es la base para la definición de determinante por recurrencia. Para $n=1$, definimos la función D_1, de la siguiente manera :

$$D_1 : \mathbb{K}_1^1 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(a) \longmapsto a$$

Es fácil demostrar que D_1 satisface los axiomas (1), (2), y (3) (se sugiere al lector indagar si podría no cumplir alguno). Suponemos ahora definida una función $\overline{D}$

$$\overline{D} : \mathbb{K}_{n-1}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{K}$$

que satisface los axiomas (1), (2), y (3).. Sea j un elemento arbitrario (pero fijo) del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Para cualquier matriz A de $\mathbb{K}_n^n$, definimos $D(A)$ como sigue :

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_j^i \cdot \overline{D}\,(A_j^i\,)$$

donde A_j^i es la matriz de orden n-1, obtenida a partir de A suprimiendo la fila i y la columna j. Esta expresión corresponde al desarrollo de $D(A)$ por los elementos de la j-ésima columna.

Se demuestra enseguida que D también satisface los axiomas (1), (2) y (3).

Un cálculo directo demuestra que el axioma (1) se satisface para el caso de las matrices 2×2 , es decir que si la matriz A tiene dos columnas iguales, entonces $D(A) = 0$.

Si la matriz es de orden mayor o igual a tres, fijamos una columna k, distinta de las dos iguales, y es claro que las matrices $A^i{}_k$ tienen dos columnas iguales, luego por hipótesis $\overline{D}(A^i{}_k) = 0$ para cada i. Esto demuestra que D satisface el axioma (1) pues :

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \; a_k^i \; \overline{D} \; (A_k^i) = 0 \; .$$

Para verificar que D satisface el axioma (2), es decir que D es lineal en cada columna, es suficiente desarrollar el determinante por la columna en cuestión.

Supongamos que en la matriz A, la k-ésima columna es de la forma : $A_k =$ $= \alpha \cdot B_k + C_k$, o sea ,

$$A = (A_1 , \ldots , A_{k-1}, \alpha B_k + C_k , A_{k+1} , \ldots , A_n)$$

Llamando $B = (A_1, \ldots , A_{k-1}, B_k , A_{k+1}, \ldots , A_n)$ y

$$C = (A_1 , \ldots , A_{k-1} , C_k , A_{k+1}, \ldots , A_n)$$

veamos que $D(A) = \alpha \cdot D(B) + D(C)$

En efecto :

$$D(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_k^i \cdot \overline{D} (A_k^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} (\alpha b_k^i + c_k^i) \overline{D} (A_k^i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} [\alpha b_k^i \overline{D} (A_k^i) + c_k^i \overline{D} (A_k^i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha b_k^i \overline{D} (A_k^i) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot c_k^i \overline{D} (A_k^i) =$$

$$= \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} b_k^i \overline{D} (A_k^i) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} c_k^i \overline{D} (A_k^i) = \alpha \cdot D(B) + D(C) .$$

Para demostrar que D satisface el axioma (3), (es decir que $D(I_n) = 1$) , es conveniente "desarrollar" el determinante por la primera columna :

$$D(I_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_1^i \cdot \overline{D}(A^i_1)$$

pero $a^i_1 = 0$ para todo $i \neq 1$, y, $a_1^1 = 1$. Además, $A^1_1 = I_{n-1}$, luego :

$$D(I_n) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \overline{D}(I_{n-1}) = 1 ,$$

lo cual completa la demostración .

3. ***Determinante de una Transformación Lineal.*** (Definición Invariante) .

En su libro *Espacios vectoriales finitodimensionales*, Paul R. Halmos afirma que lo realmente interesante acerca de los espacios vectoriales son las transformaciones lineales.

En este momento no es del todo desconocida la noción de linealidad ya que la hemos exigido como condición que ha de cumplir la función D , en cada una de las columnas de los elementos de $\mathbb{K}^n_n$. Como se verá más adelante, esto significa que la función D es n-lineal.

Precisemos más el concepto de *transformación lineal*. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ (el cuerpo de escalares $\mathbb{K}$ puede ser en particular el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ o el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$) .

Una función $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$ es una *transformación lineal* si para todo escalar α y todo par de vectores v y v' de $\mathcal{V}$ se tiene :

$$f(\alpha v + v') = \alpha \cdot f(v) + f(v')$$

Como ejemplo consideremos un espacio vectorial $\mathcal{V}$ cualquiera y la siguiente función f definida en $\mathcal{V}$:

$$f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$$

$$v \longrightarrow f(v) = \delta \cdot v$$

donde δ es un escalar fijo. Entonces f es una transformación lineal, pues :

$$\begin{aligned} f(\alpha v + v') &= \delta \cdot (\alpha v + v') = \delta \cdot (\alpha \cdot v) + \delta v' \\ &= \alpha (\delta \cdot v) + \delta \cdot v' \\ &= \alpha \cdot f(v) + f(v') \end{aligned}$$

Si un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es de dimensión uno, y v es un vector (elemento de $\mathcal{V}$) no nulo, entonces todo otro vector es un múltiplo de v. Es decir que si $v \in \mathcal{V}$, $v \neq 0$ (0 es el vector cero) entonces, cualquiera sea $w \in \mathcal{V}$, es posible hallar $\alpha \in \mathbb{K}$, tal que $w = \alpha\ v$.

Ejemplo. Podemos ver que $\mathbb{R}$ (los reales), como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tiene dimensión uno. En efecto sea $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ y $w \in \mathbb{R}$; entonces hay que distinguir dos casos : i) si $w = 0$, es claro, que $w = 0 \cdot v$ y ii) si $w \neq 0$, basta tomar $\alpha = \frac{w}{v}$; aquí las operaciones consideradas son el producto y el cociente de números reales.

Consideremos ahora las transformaciones lineales no nulas de un espacio vectorial de dimensión uno, (en sí mismo).

Toda transformación lineal envía al vector cero, en el vector cero; en efecto : sea $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, lineal; como $0 = 0 + 0$, por la linealidad de f, tendremos $f(O) = f(O+O) = 2 \cdot f(O)$ y esto sólo es posible si $f(O) = O$. Supongamos que f es una transformación lineal no nula de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$, donde $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial de dimensión uno. Como f es no nula existe un $v \in \mathcal{V}$ tal que $f(v) \neq 0$. Puesto que $\mathcal{V}$ es de dimensión uno, debe existir $\alpha \in K$ tal que $f(v) = \alpha \cdot v$. Es curioso, pero α es independiente de v; en efecto: sea w otro elemento de $\mathcal{V}$: si $w = O$, trivialmente $f(w) = \alpha \cdot w$; supongamos $w \neq O$, entonces, como $\mathcal{V}$ es de dimensión uno, existe $\delta \in \mathbb{K}$ tal que $w = \delta \cdot v$, luego:

$$f(w) = f(\delta \cdot v) = \delta \cdot f(v) = \delta \cdot (\alpha \cdot v) = \alpha \cdot (\delta\, v) = \alpha \cdot w$$

Es decir, una transfomación lineal de un espacio vectorial de dimensión *uno* en sí mismo, no es otra cosa que multiplicación *por un cierto escalar*. Por otra parte, la multiplicación por escalar como función de un espacio vectorial en sí mismo, siempre es lineal, como se vió en el ejemplo anterior. Queda demostrado así que éstas son las únicas transformaciones lineales en tales espacios vectoriales.

Puesto que el conjunto de escalares $\mathbb{K}$ constituye un espacio vectorial sobre sí mismo, pueden considerarse, en particular, las transformaciones lineales del espacio $\mathcal{V}$ en el espacio $\mathbb{K}$, y en este caso dichas transformaciones reciben el nombre de formas o funcionales ó funcionales lineales del espacio $\mathcal{V}$.

En el caso de funciones de dos variables vectoriales, si la función es lineal en cada una de las variables, se dice que es bilineal. Más precisamente, una forma o funcional bilineal, es una función del producto cartesiano de dos espacios vectoriales $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ en su cuerpo de escalares, la cual es lineal en cada una de las variables, es decir, $f: \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathbb{K}$ es bilineal, si *i)* $f(\alpha v_1 + v'_1, v_2) = \alpha f(v_1, v_2) + f(v'_1, v_2)$ y

ii) $f(v_1, \beta v_2 + v'_2) = \beta f(v_1, v_2) + f(v_1, v'_2)$, para α, β escalares, v_1, v'_1 vectores de $\mathcal{V}_1$ y v_2, v'_2 vectores de $\mathcal{V}_2$, cualesquiera.

Como ejemplo, consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}$ y la siguiente función p del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow p(x, y) = x \cdot y \,. \end{aligned}$$

Esta función es lineal en su primera variable pues :

$$\begin{aligned} p(\alpha x + x', y) &= (\alpha x + x') \cdot y = (\alpha x)y + (x' \cdot y) \\ &= \alpha (x \cdot y) + (x' \cdot y) = \alpha p(x, y) + p(x', y) \,. \end{aligned}$$

De manera análoga, el lector puede demostrar la linealidad de p en la segunda variable.

El concepto de forma multilineal es una generalización del concepto de forma bilineal. En efecto, sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_n$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo de escalares $\mathbb{K}$.

Una función $f: \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \dots \times \mathcal{V}_n \rightarrow \mathbb{K}$, se dice n-lineal, si es lineal en cada una de sus variables. O sea, si para todo escalar λ, y para todo par de vectores v_i, v'_i de $\mathcal{V}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ se tiene :

$$f(v_1, v_2, \dots, \lambda v_i + v'_i, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_i, \dots, v'_i, \dots, v_n)$$

y esto para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Nótese que para $n = 1$ y $n = 2$ la definición coincide con la de forma lineal y la de forma bilineal, respectivamente. Puede verificarse que el conjunto de las formas n-lineales, constituye un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, con las operaciones usuales definidas entre funciones :

$$(f+g)\,(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) + g(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{y}$$

$(\alpha\cdot f)\,(x_1,\ldots,x_n) = \alpha\cdot f(x_1,\ldots,x_n)$, para todo escalar α y toda n-pla $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{V}_1\times\cdots\times\mathcal{V}_n$.

Veamos, por ejemplo, la demostración de la propiedad *asociativa* de la adición : si f, g y h son tres formas n-lineales cualesquiera, entonces, $(f+g)+h = f+(g+h)$, es decir, para todo n-pla $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathcal{V}_1\times\mathcal{V}_2\times\cdots\times\mathcal{V}_n$, se cumple :

$$[\,(f+g)+h]\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) = [\,f+(g+h)]\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

En efecto :

$$[\,(f+g)+h\,]\,(x_1,\ldots,x_n) = (f+g)\,(x_1,\ldots,x_n) + h\,(x_1,\ldots,x_n)$$
$$= (f(x_1,\ldots,x_n) + g\,(x_1,\ldots,x_n)\,) + h\,(x_1,\ldots,x_n)$$

(Hasta aquí se ha aplicado la definición dada de adición entre funciones, y ahora por la propiedad asociativa del cuerpo de escalares se tiene:)

$$= f(x_1,\ldots,x_n) + (\,g(x_1,\ldots,x_n) + h\,(x_1,\ldots,x_n)\,)$$

(y, de nuevo por la definición de adición entre funciones:)

$$= f(x_1,\ldots,x_n) + (g+h)\,(x_1,\ldots,x_n) = [\,f+(g+h)\,]\,(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

El espacio vectorial de las formas lineales, se denomina el *dual* de $\mathcal{V}$. Los dos resultados siguientes se establecen en el desarrollo del estudio del espacio dual y serán utilizados posteriormente (ver demostración en la Nota 3).

Teorema. *Si $\mathcal{V}$ es un espacio de dimensión finita entonces. la dimensión de $\mathcal{V}$ es igual a la dimensión de su dual.*

Teorema. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio de dimensión finita. Si $\mathcal{M}$ es un subespacio propio de $\mathcal{V}$ y si $w \notin \mathcal{M}$. Entonces, existe un elemento f dual tal que $f(v) = 0$, para todo $v \in \mathcal{M}$ y $f(w) = 1$.*

Formas Multilineales Alternadas y Formas Multilineales Antisimétricas.

Se consideran ahora formas n-lineales en el producto $\mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ con $\mathcal{V}_1 = \cdots = \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$. Entre ellas son importantes las formas n-lineales alternadas y las formas n-lineales antisimétricas. Una forma n-lineal *alternada* es una función $f: \mathcal{V}^n \longrightarrow I\!K$, tal que $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$, siempre que $v_i = v_j$ para algún i y para algún j, $i \neq j$.

Una forma n-lineal *antisimétrica*, es una función $f: \mathcal{V}^n \longrightarrow I\!K$, tal que, $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = - f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$. Puede formularse la definición de forma n-lineal antisimétrica, de una manera aparentemente más débil refiriéndose a índices consecutivos.

Una función $f: \mathcal{V}^n \longrightarrow I\!K$, n-lineal, se dice antisimétrica, si :

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = -f(v_1, v_2, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_n)$$

para todo índice $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Que la primera definición implica esta, es obvio, pues si el cambio de dos argumentos cualesquiera, cambia el signo, en particular se cambia el signo, si los índices son consecutivos.

Por otra parte, el cambio de dos argumentos cualesquiera, se puede obtener mediante un número impar de cambios consecutivos. En efecto, sea $i < j$. Para pasar x_j al punto i, son necesarios $j-i$ cambios, el último de estos, se efectúa con x_i, luego para que x_i pase al puesto j son suficientes $j-i-1$ cambios. En total se han efectuado $(j-i) + (j-i-1) = 2(j-i)-1$ cambios consecutivos.

Veamos ahora que lo conceptos de forma n-lineal alternada y forma n-lineal antisimétrica, son equivalentes; también que las formas n-lineales alternadas forman un subespacio del espacio de las formas n-lineales y finalmente que la dimensión de este subespacio es uno.

Teorema. *Una forma n-lineal es alternada si y sólo si es antisimétrica.*

Demostración. Supongamos que f es una forma n-lineal alternada con respecto al i-ésimo y al j-ésimo argumentos. Entonces

$$f(v_1, \ldots, (v_i + v_j), \ldots, (v_i + v_j), \ldots, v_n) = 0$$

Por otra parte, siendo f n-lineal, se puede escribir:

$$f(v_1, \ldots, (v_i + v_j), \ldots, (v_i + v_j), \ldots, v_n) =$$

$$= f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, (v_i + v_j), \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, (v_i + v_j), \ldots, v_n)$$

$$= f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) +$$

$$+ f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

Siendo f alternada, el primero y el último sumando se anulan. Así:

$$0 = f(v_1, \ldots, (v_i + v_j), \ldots, (v_i + v_j), \ldots, v_n) =$$

$$= f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Luego $f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$, con lo cual se demuestra que f es antisimétrica .

Recíprocamente, si f es n-lineal antisimétrica, entonces

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = - f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$$

Para ver que f es alternada, supongamos que $v_i = v_j$, con lo cual:

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = - f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$$

Entonces :

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$$

O sea $\quad (1+1) \cdot f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$

$$\Rightarrow f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$$

Nótese que el teorema anterior es válido solamente para cuerpos de escalares en donde $1+1 \neq 0$.

Teorema . *El conjunto de todas las formas n-lineales alternadas es un subespacio, del espacio vectorial de las formas n-lineales.*

Demostración. i) Sean f y g formas n-lineales alternadas. Como

$$(f+g)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(v_1, v_2, \ldots, v_n) + g(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Si $v_i = v_j$ $(i \neq j)$, entonces $(f+g)(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0+0 = 0$

ii) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, y f n-lineal alternada. Si $v_i = v_j$ $(i \neq j)$, entonces ,

$$(\alpha f)(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \alpha \cdot f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Teorema. *Si f es una forma n-lineal alternada $(f \neq 0)$ y si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son* *vectores linealmente dependientes, entonces,* $f(v_1,\dots,v_n) = 0$.

Demostración. Si algún $v_i = 0$ $(1 \le i \le n)$; escribiendo v_i como el producto del escalar cero, por el vector cero, se tiene :

$$f(v_1,\dots,0.0,\dots,v_n) = 0 \cdot f(v_1,\dots,0,\dots,v_n) = 0$$

Supongamos ahora que $v_i \neq 0$ (para todo i), y que $v_1, v_2, \dots, v_n$ son linealmente dependientes; existe entonces un vector que es combinación lineal de los anteriores. Sea $v_j = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1}$ $(2 \le j \le n)$. Entonces :

$$f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_n) = f(v_1,\dots,v_{j-1},(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1}), v_{j+1},\dots,v_n)$$

Siendo f n-lineal se tiene :

$$f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_n) = \alpha_1 f(v_1,\dots,v_{j-1}, v_1, v_{j+1},\dots,v_n) +$$

$$+ \alpha_2 f(v_1, v_2,\dots,v_{j-1}, v_2, v_{j+1},\dots,v_n) + \dots + \alpha_{j-1} f(v_1,\dots,v_{j-1}, v_{j-1}, v_{j+1},\dots,v_n)$$

Como f es alternada, los sumandos de la derecha son cero, y por lo tanto

$$f(v_1 \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$$

Teorema. *Sea* $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial de dimensión* n, f *una forma n-lineal alternada distinta de cero, y sean* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *vectores linealmente independientes. Entonces*

$$f(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0 .$$

Demostración. (Contrarrecíproca). Supongamos que $f(v_1,\dots,v_n) = 0$; veamos que entonces $f = 0$, es decir que cualesquiera sean los vectores $w_1, w_2, \dots, w_n$, se tiene que $f(w_1,\dots,w_n) = 0$.

Como la dimensión de $\mathcal{V}$ es n, y los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son lineal - mente independientes, entonces, estos vectores forman una base de $\mathcal{V}$. Es decir :

$$w_1 = \alpha^1_1 v_1 + \alpha^1_2 v_2 + \cdots + \alpha^1_n v_n$$

$$w_2 = \alpha^2_1 v_1 + \alpha^2_2 v_2 + \cdots + \alpha^2_n v_n$$

$$\vdots$$

$$w_n = \alpha^n_1 v_1 + \alpha^n_2 v_2 + \cdots + \alpha^n_n v_n$$

Reemplazando en $f(w_1, \ldots, w_n)$ los resultados anteriores y desarrollando por n-linealidad se tiene :

$$f(w_1, w_2, \ldots, w_n) =$$

$$= f\Big(\sum_{i_j=1}^{n} \alpha^1_{i_1} \cdot v_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \alpha^2_{i_2} \cdot v_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} \alpha^n_{i_n} \cdot v_{i_n}\Big)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \alpha^1_{i_1} \cdot f\Big(v_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} \alpha^2_{i_2} v_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} \alpha^n_{i_n} v_{i_n}\Big)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \alpha^1_{i_1} \sum \alpha^2_{i_2} f\Big(v_{i_1}, v_{i_2}, \sum_{i_3=1}^{n} \alpha^3_{i_3} v_{i_3}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} \alpha^n_{i_n} v_{i_n}\Big)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \alpha^1_{i_1} \cdot \alpha^2_{i_2} \cdots \alpha^n_{i_n} f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1} \alpha^1_{i_1} \cdot \alpha^2_{i_2} \cdots \alpha^n_{i_n} \cdot f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$$

Si existen i_h e i_k $(i_h \neq i_k)$ tales que : $v_{i_h} = v_{i_k}$ entonces

$$f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}, \ldots, v_{i_h}, \ldots, v_{i_n}) = 0$$

Si todos los $i_1, i_2, \ldots, i_n$ son diferentes, constituyen una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Luego la última suma queda reducida a una suma sobre las permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ Pero, si

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k \ldots & l \ldots & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_k \ldots & i_e \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$, entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 2, \ldots & k \ldots & l \ldots & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_l \ldots & i_k \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

también es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Como f es alternada, entonces :

$$f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}, \ldots, v_{i_l}, \ldots, v_{i_n}) = - f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_l}, \ldots, v_{i_k}, \ldots, v_{i_n})$$

Lo anterior es válido para toda permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sabemos que hay $n!$ permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si $n > 1$, es obvio que $n!$ es par.

Por el razonamiento anterior para cada sumando hay otro de igual magnitud y de signo contrario. Entonces :

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \alpha^1_{i_1} \alpha^2_{i_2} \ldots \alpha^n_{i_n} f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}) = 0$$

Teorema. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Dos formas n-lineales alternadas cualesquiera son linealmente dependientes.*

Demostración. Sean f y g dos formas n-lineales alternadas cualesquiera, y sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathcal{V}$.

Las formas f y g son linealmente dependientes, si existen dos escalares α y β en $\mathbb{K}$ (no ambos nulos) tales que $\alpha \cdot f + \beta \cdot g = 0$. Es decir, que dados $w_1, \ldots, w_n$ vectores arbitrarios de $\mathcal{V}$, se tiene que :

$$(\alpha f + \beta g)(w_1, \ldots, w_n) = 0$$

O sea,

$$\alpha \cdot f(w_1, \ldots, w_n) + \beta \cdot g(w_1, \ldots, w_n) = 0$$

Expresando los $w_1, w_2, \ldots, w_n$ en términos de la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ como en el teorema anterior, obtenemos una expresión de la forma :

$$0 = \alpha \cdot \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \alpha^1_{i_1} \alpha^2_{i_2} \ldots \alpha^n_{i_n} f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}) +$$

$$+ \beta \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \alpha^1_{i_1} \cdot \alpha^2_{i_2} \ldots \alpha^n_{i_n} g(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$$

($f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$ y $g(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$ son escalares).

Sean $A = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \alpha^1_{i_1}, \alpha^2_{i_2} \ldots \alpha^n_{i_n} f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_n})$

$$B = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \alpha^1_{i_1} \alpha^2_{i_2} \ldots \alpha^n_{i_n} g(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$$

Es claro que siempre existen escalares α y β al menos uno de los dos no nulo, tales que : $\alpha \cdot A + \beta \cdot B = 0$ con lo cual queda demostrado el teorema.

Teniendo en cuenta la definición de dimensión, el teorema anterior afirma que la dimensión del espacio de las formas n-lineales alternadas es a lo más *uno* . En el siguiente teorema se demuestra que es exactamente *uno*.

Teorema. *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Entonces, el espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las formas n-lineales alternadas en $\mathcal{V}$, es de dimensión uno*

Demostración. Efectuando inducción sobre el grado k de multilinealidad $(1 \leq k \leq n)$, se demuestra que existe por lo menos una forma n-lineal alternada no nula. Si $k = 1$ el teorema se reduce a demostrar la existencia de por lo menos una forma lineal alternada no nula. Pero toda forma lineal es alternada, pues satisface vacíamente la definición y por lo tanto existen muchas formas lineales alternadas no nulas.

Si $1 < k < n$, supongamos que existe una forma k-lineal alternada no nula f. Veamos que existe entonces una forma $(k+1)$ - lineal g alternada y no nula. Puesto que f es no nula, deben existir vectores $w_1, w_2, \ldots, w_k$ tales que :

$$f(w_1, w_2, \ldots, w_k) \neq 0 .$$

Pero siendo $k < n$ (dimensión de $\mathcal{V}$), los vectores $w_1, \ldots, w_k$ no pueden generar todo el espacio $\mathcal{V}$, y por lo tanto se puede encontrar un vector w_{k+1} que no pertenece al subespacio generado por $\{ w_1, w_2, \ldots, w_k \}$, lo cual garantiza la existencia de una forma lineal h, tal que :

$$h(w_1) = h(w_2) = \dots = h(w_k) = 0 \quad , \quad y \quad h(w_{k+1}) = 1$$

La función g definida por :

$$g(v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \cdot h(v_i) \cdot f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{k+1})$$

resulta ser $(k+1)$ - lineal, pues f es una forma k-lineal y h es una forma lineal.

Para ver que g es no nula, basta calcularla en $(w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1})$.

$$g(w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} h(w_i) \cdot f(w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_{k+1})$$

Como $h(w_i) = 0$ para todo $i \neq k+1$, todos los términos de la suma excepto el último son cero, y puesto que $h(w_{k+1}) = 1$, se obtiene :

$$g(w_1, \dots, w_k, w_{k+1}) = (-1)^{k+1-1} h(w_{k+1}) f(w_1, w_2, \dots, w_k)$$

$$= (-1)^k f(w_1, w_2, \dots, w_k) \neq 0$$

Para ver que g es alternada, supongamos que $v_j = v_{j+1}$ y calculemos :

$$g(v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot h(v_i) \cdot f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{k+1})$$

Como f es alternada, todos los sumandos son cero, salvo el j-ésimo, y el $(j+1)$ ésimo. Entonces :

$$g(v_1,\ldots,v_j,v_{j+1},\ldots,v_{k+1}) = (-1)^{j-1}\, h(v_j)\cdot f(v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+1},v_{j+2},\ldots,v_{k+1}) +$$

$$+ (-1)^{j+1-1}\cdot h(v_{j+1})\cdot f(v_1,\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+2},\ldots,v_{k+1})$$

Estos dos sumandos difieren sólo en el signo, de donde,

$$g(v_1,\ldots,v_j,v_{j+1},\ldots,v_{k+1}) = 0$$

Con esto, se ha probado que el espacio de las formas n-lineales alternadas tiene dimensión mayor o igual a uno.

Este resultado y el teorema anterior demuestran que la dimensión del espacio de las formas n-lineales alternadas, en un espacio de dimensión n, es exactamente uno.

Determinante de una transformación lineal.

Los conceptos estudiados hasta aquí, permiten introducir la noción de *determinante de una transformación lineal.* Recuérdese que, hasta ahora, la noción de *determinante* se ha introducido con respecto a matrices y que, una misma transformación lineal viene representada por diferentes matrices.

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial n-dimensional, y A una transformación lineal arbitraria de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$. Llamando $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ al conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$ se desea definir el *determinante* como una función de $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ en $\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} det: \mathcal{L}(\mathcal{V}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longrightarrow det\ A. \end{aligned}$$

Dada una forma n-lineal alternada f en $\mathcal{V}$, y una transformación lineal A de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$, es posible definir una nueva forma n-lineal alternada g así :

$$g(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(A(v_1), A(v_2), \ldots, A(v_n))$$

i) Veamos que g es n-lineal :

$$g(v_1, \ldots, \lambda v_i + v_i', \ldots, v_n) = f(A(v_1), \ldots, A(\lambda v_i + v_i'), \ldots, A(v_n))$$

(y puesto que A es lineal, se tiene) :

$$= f(A(v_1), \ldots, \lambda A(v_i) + A(v_i'), \ldots, A(v_n)) \quad \text{(y por ser } f \text{ una n-forma lineal:)}$$

$$= \lambda f(A(v_1), \ldots, A(v_i), \ldots, A(v_n)) + f(A(v_1), \ldots, A(v_i'), \ldots, A(v_n)) =$$

$$= \lambda g(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + g(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$$

y esto se cumple para todo i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

ii) Veamos que g es alternada : supongamos que $v_i = v_j$ $(i \neq j)$ entonces $A(v_i) = A(v_j)$ (puesto que A es función), luego :

$$g(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = f(A(v_i), \ldots, A(v_i), \ldots, A(v_j), \ldots, A(v_n)) = 0$$

Así, A determina una nueva función $\bar{A}$, que a cada n-forma lineal alternada, asigna otra forma n-lineal alternada. O sea :

$$\begin{aligned} \bar{A} : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f &\longrightarrow g = A(f) \end{aligned}$$

donde $\bar{A}(f)(v_1, \ldots, v_n) = f(A(v_1), \ldots, A(v_n))$.

Claramente $\bar{A}$ es una transformación lineal de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$. Ahora bien, como la dimensión de $\mathcal{F}$ es uno, entonces, según se vio antes, existe un único escalar δ, tal que :

$$\bar{A}(f) = \delta \cdot f$$

para toda f de $\mathcal{F}$.

Se puede afirmar ahora, que si A es una transfomación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$, entonces, existe un único escalar δ tal que : $\bar{A}(f) = \delta \cdot f$, para toda forma n-lineal alternada f.

Llamamos, *determinante de* A, al escalar δ, y la función que a cada transformación $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ asigna su determinante es la *función determinante* :

$$\begin{aligned} det : \mathcal{L}(\mathcal{V}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longrightarrow det\ A. \end{aligned}$$

donde $det\ A$, es el único escalar tal que :

$$\bar{A}(f) = (det\ A) \cdot f \quad \text{para toda} \quad f \in \mathcal{F}$$

O sea : $\bar{A}(f)(v_1, \ldots, v_n) = (det\ A) \cdot f(A(v_1), \ldots, A(v_n))$

cualesquiera sean $A, f, v_1, \ldots, v_n$.

A manera de ejemplo, se calcula, enseguida el determinante de una transformación lineal sencilla, a saber, la multiplicación por un escalar :

Sea $A(v) = \alpha \cdot v$ para todo $v \in \mathcal{V}$. Entonces

$$\overline{A}\,(f)\,(v_1, v_1, \ldots, v_n) = f(A(v_1)\,,\, A(v_2), \ldots, A(v_n)\,) = f(\alpha\, v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$$

$$= \alpha^n .\, f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Por consiguiente : $\overline{A}(f) = \alpha^n \cdot f$, para todo $f \in \mathcal{F}$ y entonces,

$$det\ A = \alpha^n$$

En particular, $det\ 0 = 0$ (tomando $\alpha = 0$) y $det\ 1 = 1$ (tomando $\alpha = 1$) .

Una propiedad de los determinantes, cuya demostración en el tratamiento clásico de estos es más bien complicada,es la referente al determinante del producto de matrices, que como es sabido es el producto de los determinantes. El anterior enfoque permite simplificar dicha demostración, como se verá enseguida, sin que esto constituya la única ventaja del presente desarrollo sobre el tratamiento clásico de los determinantes.

Con tal fin demostraremos el siguiente lema preliminar :

Lema. Si A y B son transformaciones lineales sobre $\mathcal{V}$, entonces :

$$\overline{A \circ B} = \overline{B} \circ \overline{A}$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{F}$ cualquiera (es decir f es una forma n-lineal alternada cualquiera). Se trata de ver que : $(\overline{A \circ B})\,(f) = \overline{B}\,(\overline{A}\,(f)\,)$. Pero :

$$[\,(\overline{A \circ B})\,(f)\,]\,(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(A \circ B\,(v_1)\,,\, A \circ B\,(v_2)\,, \ldots, A \circ B\,(v_n)\;) =$$

$$= [\;\overline{A}(f)\;]\,(B\,(v_1),\, B(v_2), \ldots, B\,(v_n)\,)$$

$$= \overline{B}\;[\;\overline{A}(f)\;]\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$= [\;\overline{B} \circ \overline{A}\,(f)\,]\,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Luego se tiene la igualdad .

Obsérvese que para demostrar esta propiedad no se ha usado la hipótesis de que f es *alternada*, En realidad este teorema es cierto en el espacio de todas formas n-lineales.

Teorema . *Si* A y B *son transformaciones lineales de* $\mathcal{V}$ *en* $\mathcal{V}$ *, entonces:*

$$det\,(A \circ B) = (det\,A)\,(det\,B)$$

Demostración. Por definición, $det\,(A \circ B)$ es el único escalar α, tal que :

$$\overline{(A \circ B)}\,(f) = \alpha \cdot f, \text{ para toda } f \in \mathcal{F}$$

Pero para cada $f \in \mathcal{F}$ se tiene :

$$\overline{(A \circ B)}\,(f) = (\overline{B} \circ \overline{A})\,(f) = \overline{B}\,(\overline{A}\,(f)\,) = \overline{B}\,(\,(\,det\,A)\,f) = (det\,A) \cdot \overline{B}\,(f)$$

$$= (det\,A)\,(det\,B)\,(f),$$

con lo cual queda demostrado que :

$$det\,(A \circ B) = (det\,A)\,(det\,B)$$

Como Corolario puede demostrarse que : A es invertible, si y sólo si, $det\,A \neq 0$.

Veamos finalmente la relación entre la noción de determinante de una transformación lineal y la de determinante de una matriz .

Sea A una transformación lineal de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$ y $\mathfrak{X} = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ una base de $\mathcal{V}$. Sea (a^j_i) la matriz de A con respecto a la base $\mathfrak{X}$. Si $f \in \mathcal{F}$ (f es una forma n-lineal alternada) tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, y si π es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es claro que :

$$f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(3)}) = Sgn\,\pi \quad , \qquad \text{y}$$

$$\det A = f(Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n)$$

Como $A x_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_i^{j_i} x_{j_i}$ (para $i = 1, \ldots, n$) se tiene que :

$$\det A = f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_1^{j_1} x_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_2^{j_2} x_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_n^{j_n} x_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots a_n^{j_n} \cdot f(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})$$

y ésta última suma se hace sobre las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$, puesto que f es n-lineal alternada. Por consiguiente :

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (Sgn\,\pi)\, a_1^{\pi(1)} \cdot a_2^{\pi(2)} \ldots a_n^{\pi(n)} \quad ,$$

la cual es la expresión clásica para el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$$

NOTAS

Nota 1. Usaremos aquí el método de inducción, para demostrar que toda permutación es producto de trasposiciones :

i) Veamos primero que esto es cierto en $\mathfrak{S}_2$ (que viene a ser el "menor" grupo no trivial de permutaciones).

Sea $S = \{ 1, 2 \}$, entonces ,

$$\mathfrak{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es claro que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es una transposición . Si llamamos τ a esta trasposición , también es claro que $\tau \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ii) Ahora supongamos que la afirmación es cierta para $\mathfrak{S}_n$, demostraremos que también lo es para $\mathfrak{S}_{n+1}$

Sea $\rho \in \mathfrak{S}_{n+1}$ tal que $\rho(n+1) = n+1$, entonces la restricción de ρ al conjunto $S = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ (notada ρ_S) puede considerarse como elemento de $\mathfrak{S}_n$, en efecto $\rho|_S(j) = \rho(j)$ para todo $j \in S$, luego, por hipótesis $\rho|_S$ es producto de transposiciones de $\mathfrak{S}_n$. Es muy fácil ver que toda trasposición de $\mathfrak{S}_n$ se puede *extender* a una trasposición de $\mathfrak{S}_{n+1}$. En efecto : sea τ una trasposición de $\mathfrak{S}_n$. Definamos

$$\hat{\tau} : S \cup \{n+1\} \longrightarrow S \cup \{n+1\} \quad \text{así :}$$

$$\hat{\tau}(j) = \tau(j) \quad \text{si} \quad 1 \leq j \leq n$$

y

$$\hat{\tau}(n+1) = n+1$$

lo cual demuestra que $\hat{\tau}$ es una trasposición de $\mathfrak{S}_{n+1}$. Puesto que $\rho|_S$ es producto de trasposiciones de $\mathfrak{S}_n$, al extender cada una de estas trasposiciones a trasposiciones de $\mathfrak{S}_{n+1}$, queda demostrado que $\rho|_S$ se puede expresar como producto de trasposiciones de $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Finalmente si $\rho \in \mathfrak{S}_{n+1}$, pero $\rho(n+1) = k \neq n+1$, consideremos la trasposición $\xi : S \cup \{n+1\} \to S \cup \{n+1\}$, tal que $\xi(n+1) = k$ y $\xi(k) = n+1$ (recuérdese que $\xi(j) = j$ si $k \neq j \neq n+1)$.

Entonces es claro que $(\xi \circ \rho)(n+1) = \xi(\rho(n+1)) = \xi(k) = n+1$ y estamos en el caso anterior, luego $\xi \circ \rho$ se puede expresar como producto de trasposiciones de $\mathfrak{S}_{n+1}$ y puesto que $(\xi \circ \xi)(j) = j$ para todo $j \in S \cup \{n+1\}$, se tiene que $(\xi \circ \xi) \circ \rho = \rho$ con lo cual queda probado que ρ es producto de trasposiciones de $\mathfrak{S}_{n+1}$.

***Nota** 2.* Recordemos algunas definiciones :

i) *Base*. Se llama *base* de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ a todo conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ con la propiedad de que para todo vector $v \in \mathcal{V}$ existe uno y sólo un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ii) *Dimensión*. Al número de elementos de una base se denomina *dimensión* del espacio. Un hecho útil es el siguiente :

***Teorema**.* *La dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita es igual a la dimensión de su dual.*

***Demostración**.* Supongamos que $\mathcal{V}$ tiene dimensión n y sea

$\mathfrak{X} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ una base de $\mathcal{V}$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, consideremos los escalares : $\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{nj}$ definidos así :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} , \ i = j \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Así para $j = 1$, se tienen los escalares : $1, 0, \ldots, 0$

para $j = 2$, se tienen los escalares : $0, 1, \ldots, 0$

$\vdots$

$j = n$, se tienen los escalares : $0, 0, \ldots, 1$

Introducimos ahora n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de $\mathcal{V}$ en $\mathbb{K}$, de la manera siguiente :

Dado $v \in \mathcal{V}$, entonces, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$, por ser $\mathfrak{X} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ una base. Se define :

$$\begin{aligned} f_j : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ v &\longrightarrow f_j(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \delta_{ij} \end{aligned}$$

En forma explícita :

$$f_j(v) = \alpha_1 \delta_{1j} + \alpha_2 \delta_{2j} + \cdots + \alpha_n \delta_{nj}$$

Puesto que el conjunto $\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \}$ es único, las f_j son elementos del dual de $\mathcal{V}$, es decir, son lineales. En efecto; sea v' otro elemento de $\mathcal{V}$, tal que :

$$v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i v_i \ , \quad \text{entonces :}$$

$$f_j(\beta v + v') = \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i + \alpha'_i)\delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{ (\beta\alpha_i)\delta_{ij} + \alpha'_i\delta_{ij} \} =$$

$$= \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i\delta_{ij}$$

$$= \beta \cdot f_j(v) + f_j(v') .$$

Se puede demostrar que el conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ constituye una base de $\mathcal{V}'$. En efecto :

i) Veamos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es linealmente independiente. Es decir, que la condición $\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$ implica que $\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Supongamos que : $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n = 0$, con $\beta_i \in \mathbb{K}$, $(i=1,\ldots,n)$. Es decir, la función $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n$, calculada en cualquier elemento de $\mathcal{V}$, es cero, en particular lo es en los elementos de la base. O sea :

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n)(v_1) = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 f_1(v_1) + \beta_2 f_2(v_1) + \cdots + \beta_n f_n(v_1) = 0$$

Como $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 . v_2 + \cdots + 0 . v_n$, entonces

$$\beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 0 + \cdots + \beta_n \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 0 .$$

Análogamente de $(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n)(v_2) = 0$, resulta que $\beta_2 = 0$.

De esta manera se obtiene que :

$$\beta_i = 0, \quad \text{para todo} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ii) Veamos que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ genera el espacio dual de $\mathcal{V}$. Es decir, dada una función arbitraria f del dual existen escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ tales que :

$$f = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n .$$

En efecto, llamando $f(v_i) = \beta_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Veamos ahora que, si v es un elemento arbitrario de $\mathcal{V}$, entonces

$$f(v) = (\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n)(v).$$

En efecto, sea $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$; entonces :

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cdot f(v_i)) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cdot \beta_i).$$

Por otra parte :

$$(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n)(v) = \beta_1 f_1(v) + \beta_2 f_2(v) + \cdots + \beta_n f_n(v) =$$

$$= \beta_1 \cdot \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 + \cdots + \beta_n \alpha_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\beta_i \cdot \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \cdot \beta_i).$$

Se ha demostrado que la dimensión del dual de $\mathcal{V}$, también es n.

El siguiente resultado muestra en cierta forma la "abundancia" de formas lineales :

Teorema. *Sea* $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial de dimensión finita. Si* $\mathcal{M}$ *es un sub-espacio propio de* $\mathcal{V}$ *y si* $w \notin \mathcal{M}$*, entonces existe un elemento* f *del dual, tal que* $f(v) = 0$ *para todo* $v \in \mathcal{M}$ *y* $f(w) = 1$.

Demostración. Puesto que $\mathcal{M}$ es sub-espacio, tiene una base, digamos $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, la cual puede ser completada a una base de $\mathcal{V}$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$, (suponiendo que $\mathcal{V}$ tiene dimensión n). Consideramos la base dual de esta, a saber :

$$\{f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n\}, \text{ donde } f_j(v_i) = \delta_{ij}$$

Puesto que $w \notin \mathcal{M}$, entonces, $w \neq 0$ ya que $0 \in \mathcal{M}$, por ser $\mathcal{M}$ subespacio. Como

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

debe existir al menos un $\alpha_{io} \neq 0$; es más, se puede afirmar que $m+1 \leq i_o \leq n$, pues si todos los α_i distintos de cero son tales que $1 \leq i \leq m$, se tendría que $w \in \mathcal{M}$, contra la hipótesis.

Sea $f = \dfrac{1}{\alpha_{io}} f_{io}$; si $v \in \mathcal{M}$, entonces, $f(v) = 0$ puesto que $f_{io}(v_i) = 0$ $\forall i = 1, 2, \ldots, m$.

Ahora $f(w) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = 1$, en efecto

$$f(v_i) = \frac{1}{\alpha_{io}} f_{io}(v_i) = 0 \qquad \forall i \neq i_o, \text{ y }, f_{io}(v_{io}) = 1 .$$

Referencias

1. Halmos P. R. *Espacios Vectoriales Finitodimensionales*. Cecsa , 1965.
2. Lentin - Rivaud. *Algebra Moderna* . Ed. Aguilar, 1967.
3. Lichnerovicz A. *Algèbre et Analyse Linéaires.* Masson - Editeurs 1960.
4. Mostow-Sampson-Meyer. *Fundamental Structures of Algebra* . McGraw-Hill, 1963.
5. Ruiz R., Palacios E. Apuntes sobre determinantes. II Coloquio de Matemáticas, Universidad Nacional, 1972.
6. Stewart F. M. *Introduction to Linear Algebra* . Van Nostrand, 1963.
7. Takahashi A. Apuntes de clase , 1972 .

* * *

Lógica y Matemática

Al hablar de la aritmética (álgebra, análisis) como parte de la lógica quiero indicar que considero el concepto de número enteramente independiente de nociones o intuiciones de espacio y tiempo, que lo considero como un resultado inmediato de las leyes del pensamiento.

R. Dedekind