Boletín de Matemáticas
Vol. VI, No. 6, pp. 59-71

LAS NOCIONES MATEMATICAS, V

ALONSO TAKAHASHI

6. DAVID HILBERT

(El Formalismo)

Axiomatización de la Geometría. Aunque el tratamiento estrictamente axiomático de la Geometría fue una labor desarrollada casi simultáneamente por varios matemáticos como M. Pasch (*Vorlesungen uber Neuere Geometrie*, 1882), G. Peano (*Principii di Geometria, logicamente esposti*, 1889), Pieri (1899), etc., tradicionalmente se acostumbra considerar a David Hilbert (1862, 1943) como el primero en exponer el método axiomático, en el sentido moderno, en su hoy clásico tratamiento de la Geometría. El "método" de trabajo característico de Hilbert consistía en concentrar su enorme energía mental durante largos períodos de tiempo en una rama particular hasta dejarla casi exhausta (por lo menos en relación con las posibilidades de la época) para luego abandonarla y concentrar su atención en una dirección completamente diferente. Fue así como se constituyó en pionero en muchas y muy diversas áreas de las Matemáticas y de la Física teniendo además una pléyade de discípulos de talla excepcional como John von Neumann, Enrico Fermi, Robert Oppen heimer y otros. Su obra en geometría consistió en tomar el rudimentario intento de Euclides y enunciar con claridad un sencillo sistema de axiomas, clasificados por razones simplemente técnicas en cinco grupos, a partir de los cuales pueden demostrarse rigurosamente los teoremas geométricos usuales. Su interés radica primordialmente en el análisis de las interrelaciones de los axiomas entre sí y de éstos con los teoremas. Como dice Hermann Weil : " Una cosa es edificar la Geometría sobre cimientos firmes y otra inquirir dentro de la estructura lógica del edificio así erigido. Si no me equivoco, Hilbert es el primero en moverse libremente en este nivel «metageométrico» superior : sistemáticamente estudia la mutua independencia de sus axiomas y resuelve, para los más fundamentales teoremas geométricos, la cuestión de su independencia con respecto a ciertos grupos limitados de entre sus axiomas. Su método es la *construcción de modelos* : se muestra que un modelo no comulga con uno de los axiomas mientras que sí satisface todos los demás ; entonces, dicho axioma no puede ser una consecuencia de los otros".

Estas investigaciones fueron expuestas en el libro *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría, 1899), cuyas célebres frases introductorias muestran de una vez por todas el espíritu del *método axiomático* :

" Pensemos (en) tres distintos sistemas de entes : a los entes del *primer* sistema los llamamos *puntos* y los designamos A, B, C, . . . , a los entes del *segundo* sistema los llamamos *rectas* y los designamos a, b, c, . . . , a los entes del *tercer* sistema los llamamos *planos* y los designamos α, β, γ, ...

" Concebimos los puntos, rectas y planos guardando ciertas relaciones recíprocas y nos referimos a estas relaciones como « estar situado» , «entre» , «congruente», «paralelo» , « continuo» . La descripción completa de estas relaciones, llevada a cabo exactamente y con fines matemáticos, resulta de los *axiomas de la Geometría* ".

Como se dijo al principio, ideas análogas habían sido expuestas, por ejemplo, por Pasch quien enunciaba un "sistema básico" de proposiciones, a partir del cual se deducían los teoremas. En sus propias palabras : " En realidad, si se quiere que la geometría sea deductiva, la deducción debe ser en todo punto independiente del *significado* de los conceptos geométricos, tanto como debe ser independiente de los diagramas; únicamente las *relaciones* especificadas en las proposiciones y definiciones empleadas pueden legítimamente tomarse en cuenta. Durante la deducción es útil y legítimo, más en modo alguno necesario, pensar en el significado de los términos; de hecho, si resultare necesario hacerlo, eso mismo pondría de manifiesto lo inadecuado de la demostración. Más, cuando un teorema ha sido derivado de un conjunto de axiomas - el sistema *básico* - la deducción tiene un valor que va más allá del propósito original, pues, si al reemplazar en el sistema básico los términos geométricos por ciertos otros, se obtienen proposiciones ciertas, entonces también pueden hacerse los correspondientes reemplazos en el teorema ; de este modo uno obtiene un nuevo teorema el cual es consecuencia de las nuevas proposiciones básicas y esto sin haber tenido que repetir la demostración". Puede observarse claramente que ya aquí se reconocía y se buscaba la llamada *economía de esfuerzo* (o de "pensamiento") característica de la moderna axiomática, aunque en ese momento sólo se trataba de un subproducto del interés hacia el análisis de las interrelaciones entre los "axiomas" geométricos originado en los estudios acerca de la independencia del *quinto postulado de Euclides*. Estos estudios condujeron a la invención de las *geometrías no-euclideanas* (Gauss, Bolyai, Lobachevski, Riemann) y como extrapolación natural a las "geometrías" completamente abstractas. Es así como Grassmann hablaba (1844) de la "fundamentación abstracta de la doctrina del espacio, esto es, libre de toda intuición espacial y que es una disciplina puramente matemática cuya aplicación al espacio da como resultado la ciencia del espacio. Esta última, al referirse a algo dado en la naturaleza (a saber, el espacio) no es una rama de las matemáticas sino una aplicación de las matemáticas a la naturaleza". Mas tarde (1889) y para comenzar la obra mencionada al principio de este artículo, Peano diría : "El signo **1** se lee *punto*" (intuitivamente es el "conjunto de todos los puntos"), agregando más adelante : "Tenemos entonces una categoría de entes llamados puntos. Estos entes no se definen. Además, dados tres puntos, consideramos una relación entre ellos, indicada por $c \;\varepsilon\; a\,b$, y esta relación tampoco se define. El lector puede entender por el signo **1** una categoría cualquiera de entes y por $c \;\varepsilon\; a\,b$ una relación cualquiera entre tres entes de dicha categoría ". Por último, citemos a G. Fano : "Como base de nuestro estudio asumimos una *colección* arbitraria de entes de naturaleza arbitraria ; entes que, para abreviar, llamaremos *puntos* , y esto independientemente de su naturaleza" *(Sui postulati fondamentalli della geometria in uno spazio lineare a un número qualunque di dimensioni* , 1892) .

Las observaciones anteriores muestran que a finales del siglo pasado la axiomatización, el estudio de situaciones y teorías abstractas y, como consecuencia natural, la formalización de las mismas, era algo que "flotaba en el ambiente" . Valgan estas consideraciones para ayudar a situar adecuadamente la actividad científica de Hilbert y en modo alguno para disminuir la importancia de sus contribuciones ciertamente decisivas y perdurables tanto en este campo como en todos los que estudió, lo cual le ha valido el ser considerado por muchos como el más grande matemático de este siglo o por lo menos como el de mayor influencia en nuestra época.

Ya en 1888 el genio de Hilbert se había manifestado en forma impresionante cuando, usando procedimientos asombrosamente efectivos, logró demostrar los teoremas existenciales básicos de la hasta entonces intrincadísima Teoría de los invariantes. Esta modalidad en el enfoque de los problemas, el "estilo hilbertiano", consistía en atacar a fondo el núcleo mismo del problema en la forma más simple y directa posible. "*Ex ungue leonem*, el joven león Hilbert muestra sus garras", comentaba Weil al comprender las grandes potencialidades del nuevo prodigio. Y en presencia del resultado mismo, Gordan, un especialista en la Teoría de los Invariantes, exclama "¡ Esto ya no es Matemática, es Teología! " Reacciones análogas habían desencadenado poco antes las hoy clásicas demostraciones de Cantor referentes a los cardinales infinitos, como la no enumerabilidad de los números reales, la existencia de números trascendentales (1873) y los múltiples resultados de la aritmética transfinita los cuales, de acuerdo con Kronecker, no eran matemáticas sino misticismo.

***Axiomatización*.** Siguiendo a Hilbert, un sistema de axiomas para una teoría particular, por ejemplo la Geometría euclídea, debe ser

(i) *consistente* : el sistema no debe implicar contradicción alguna,

(ii) *independiente* : el sistema obtenido al cambiar un axioma cualquiera por su negación debe también ser consistente,

(iii) *completo* : no debe ser posible agregar axiomas nuevos y al mismo tiempo seguir conservando la independencia.

La primera de estas condiciones es obviamente indispensable mientras que la segunda es deseable por razones de elegancia pues si, por ejemplo, P es un axioma tal que al ser sustituído por su negación se obtiene una contradicción, es decir, si P no puede suponerse falso en presencia de los axiomas restantes entonces P es una consecuencia lógica de aquellos y por lo tanto el sistema de axiomas puede simplificarse con la eliminación de P el cual pasaría a ser un *teorema* de la teoría en cuestión. Sin embargo, la falta de independencia, a diferencia de la inconsistencia, no invalida un sistema de axiomas y en cambio puede facilitar una primera exposición de la teoría. De hecho, el sistema de axiomas para la geometría publicado originalmente por Hilbert no era independiente pues investigaciones posteriores revelaron que dos de sus "axiomas" podían ser *demostrados* con base en los restantes. En cuanto a la completez, puede manifestarse por el hecho de que dos "modelos" que satisfagan al sistema axiomático deban ser necesariamente "isomorfos" ; esto indica que en muchos casos, especialmente en el ámbito generalizador moderno, la completéz puede mirarse como una limitación. En efecto, un sistema no completo es la base de una teoría más amplia en lo referente a los casos particulares que incluye. También desde este punto de vista resulta deseable la independencia pues mientras más simple sea el sistema axiomático más fácil será verificar si una estructura particular lo satisface y así poder aplicarle toda la teoría derivada del sistema.

Las investigaciones posteriores de Hilbert sobre los fundamentos de la Geometría, la Aritmética y de la Matemática en general, dieron como resultado una sistematización completa del método axiomático. Se puso en evidencia la completa arbitrariedad de los términos empleados en la formulación de las teorías matemáticas resaltando así su carácter esencialmente abstracto. Esta actitud se refleja claramente en la popular afirmación de Hilbert, enunciada en 1891 pero no publicada hasta 1935, según la cual nada cambiaría en la Geometría si en lugar de «punto», «recta» y «plano» dijéramos siempre «mesa», «silla» y «vaso» respectivamente. Resaltaba en cambio la importancia de analizar la naturaleza del proceso deductivo y su expresión por medio de signos; en particular, se deseaba encontrar una descripción adecuada de lo que *es* una *demostración*. El logro de estos objetivos supone un estudio detenido del lenguaje simbólico empleado para designar las relaciones y los objetos matemáticos lo cual eventualmente conduce al llamado

Formalismo; esta línea de investigación fué iniciada por Hilbert con su Teoría de la Demostración y condujo a los más interesantes hallazgos en materia de fundamentos aunque puede asegurarse que ni la dirección de estas investigaciones ni sus a veces sorprendentes resultados coinciden exactamente con las intenciones y las esperanzas originales del mismo Hilbert.

Formalización. Corriendo el riesgo que conlleva todo parangón podríamos afirmar que el Formalismo es con respecto a la Axiomática lo que la gramática es con respecto al arte del bien hablar. Las estrechísimas relaciones entre los procesos del razonamiento lógico y la palabra que lo expresa han conducido a la escuela del empirismo lógico a sostener la identidad entre pensamiento y lenguaje. Sin llegar a comprometerse con tales afirmaciones debe en todo caso aceptarse su íntima conexión que condiciona la existencia de uno a la del otro de tal manera que, por ejemplo, la inmensa importancia del lenguaje en todo lo relacionado con el ejercicio de la lógica es incuestionable. Es así como se explican los intentos llevados a cabo para reducir el lenguaje a un sistema simbólico, libre de interpretaciones perturbadoras, para así intentar un análisis del "álgebra" del razonamiento, estudiando directamente los signos sin referencia alguna a las cosas que ellos puedan designar, apartándose por ende de todo posible sicologismo. Es claro entonces que el Formalismo, al colocar todo el énfasis en el lenguaje con exclusión casi completa de otros factores, es una doctrina que difiere fundamentalmente del Intuicionismo.

Comencemos observando que, entre los factores ligados a un lenguaje escrito $\mathcal{L}$ se cuenta una colección bien determinada de *signos primitivos* (en castellano, por ejemplo, tenemos el abecedario $a, b, c, \ldots, z$, los signos de puntuación, la tilde). Estos signos pueden disponerse unos al lado de otros formando agrupaciones finitas que son las *expresiones* de $\mathcal{L}$ y corresponden a las palabras o frases de un lenguaje natural como el Castellano. Por supuesto, sólo son admisibles ciertas clases de agrupaciones, a saber, las que obedecen a ciertas *reglas de formación* previamente convenidas. Así, por ejemplo, $x\,.\,a\;p,\,n$ difícilmente puede ser considerada como una expresión en Castellano ordinario.

El análisis de un lenguaje $\mathcal{L}$ presupone naturalmente otro lenguaje $\mathcal{L}_m$ en el cual se "habla" acerca del lenguaje $\mathcal{L}$. Se dice entonces que $\mathcal{L}$ es el *lenguaje objeto* y que $\mathcal{L}_m$ es el *metalenguaje* empleado en la construcción y/o estudio de $\mathcal{L}$. De acuerdo con R. Carnap cada lenguaje presenta tres aspectos diferentes:

a) la *pragmática* que dirige su atención hacia el organismo locutor, es decir, al organismo que emplea el lenguaje,

b) la *semántica* que considera las expresiones del lenguaje en su conexión con las cosas o relaciones que ellas representan. Se refiere entonces al *significado* de las expresiones; esto es, a la interrelación entre el signo y la cosa significada.

c) la *sintaxis* que dirige su atención a la manera de disponer los signos para formar las expresiones, dejando de lado todo intento de interpretación.

Ahora bien, una *teoría* (o *sistema*) *formal* $\mathcal{T}$ es esencialmente un lenguaje artificial o, más precisamente, la sintaxis de un tal lenguaje. En consecuencia, se especificarán desde un principio unos ciertos signos (primitivos) a partir de los cuales se deben construir las expresiones de $\mathcal{T}$, es decir, agrupaciones lineales finitas de signos primitivos. A estos signos y expresiones no se les atribuye en principio ninguna significación aunque, intuitivamente, algunas de esas expresiones representan los "objetos" que la teoría intenta estudiar; estas expresiones se denominan *términos* de la teoría $\mathcal{T}$. También habrá expresiones que, intuitivamente, representan las "afirmaciones" o "enunciados" que se hacen acerca de los "objetos" y reciben el nombre técnico *relaciones de la teoría* $\mathcal{T}$ Posteriormente se especifica una cierta colección de relaciones (" enunciados" o " afirmaciones") las cuales serán los *axiomas* de la teoría y corresponden, intuitivamente a " hechos" que se suponen conocidos acerca de los objetos.

Se enuncian además ciertas *reglas de inferencia* las cuales, con base en la disposición relativa de las expresiones escritas permiten decidir cuándo un enunciado es "consecuencia directa" de otros. Una *demostración*, en la teoría particular considerada, puede describirse entonces como una sucesión finita de enunciados

$$\mathcal{A}\ ,\ \mathcal{B}\ ,\ \mathcal{C}\ ,\ \cdots\ ,\ \mathcal{P} \qquad (1)$$

cada uno de los cuales es un axioma o es consecuencia directa, según alguna de las reglas de inferencia de $\mathcal{T}$, de algunos de los enunciados que figuran antes de él en la misma sucesión. En términos nada técnicos podríamos expresar estas condiciones diciendo que toda afirmación que figure en una demostración debe ser "cierta" por derecho propio (axiomas) o debe poderse "deducir" de las anteriores . Se dice que la sucesión *(1)* es una demostración *de* $\mathcal{P}$.

Un *teorema* de $\mathcal{T}$ o también un enunciado $\mathcal{T}$*–verdadero* (o, sencillamente, *verdadero*, si no hay riesgo de confusión), es un enunciado para el cual se ha logrado escribir una demostración ; por ejemplo, todo axioma de $\mathcal{T}$ es un enunciado $\mathcal{T}$- verdadero (!) , pues si $\mathcal{A}$ es un axioma entonces

$$\mathcal{A}$$

es una demostración (de $\mathcal{A}$). Se dice que un enunciado es $\mathcal{T}$*-falso* (o, sencillamente, *falso*) si su negación es un *teorema*, es decir, si su negación es $\mathcal{T}$-verdadera; naturalmente estamos asumiendo que en la descripción de $\mathcal{T}$ se ha incluido la manera de formar la "negación" de cada enunciado de $\mathcal{T}$. Es entonces a priori posible que un enunciado no sea verdadero pero tampoco sea falso, es decir, que no haya podido escribirse una demostración de él ni de su negación. Aún más, es efectivamente posible que en una teoría $\mathcal{T}$ existan enunciados $\mathcal{A}$ tales que sea imposible llegar a escribir una demostración de $\mathcal{A}$ ó una de su negación. Esto es en efecto lo que demostró Gödel para la Aritmética (formal), bajo la hipótesis de que esta teoría es consistente; puede considerarse que de esta manera queda enterrado para siempre el llamado "Principio de solubilidad" de Hilbert es decir, su creencia en que todo problema matemático debería eventualmente resolverse (afirmativa ó negativamente).

Vale la pena anotar que si en una teoría formal se afirma que un enunciado $\mathcal{A}$ *no es cierto*, es decir, que no se ha logrado escribir una demostración de $\mathcal{A}$ ello no quiere decir que dicho enunciado sea falso (cabe confrontar esto con el llamado *principio del tercero excluido*). Cuando una teoría $\mathcal{T}$ es tal que, para *todo* enunciado $\mathcal{A}$ de $\mathcal{T}$ se tiene que o bien $\mathcal{A}$ es un teorema o bien su negación es un teorema, es decir, si todo enunciado de $\mathcal{T}$ es cierto o es falso, se dice que la teoría $\mathcal{T}$ es *categórica* (*). Con esta terminología podemos decir que Hilbert confiaba en que *toda* teoría matemática fuese categórica.

En la somera y por lo tanto imprecisa descripción anterior puede observarse la intención de sustituir los procesos del pensamiento poniendo en su lugar ciertas

(*) Es conveniente anotar que este término tiene varias acepciones distintas en Matemáticas.

manipulaciones de tipo mecánico sobre signos determinados por sus características tipográficas o geométricas. Refiriéndose a la formalización utilizada por Bourbaki como base para su desarrollo de la Teoría de Conjuntos y la Aritmética, el célebre André Weil, quien desempeñó un papel preponderante en la conformación de dicho grupo, decía que "Hemos aprendido a fundar toda nuestra ciencia en una fuente única, compuesta solamente de algunos signos y de algunas reglas para el manejo de estos signos; reducto indudablemente inexpugnable, en el cual no podemos encerrarnos sin riesgo de pasar hambre, pero al cual siempre podremos replegarnos en caso de incertidumbre o peligro exterior".

Es así como en la formalización de las teorías se realiza en principio lo que Leibnitz entrevió como posibilidad maravillosa de sintetizar un "alfabeto" de conceptos primitivos cuya manipulación, siguiendo reglas prefijadas, lograría expresar todas las afirmaciones verdaderas accesibles al entendimiento humano. La parte factible de esta "Característica Universal" buscada por Leibnitz fue creada 200 años después de él por Peano, perfeccionada por Hilbert e impuesta por Bourbaki.

Resulta interesante confrontar las opiniones de Leibnitz y Bourbaki con respecto a la formalización en cuanto a reducción del proceso deductivo a operaciones de tipo "mecánico" las cuales, teóricamente, puede llevar a cabo una máquina. Según Leibnitz, una vez descritas las reglas del juego : *no habría más necesidad de disputas entre dos filósofos que entre dos contadores, pues bastaría que tomaran sus monedas en la mano, se sentaran en sus pupitres y dijeran (con un amigo como testigo, si lo creyera necesario): "contemos "*. Y Bourbaki corrobora : *"La verificación de un texto formalizado no requiere más que una atención en cierta forma mecá-*

Estudiemos las propiedades de m :

1. Si no se vende nada, el precio de venta es 0

$$m(\phi) = 0$$

   El precio de venta no puede ser inferior a 0 .

2. El granjero no puede perder plata en este asunto, cualquiera sea ia venta v :

$$m(v) \geq 0$$

3. En las ventas posibles existen unas incluídas en otras, por ejemplo $\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$. De manera general podemos averiguar (representando dos ventas posibles con v_1 y v_2) que

$$(v_1 \subset v_2) \Rightarrow (m(v_1) \leq m(v_2))$$

4. También se puede averiguar que en todos los casos posibles

$$m(v_1 \cup v_2) = m(v_1) + m(v_2) - m(v_1 \cap v_2)$$

B. ***Segunda situación .***

Sea un conjunto E cuyo número de elementos sea por ejemplo 5 .

$$E = \{a, e, i, o, u\}$$

Podríamos de la misma manera establecer la lista de los elementos de $P(E)$.

A cada subconjunto A de E le hacemos corresponder el número de sus elementos .

$$\{ a, i, o \} \mapsto 3$$

Esa correspondencia es una aplicación de $P(E)$ hacia R y la notaremos $Card$.

$$Card (\{ a, i, o \}) = 3$$

Estudiemos las propiedades de dicha aplicación .

1. $Card\ \phi = 0$
2. Para cualquier elemento A de $P(E)$, $Card(A) \geq 0$
3. $(A \subset B) \Rightarrow (Card(A) \leq Card(B))$
4. Para una pareja cualquiera A, B de elementos de $P(E)$ tenemos

$$Card (A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

C. *Definición* .

Dado un conjunto E y una aplicación m de $P(E)$ en R .

Se dice que esa aplicación m es una *medida* si cumple con las siguientes condiciones :

1. $m(\phi) = 0$
2. Para todo elemento A de $P(E)$, $m(A) \geq 0$
3. $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$ si $B \subset E$
4. $m(A \cup B) = m(A) + M(B) - m(A \cap B)$

* * *

nica , siendo las únicas causas de error las debidas a la longitud y complicación del texto".

En la práctica, una formalización total de la matemática es imposible debido especialmente a la desorbitante longitud de los textos resultantes; así, por ejemplo, usando los signos τ, $\square$, $\vee$, $\neg$, $=$, $\subset$, $\supset$ adoptados por Bourbaki en su Matemática Formal, el número 1 sería una expresión con varias decenas de miles de signos. Por otra parte, el Método Axiomático es en cierto modo una técnica que permite escribir textos matemáticos cuya formalización no ofrece, en principio, ninguna dificultad. Cuando una teoría ha sido convenientemente axiomatizada, su formalización puede ser vislumbrada aunque nunca se realice efectivamente.

En los casos realmente interesantes, una teoría formal $\mathcal{T}$ es siempre la formalización de una teoría no formalizada $\mathcal{T}_i$ preexistente. Por ejemplo, la teoría de los números naturales es la base de la *aritmética formal*. Además, la descripción y el estudio de $\mathcal{T}$ implica la elaboración de una teoría $\mathcal{T}_m$ de orden superior, la cual se formulará, según se mencionó antes, en el metalenguaje adoptado, digamos el Castellano. Esta teoría $\mathcal{T}_m$ es la *metateoría* de $\mathcal{T}$ y pertenece al dominio de la llamada *Metamatemática*.

En general, a cada lenguaje o teoría formal $\mathcal{T}$ se liga un *sistema semántico* el cual proporciona una *interpretación* de $\mathcal{T}$ mediante reglas que determinan bajo qué condiciones un signo es "aplicable" a una cosa, permitiendo de esta manera "entender" lo que un enunciado formal $\mathcal{A}$ "dice" acerca de los "objetos". Una teoría formal tiene, en general, varias interpretaciones; cuando se ha fijado una tal interpretación $\mathcal{I}$ de una teoría formal $\mathcal{T}$, los *términos* de $\mathcal{T}$ corresponden a los objetos o elementos de una cierta colección D (llamada el *dominio* de la interpretación $\mathcal{I}$) mientras que las *relaciones* de $\mathcal{T}$ corresponden a proposiciones o condiciones que se refieren a los objetos de la colección D ; las proposiciones que surgen de esta manera son o bien ciertas o bien falsas ; en particular, se exige que los axiomas de $\mathcal{T}$ correspondan a proposiciones verdaderas acerca de los objetos de la colección D . Un *modelo* de $\mathcal{T}$ es una interpretación de $\mathcal{T}$ en la cual todos los enunciados $\mathcal{T}$-verdaderos correspondan a proposiciones ciertas. Un enunciado $\mathcal{A}$ es *(lógicamente) válido* si en cualquier interpretación corresponde a una proposición cierta. Resulta natural inquirir por una posible relación entre esta noción y la noción de $\mathcal{T}$–verdad. En 1930 Gödel demostró que para ciertas teorías formales de capital importancia estas nociones coinciden, es decir, un enunciado es $\mathcal{T}$– verdadero si y sólo si es lógicamente válido. (Teorema de Completez).

*

. . . Y se le ha dado al hombre
el más peligroso de los bienes
el lenguaje, para que con el
cree y destruya,
. . . para que muestre lo que es,
. . .

F. Hölderlin

*

He olvidado la palabra que quería pronunciar
y mi pensamiento, incorpóreo,
regresa al reino de las sombras

O. Mandelstam

* * *