Boletín de Matemáticas
Vol. VI Nº 5 pp. 46-52

ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

DEMOSTRAR vs. ENTENDER (ó la manía de demostración)

ALONSO TAKAHASHI

Acerca de las opiniones que aquí vamos a exponer puede con justicia decirse que son, en gran parte, fruto del sentido común (del cual no ha faltado quien afirme que es el menos común de los sentidos); estas observaciones han sido señaladas en una u otra oportunidad, por numerosos investigadores y profesores de Matemáticas en diversas épocas y países.

Mencionemos en primer lugar un fenómeno que tiene todas las características de un prejuicio; nos referimos al clima que frecuentemente se presenta cuando en un curso de Matemáticas se acepta, sin demostración, algún hecho no enteramente trivial el cual es usado en ulteriores desarrollos dentro del mismo curso. Es común que entonces gran parte de los estudiantes y hasta el mismo instructor sientan que en el desenvolvimiento del curso se ha presentado una falla y que desde ese momento en adelante todo es inseguro puesto que depende de algo que no se acaba de aceptar por el único hecho de no haberse *escrito* su demostración en el tablero.

En otros términos, unos requisitos que ni siquiera se presentan con carácter de necesidad en el ámbito de la investigación durante sus primeras fases (puesto que allí abundan motivos intuitivos, razonamientos por analogía, iluminaciones) y que solo se exigen en la fase de verificación y en la presentación de resultados, han sido trasladados a una esfera completamente diferente, a saber, la de la exposición y la enseñanza. Y muchas veces a niveles muy elementales.

Es así como un profesor, quien frecuentemente no es un investigador, aplica en su exposición, animado por la mejor de las intenciones, reglas que son casi privativas de la investigación matemática.

Digamos, de una vez por todas, que ser capaz de reproducir formalmente una demostración es con frecuencia prácticamente independiente de *entender* el correspondiente resultado. En efecto, no es en modo extraño que un estudiante pueda exponer paso a paso una larga demostración de un determinado teorema sin que en realidad entienda completamente el significado, la importancia y las implicaciones del mismo, siendo muchas veces incapaz de reconocer las diversas situaciones particulares en las cuales puede ser aplicado. Aún más, puede llegar a formarse la idea de que un teorema es importante sólo porque su demostración es larga, complicada y exige muchos recursos teóricos y artificios ingeniosos.

Finalmente, y esto es lo que hace más seria la situación, la comprensión del mismo texto demostrativo puede resultar comprometida pues, según lo ha expuesto J. Hadamard, para poder afirmar que uno ha entendido un argumento matemático, no importa su complicación, éste debe aparecer ante la conciencia como algo único, individual, con su fisonomía propia plasmada en *una sola idea global.* Lo cual recuerda, como lo señala el mismo autor, la observación de Rodin respecto al escultor, quien debe tener presente en todo momento la idea total de su obra con el fín de conectar con ella los menores detalles de su trabajo; en ambos casos el mantener esta actitud mental requiere un esfuerzo penoso por parte del intelecto. Y es precisamente esa visión de conjunto, esa síntesis de los diversos elementos o pasos que conforman un argumento, y de los diversos teoremas que conforman el esqueleto de una teoría, lo que deben lograr aquellos que realmente deseen *entender* las matemáticas.

Si bien, formalmente, un *teorema* de una teoría matemática se define simplemente como una aserción que ha sido demostrada y, desde el punto de vista lógico no se establecen ulteriores clasificaciones, lo cierto es que dentro del desarrollo de una teoría específica los teoremas tienen características específicas que los diferencian entre sí. En efecto, si bien todo teorema conlleva necesariamente una demostración, hay otros factores de no menor importancia ligados a él : su significación dentro de la teoría (puede, por ejemplo, relacionar áreas que, de acuerdo con el desenvolvimiento de la teoría, aparecían como inconexas), su utilidad (puede ser una herramienta óptima para obtener con menos esfuerzos otros resultados), su posición dentro del desarrollo de la teoría (por qué, por ejemplo, deseaba obtenerse un resultado de ese tipo y por qué, si es el caso, se conjeturaba algo por el estilo), en fin, el exacto sentido de su enunciado, lo que dice y aquello que no dice, es decir, sus alcances y limitaciones. No afirmamos que todos los anteriores sean aspectos diferentes entre sí pero deseamos hacer énfasis en la existencia de aspectos de un teorema diferentes a su demostración. Esta demostración se presenta frecuentemente en forma muy decantada debido a su paso por diversos autores y escuelas. Tan rebuscada, a veces, que si bien puede ser la más económica y elegante, oculta en cambio todos los detalles que podrían hacerla instructiva : el énfasis se ha transladado del fín (la comprensión del teorema) a los medios para probarlo. Después de contemplar un argumento así esterilizado el estudiante casi siempre sentirá la ausencia de la síntesis, de la visión global unificadora y el curso, como un todo, habrá perdido algo de sentido para él. En el peor de los casos, por desgracia bastante frecuente, se engañará así mismo diciendose que sí ha entendido o se resignará a "ingerir" la materia con el único objetivo de avanzar en su carrera. Es así como el rigor (en la exposición) se transforma en el *rigor mortis* (del aprendizaje).

Declaramos sin embargo que no abogamos por la abolición total y ni siquiera muy significativa de las demostraciones en clase. El estudiante necesita durante sus años de formación ser guiado en el ejercicio del razonamiento deductivo. Además, hay demostraciones de demostraciones y muchas de ellas son excelentes para iluminar todos los aspectos de un teorema. Otras más ilustran métodos canónicos de enfocar determinadas situaciones y por lo tanto su utilidad es enorme. En este caso la demostración es a la vez medio y fin y deben agotarse los medios para lograr su comprensión. Lo que afirmamos es que en *algunos* casos es mucho más conveniente, y en modo alguno censurable, omitir una demostración en aras de los otros fines más importantes.

Para finalizar citaremos dos comentarios de los cuales las líneas anteriores no son más que una repetición, quizás innecesaria. Refiriéndose al programa para la carrera de matemáticas (The A.M. Monthly, Vol. 7, Nº 7) el conocido matemático E. Spanier dice : *A los profesores de hoy se les ha enseñado a desconfiar de la práctica de dibujar figuras y usar la intuición como ayuda para entender un re-*

sultado. Insisten entonces en presentar cada tema en la forma "correcta" lo cual casi siempre significa,en el contexto más general y abstracto al alcance del profesor en cuestión. Es así como una demostración de la forma más fuerte del teorema de Cauchy puede tomar la mayor parte del tiempo en un primer curso de análisis complejo a costa de temas como el cálculo de integrales definidas o la solución de problemas de potencial. Aún las más elementales propiedades de curvas y superficies en el espacio tridimensional no se discuten sin una maquinaria apropiada para subvariedades generales de un espacio n-dimensional.

Cuando un tal volumen de maquinaria abstracta se presenta antes de que la intuición del estudiante se haya desarrollado ,éste puede aprender cómo se prueba un resultado pero es improbable que adquiera una verdadera comprensión del mismo. Las cosas más importantes acerca de un teorema no incluyen necesariamente su demostración. Por el contrario, para entender un teorema uno debe saber lo que dice, lo que motiva o porqué se enuncia, casos en los cuales se aplica o no se aplica y algunas de sus consecuencias ,así como su demostración. Estas cosas no son necesariamente fáciles; en verdad, la verificación paciente y paso por paso puede ser considerablemente más fácil. No debemos temer la omisión de demostraciones. Es buena pedagogía, especialmente en cursos a nivel pregraduado, enunciar un teorema (como el teorema de Stokes) y discutir sus consecuencias sin dar una demostración del mismo.

Del libro "Ciencia y Método" de H. Poincaré destacamos las observaciones siguientes : *¿ Qué es entender ? ¿tiene ésta palabra el mismo significado para todos ? Consiste el entender la demostración de un teorema en examinar su-*

cesivamente cada uno de los silogismos que lo componen y convencerse de su corrección y de su conformidad con las reglas del juego ? Análogamente, ¿consiste el entender una definición simplemente en reconocer que el significado de cada uno de los términos empleados es ya conocido y en verificar que ella no encierra contradicción alguna ?

Para algunos, sí ; cuando lleguen a tal convicción dirán, entiendo. Pero no para la mayoria. Casi todas las personas son mucho más exigentes; desean saber no meramente si todos los silogismos de una demostración son correctos sino porqué se enlazan de cierto modo y no de otro. Mientras esos nexos les parezcan engendrados caprichosamente y no por una inteligencia siempre consciente del fin perseguido, no considerarán que han entendido.

Sin duda no son completamente concientes de lo que exigen y no podrían formular sus deseos, pero si éstos no son satisfechos, sentirán vagamente que algo falta. Entonces, ¿qué es lo que sucede ? En un principio captan las evidencias puestas ante sus ojos, pero, a medida que éstas se entrelazan por medio de un tenue hilo con aquellas que preceden y con las que siguen, pasan sin dejar la menor traza en sus cerebros y son olvidadas inmediatamente; iluminadas por un momento, retroceden al punto hacia una noche eterna. A medida que avanzan no verán siquiera esta efímera luz pues los teoremas dependen unos de otros y esos que se necesitan han sido olvidados. Es así como llegan a ser incapaces de entender las Matemáticas.

No es siempre culpa del profesor. Muchas veces su intelecto, quien debe percibir el hilo conductor, es demasiado negligente para buscarlo y hallarlo. Más para *ir en su ayuda, nosotros debemos primero entender cabalmente qué es lo que los detiene .*

* * *

El afán de publicar

El *publicar* como único fin de la vida académica se ha transformado en nuestros días en una verdadera manía, a veces necesaria, pues en muchas partes (y hay que reconocer que éste es el mejor de los casos) las promociones en la carrera docente dependen en gran parte del volumen y, con alguna frecuencia, de la calidad del material publicado. A este respecto, en el artículo " A View of Computer Science Education" (The A. M. Monthly vol. 2 No. 79) por Peter Wegner, aparece una recomendación que, si bien no es muy practicable, no deja de ser interesante.

Los objetivos originados de las Academias Griegas y de las instituciones religiosas de estudio consistian en una devoción a la vida estudiosa y contemplativa sin preocupación alguna por publicar. La sugerencia siguiente podría quizás reformar los esquemas de incentivos académicos en tal dirección : " Después del grado nómbrese a los más prometedores de entre los nuevos doctores como Profesores Titulares. Cada vez que publiquen algo redúzcase su categoría y su sueldo de tal manera que publiquen un artículo sólamente cuando sientan que su importancia compensa un sacrificio personal " .