Boletín de Matemáticas
Vol. VI, No. 5 , pp. 33-45

LAS NOCIONES MATEMATICAS , IV

ALONSO TAKAHASHI

5. GIUSSEPPE PEANO

(La Axiomática)

El rigor tanto en Geometría como en Aritmética y en Análisis empezó a manifestarse a fines del siglo pasado dando origen al moderno método axiomático, pudiendo afirmarse que, durante la década de 1880 a 1890 tuvo lugar la evolución de del concepto de *axioma'* desde su sentido original de *principio auto evidente* y *verdad aceptada universalmente* hasta su interpretación moderna como afirmación que se acepta como cierta con el fin de analizar sus consecuencias lógicas. Simultáneamente se reafirmó la independencia entre las teorías matemáticas y cualquier tipo de interpretación de los objetos y de las afirmaciones de la misma en alguna "realidad concreta", haciéndose entonces énfasis en el carácter abstracto de las "cosas" que maneja la matemática . Esta intención es completamente explícita en M. Pasch ("el padre del rigor en Geometría") : " De hecho, si se quiere que la Geometría sea verdaderamente deductiva, el proceso de inferencia debe ser enteramente independiente del *significado* de los términos geométricos, tanto como debe ser independiente de las figuras". El mismo espíritu se refleja en las siguientes palabras de G. Fano; "como base de nuestro estudio asumimos una colección arbitraria de entes de naturaleza arbitraria; entes que, *por brevedad*, llamamos *puntos*; y esto de modo por demás independiente de su naturaleza". Pero el trabajo más célebre en este campo es seguramente el realizado por G. Peano (1858-1932) y sus colaboradores quienes se empeñaron en desarrollar simultáneamente con la Matemática un cálculo lógico teniendo como meta la *formulación* de las teorías matemáticas en un lenguaje simbólico semejante al de la lógica formal. Es conveniente mencionar que el objetivo principal de Peano no era especialmente el de fundamentación de la Matemática sino que su interés era primordialmente *metodológico*: la axiomática se presentaba como la *herramienta* óptima para estudiar las teorías matemáticas. En este sentido la corriente por él impulsada puede distinguirse sensiblemente del así llamado *Formalismo*.

La axiomatización de los números naturales. Entre la copiosa e importante obra de Peano es especialmente conocido su desarrollo axiomático de la aritmética (1891). No se trata en este caso de explicar la *naturaleza* de los números o, en otros términos, no se intenta responder a preguntas como *¿ que es un número natural ?*, sino que, tomando este concepto como *idea primitiva* (sin definición) se trata de formular un sistema, lo más "simple" posible, de *axiomas* que caractericen la clase de los números naturales y que permita *deducir* (por medio de las reglas lógicas de inferencia) todas las propiedades de dichos números, es decir, demostrar todos los teoremas de la aritmética; en este sentido se dice que el sistema de axiomas debe ser *completo*. Relacionada con la completez está la posibilidad teórica de decidir la verdad o falsedad de cada afirmación referente a números naturales, cuestión esta que sería posteriormente dilucidada por Gödel.

La clase de los números naturales se presenta a nuestra intuición como una "sucesión" de objetos obtenidos a partir de un objeto inicial o (cero) por medio de un proceso reiterado que consiste en pasar de cada objeto al "siguiente":

$$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots\ldots;$$

Es esta noción intuitiva la que debe "plasmarse" en la axiomatización correspondiente. Se comienza entonces por suponer la existencia de:

a) un conjunto $\mathbb{N}$ cuyos elementos se llaman *números naturales* y

b) un objeto particular al cual se le llama *cero* y se denota 0. Es claro que 0 debe ser un número natural, y esto se establece en seguida.

Primer Axioma. *0 es un elemento de $\mathbb{N}$.*

Esta condición acostumbra escribirse, usando el simbolismo inventado por el mismo Peano, en la forma

$$0 \in \mathbb{N} .$$

La restricción impuesta por esta única condición es a todas luces insuficiente para describir el sistema deseado, en efecto, si tomamos un objeto cualquiera y lo designamos 0 mientras que llamamos $\mathbb{N}$ al conjunto cuyo único elemento es 0, entonces las condiciones hasta aquí exigidas se cumplen mientras que claramente $\{0\}$ no es el sistema deseado. Es necesario entonces introducir otras restricciones (en forma de axiomas) que vayan delineando en forma cada vez más precisa el concepto que deseamos plasmar.

Segundo Axioma. ***Para cada elemento n de $\mathbb{N}$ existe un único elemento n^+ de $\mathbb{N}$, el cual se llamará el "siguiente" o "sucesor" de n.***

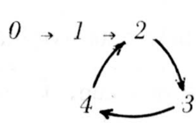
Pero, aún ahora, tomando $\mathbb{N}$ igual al conjunto cuyo único elemento es un cierto objeto 0 y conviniendo que el siguiente de 0 es el mismo 0 (v, fig. 1) se verificarían todas las condiciones.

Figura 1

Estamos aquí en presencia de una anomalía que consiste en que 0 no es el "primer" elemento de la secuencia puesto que es el "siguiente" de un cierto elemento de $\mathbb{N}$, a saber, el mismo 0. Esta situación se remedia con el axioma siguiente :

Tercer Axioma. ***Para todo n de $\mathbb{N}$, $n^+ \neq 0$.***

Sin embargo, si tomamos, digamos, seis objetos $0, 1, 2, 3, 4$ y 5 (diferentes entre sí) y los ordenamos, por ejemplo, en la forma ilustrada a continuación



se obtiene un sistema (evidentemente no como el que deseamos) que verifica los axiomas enunciados. Para evitar que, como en el caso arriba ilustrado, nuestra secuencia forme "ciclos" debe prohibirse explícitamente que dos elementos diferentes (como el 1 y el 4 en ejemplo anterior), tengan el mismo sucesor (en el ejemplo $1^+ = 4^+ = 2$):

Cuarto Axioma. *para todo par* m, n *de elementos de* $\mathbb{N}$, *si* $m \neq n$ *entonces* $m^+ \neq n^+$.

Es claro que una secuencia que satisfaga todos estos axiomas se parece bastante a lo que nosotros entendemos debe ser el sistema de los números naturales $0 \to 1 \to 2 \to \ldots$. Pero aún queda abierta la puerta a situaciones indeseadas, en efecto, es posible que haya miembros (o partes) de $\mathbb{N}$ que se encuentren "separados" de lo que podríamos llamar la secuencia principal; en otros términos, podría haber términos que no pudieran alcanzarse a partir de 0 pasando reiteradamente de un elemento al siguiente. Este sería el caso si, por ejemplo, $\mathbb{N}$ estuviese formado por una secuencia (infinita) de objetos $0, 1, 2, 3, \ldots$ y además por un objeto X (diferente de cada uno de los anteriores) cuyo siguiente es el mismo X:

$$\mathbb{N} = \begin{cases} 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \ldots \\ \\ X \end{cases}$$

Salta a la vista la necesidad de una condición que garantice que si partimos de 0 y tomamos su siguiente y luego el siguiente de éste y llevamos este proceso *ad infinitum*, entonces pasamos por *todos* los elementos de $\mathbb{N}$. El enunciado formal de esta condición es el célebre Principio de Inducción Completa:

Quinto Axioma. (Principio de Inducción). *Si* A *es un conjunto tal que*

1) $0 \in A$

2) Para todo n *de* A *se tiene que* $n^+ \in A$ *siempre que* $n \in A$, *entonces todo el conjunto* $\mathbb{N}$ *está contenido en* A.

En particular, si A es un conjunto de números naturales y satisface 1) y 2), entonces A es igual a $\mathbb{N}$.

Podría quizás argumentarse que estos axiomas no determinan completamente al sistema de los números naturales pues, por ejemplo, el sistema

$$7 \to 9 \to 11 \to 13 \to \ldots$$

donde 7 es el "cero" y el "siguiente" de cada elemento n del sistema es $n+2$, cumple todas las condiciones. Sinembargo, si llamamos $0'$ a 7, $1'$ a 9, $2'$ a 11, etc., el sistema puede escribirse en la forma

$$0' \to 1' \to 2' \to 3' \to \ldots$$

el cual es "esencialmente" el mismo sistema de los números naturales. Técnicamente se dice que dichos sistemas son *isomorfos* entre sí. En realidad se diferencian únicamente en los signos usados para describirlos, vale decir, en los nombres dados a los objetos que los constituyen. Podría pensarse que todos estos sistemas isomorfos son representaciones de alguna entidad (el sistema de los números naturales) existente en algún mundo abstracto. Vale la pena anotar que el "representante" originalmente empleado por Peano fue $1, 2, 3, \ldots$ en lugar de

0, 1, 2, 3, . . .

El Metodo Axiomatico . Dentro de su programa de escribir la matemática en forma puramente simbólica dando reglas lógicas estrictas para el manejo de las fórmulas, Peano introdujo un simbolismo muy adecuado y sugestivo el cual ha llegado a ser universalmente aceptado. El signo $\subset$ (deformación de la letra inicial de "contiene") fue usado por Peano en fórmulas tales como

$$A \subset B$$

para indicar que el conjunto A *contiene* al conjunto B. En la actualidad dicho sentido ha sido invertido empleandose la fórmula anterior para indicar que A *está contenido* en B, es decir, que todo elemento de A es también un elemento de B. Este uso establece cierta concordancia entre el signo $\subset$ y el signo aritmético $<$ pues si $A \subset B$ entonces, en cierto sentido, A es "menor" (o mejor, no mayor) que B.

También introdujo Peano los hoy usuales signos de *union* $\cup$ e *intersección* $\cap$ de conjuntos además del signo de pertenencia $\in$.

Los esfuerzos de Peano y de varios de sus discípulos fueron registrados en el célebre *Formulario*, obra en cinco volúmenes publicados entre 1894 y 1908. Es aquí donde por primera vez se usa en forma sistemática y rigurosa la así llamada *axiomática* y se echan las bases del formalismo que sería luego desarrollado por Hilbert.

Por esta misma época el filósofo y matemático B. Russell comentaba la notable obra de Peano con las siguientes palabras : *En la actualidad el gran maes-*

tro del arte del razonamiento formal es un italiano, el profesor Peano de la Universidad de Turin . . ., si bien el método por él creado es susceptible de ser llevado más allá de lo que él lo ha llevado, le corresponde el honor de haber sido el primero. Cabe anotar que, en cuanto a reclamar crédito por su obra, Peano fue siempre muy honesto y, en algunos casos excesivamente modesto, cosa que no puede afirmarse, por ejemplo, acerca de Hilbert. Anotemos también que la obra de hombres como Pash, Dedekind y Frege fue de gran importancia en el desarrollo de estas nuevas concepciones matemáticas aunque en general Peano obtuvo sus resultados en forma independiente.

La *Axiomática* o *Método Axiomático General* introducido por Peano y posteriormente adoptado en todo el ámbito de la Matemática contemporánea, consiste en desarrollár una teoría $\mathcal{T}$ partiendo de ciertos *términos* no definidos y que representan los "objetos" a los cuales se refiere la teoría y las "relaciones" existentes entre ellos. Luego se enumeran ciertas afirmaciones acerca de dichos objetos y relaciones : son los *axiomas* de la teoría $\mathcal{T}$. Esta elección de elementos para formular una *teoría* pone de presente que *no* es la *naturaleza* de los entes matemáticos lo que interesa sino, en cambio, sus propiedades y las de las relaciones entre ellos existentes. También es claro que en este concepto de *teoría de los axiomas* no están sujetos a condiciones como la de ser "autoevidentes" o ser "universalmente aceptados". Es a éste concepto de teoría matemática que Russell hace referencia al afirmar que "la Matemática puede definirse como la ciencia en que nunca sabemos de qué hablamos, ni si lo que decimos es verdad".

En una geometría, por ejemplo, pueden tomarse las expresiones «punto», «recta» y «estar entre» como términos primitivos, enunciando luego los axiomas que expresan sus "propiedades".

1. *Toda recta es una colección de puntos.*

2. *Para cada par de puntos (distintos) hay una recta, y una sóla, que los contiene* etc. (donde, naturalmente, se suponen previamente introducidas las nociones de la Teoría de Conjuntos).

Una vez introducidos los términos primitivos y los axiomas, el desarrollo de la teoría consiste, desde el punto de vista lógico, en derivar, de acuerdo con las reglas aceptadas de inferencia, las consecuencias de los axiomas. Una tal derivación constituye una *demostración* en dicha teoría. En las demostraciones no deben usarse nociones o prepiedades que no hayan sido adecuadamente introducidas (en los axiomas o por medio de definiciones) ó demostradas. Como recurso metodológico, este procedimiento ayuda a evitar las frecuentes falacias motivadas por el abuso de la intuición que impele a introducir en las demostraciones, nociones y relaciones ajenos a la situación considerada, abusando muchas veces de razonamientos basados en la sola analogía. Por otra parte, si observando rigurosamente las reglas se llega a una contradicción, debemos concluir que por medio de los axiomas introducidos se ha descrito, por así decir, una situación irrealizable. En otros términos : el sistema de axiomas es, en sí mismo, contradictorio.

Mucho antes de la introducción sistemática de la Axiomática se había indicado que en el proceso deductivo de una teoría el lenguaje simbólico es de utilidad por cuanto al emplear signos desprovistos de interpretación inmediata se evita la aceptación de hechos "evidentes" cuya evidencia proviene de la aceptación tácita de otros hechos los cuales posiblemente no se tienen en el contexto considerado. Recuérdese a este respecto la posición del "axioma" *el todo es mayor que las partes* dentro de la teoría de Cantor.

Una situación similar se presenta en Geometría con respecto al uso de figuras. Basar demostraciones geométricas en dibujos más o menos cuidadosamente trazados ha sido una práctica tradicional y evidentemente natural debido a los orígenes y naturaleza de la disciplina. Sin embargo son también muy conocidas las falacias a que tal práctica puede conducir. Un ejemplo clásico, citado por Klein permite, con base en la confección defectuosa de un dibujo, concluir que : ¡ todos los triángulos son isósceles!. Veámoslo : dado un triángulo cualquiera ABC (Figura 2) sea b la bisectriz del ángulo de vértice A y sea m la perpendicular levantada en el punto medio del lado BC. Entonces :

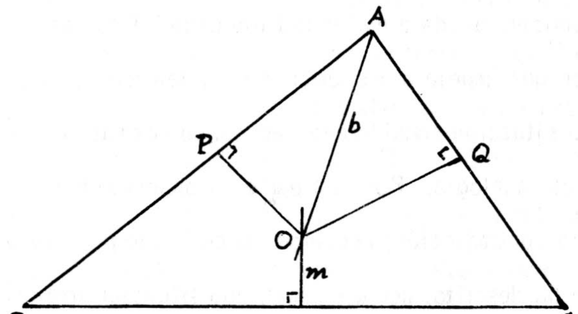


Figura 2

a) Si b y m no se cortan en un punto tendremos $b \perp BC$ concluyéndose fácilmente que $AB = AC$.

b) Si b y m se cortan en un punto O, sea $OP \perp AB$ y $OQ \perp AC$. Entonces los triángulos rectángulos APO y AQO son iguales, obteniéndose $AP = AQ$. Pero también $OP = OQ$ y como $OB = OC$ y los triángu -

los PBO y QCO son rectángulos, se tiene $PB = QC$. Ahora bien, de $AP = AQ$ y $PB = QC$ se deduce que $AB = AC$.

Luego, en cualquier caso, los lados AB y AC resultan iguales.

Parece pertinente recordar la "definición" : *la Geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas* (vale decir, *sin figuras*).

El papel del Método Axiomático. El empleo juicioso de la axiomática permite al matemático moderno llevar a cabo una verdadera anatomía comparada de los sistemas que estudia, analizando los resortes más profundos de cada demostración. Cuando un teorema T ha sido demostrado en una estructura particular (p.ej. en el sistema $\mathbb{R}$ de los números reales), el matemático trata de ver cuáles de los axiomas de $\mathbb{R}$ pueden quitarse pudiendose aún probar T. Si al eliminar un axioma A aparecieren contraejemplos, tratará de recuperar la demostración sustituyendo A por una condición un poco más débil A', etc. Uno de los objetivos es la identificación de la "estructura" más amplia en la cual pueda aún probarse T ó una versión de T convenientemente formulada. En general, se considera imperfecta y falta de elegancia una derivación que emplee más premisas de las necesarias.

Como corolario natural, este método conlleva una tendencia hacia la generalización y la economía de pensamiento lograda con la consideración de "estructuras multivalentes" que agrupan un gran número de casos particulares. En el Algebra, por ejemplo, después del proceso de generalización o extensión del concepto de *número* pasando sucesivamente de un sistema único (los enteros) a varios (los racionales, los reales y los complejos), se da el salto hacia las *estructuras* *abstractas* (grupos, anillos, módulos, ...).

La diferencia entre los enunciados de la Matemática clásica y los de la Matemática moderna es similar a la existente entre los enunciados de la Aritmética y el Algebra elementales : mientras que en la primera se consideran relaciones particulares, como

$$(5+2)+3 = 5+(2+3) \ ,$$

en la segunda se afirman hechos relativos a muchos o a todos los números :

$$(x+y)+z = x+(y+z) \, .$$

La Matemática moderna usa sistemas de axiomas convenientemente elegidos para reunir muchos casos especiales que presentan propiedades comunes importantes, definiendo una estructura general y abstracta caracterizada por dichas propiedades. Se logra de este modo analizar de una vez por todas los rasgos comunes a todos los casos particulares posibles. Se considera un tipo de estructura (por ejemplo, la de *cuerpo ordenado*) en lugar de estudiar un solo espécimen digamos los números racionales.

Recordemos por último que la Axiomática fue el recurso salvador en la elaboración de una Teoría de Conjuntos (sistema de Zermelo) que pudiese usarse eventualmente para intentar una fundamentación de la matemática.

Peligros del Método Axiomático. La utilidad de la Axiomática, juiciosamente empleada, es indiscutible. Sin embargo, su uso incontrolado conduce a excesos viciosos que consisten en parte en considerar que la matemática se reduce a un mero manipular formal de "axiomas" para obtener "teoremas". También puede exagerarse el rigor en el tratamiento de temas importantes, especialmente en la docencia, conduciendo a crear barreras artificiales al progreso del estudio y la investigación. En cualquier caso, se tiende peligrosamente a coartar la creatividad que necesariamente debe nutrirse de intuición e imaginación y proceder a veces temerariamente para explotar nuevas regiones del conocimiento.

La axiomática no puede, por su misma naturaleza, producir por sí sólo nuevas relaciones o mostrar la forma de probarlas. En este campo son otros los recursos que acuden en ayuda del matemático, quien frecuentemente se halla en la situación de Gauss cuando decía : *tengo el resultado pero no sé aún como obtenerlo.*

Para lograr el rendimiento óptimo de una herramienta es necesario conocer a fondo sus limitaciones así como sus posibilidades. Esto se aplica en particular al Método Axiomático.

* * *

CONGRESO INTERNACIONAL DE MATEMATICOS

El *Congreso Internacional de Matemáticos* tendrá lugar en Vancouver, Canadá, entre el 21 y el 29 de agosto de 1974. Más detalles se darán a conocer en el otoño de 1973. La correspondencia referente al Congreso debe dirigirse a :

Congreso Internacional de Matemáticos
University of British Columbia,
Vancouver 8, Canadá .